RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

**A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 15 (1946), p. 60-131
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__60_0>

# A PROPOSITO DI ALCUNI TEOREMI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

*Memoria di* GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Padova*)

In questa Memoria rispondo in modo precipuo alle seguenti pubblicazioni del CINQUINI:

I) *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali* (*non lineari*) *del secondo ordine* (¹),

con speciale riguardo all'

*Aggiunta* (²)

che compare alla fine della Memoria;

II) *Sopra una recensione del Signor* SCORZA DRAGONI (³);

e:

III) *Sopra un' osservazione del Signor* SCORZA DRAGONI *su un problema per le equazioni differenziali ordinarie* (⁴).

Per dare un certo ordine alla mia risposta, prendo di mira la Nota III): l' esame di questa ci condurrà in modo del tutto naturale a discorrere dei lavori I) e II) e, credo, di tutti gli altri che il CINQUINI ha dedicato negli anni 1938 - 1942 alle equazioni differenziali o integro - differenziali, a prescindere da una Nota pubblicata nel vol. XVII del « Bollettino dell' Unione matematica italiana ».

Debbo avvertire il lettore che i §§ 1 e 2 non hanno, specialmente il secondo, nessuna consistenza scientifica. In essi mi difendo da alcuni appunti, mossimi dal CINQUINI e riferentisi in parte a delle mie sviste. Non è colpa mia se queste sviste non

(¹) « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. VIII (1939), pagg. 1-21.

(²) *ibidem*, serie II, vol. VIII (1939), pagg. 21–22.

(³) *ibidem*, serie II, vol. XI (1942), pagg. 105–106.

(⁴) *ibidem*, serie II, vol. XI (1942), pagg. 217-221.

hanno nessuna importanza e se il discorrere su di esse mi costringe a scendere a delle considerazioni banali. Maggiore consistenza presentano i §§ 3 - 7, nei quali sottopongo a critica i contributi del CINQUINI allo studio dei problemi al contorno per le equazioni differenziali.

Questa risposta è esauriente e definitiva. Dopo di essa non ne darò altre al CINQUINI sull'argomento, qualunque cosa sull'argomento possa egli dire in futuro. Anzi non prenderò nemmeno in considerazione quel qualche cosa ch'egli certamente dirà nell'illusione di poter replicare efficacemente a questa mia.

## § 1.

**1.** - Nella III), il CINQUINI tenta, in modo precipuo, di respingere alcune critiche contenute nella mia Nota:

*A) Un'osservazione su un problema per le equazioni differenziali ordinarie* [5],

dedicata al problema al contorno

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \\ &y(x_1) = y(x_2) = \ldots = y(x_n) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

con $f(x, u_0, \ldots, u_{n-1})$ definita nell'insieme

$$S\colon\ a \leq x \leq b,\ |u_i| < +\infty \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

e con $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$.

Precisamente il CINQUINI, prescindendo dall'ordine con cui egli svolge gli argomenti:

1) «fa presente che anche il criterio, a cui lo SCORZA DRAGONI dedica la nota sopracitata, si può dedurre, come è ben naturale, in poche parole da un caso particolarissimo di un» suo «teorema III), citato anche dallo SCORZA DRAGONI IV)» (cioè dal caso

(5) «Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», tomo CI, parte II (1941–42), pagg. 203–212.

che la $f$ sia limitata, - i numeri in cifre romane si riferiscono a postille del CINQUINI);

2) cerca di replicare alle critiche, cui si è alluso all'inizio di questo numero.

**2.** - Le parole riportate in 1) chiudono la prefazione di III).

Ma in quella prefazione è taciuto che, in *A*), anch'io noto in modo esplicito [loc. cit. ([5]), pag. 211, Oss. II)] che il mio criterio «si riconduce facilmente al caso che $|f|$ sia limitata»!

Questa mia Oss. II) è passata sotto silenzio anche alla fine della pag. 219 di III), che si chiude con questo rilievo:

3) «... è bene ricordare che tale risultato dello SCORZA DRAGONI è *effettivamente* un'immediata conseguenza anche del teorema di BIRKHOFF e KELLOGG da noi citato in $^{\mathrm{VI}}$)»,

rilievo assolutamente banale quando si sappia che il mio criterio si riconduce al caso che la $f$ sia limitata! - per tacere del fatto che in *A*), anche a prescindere da quella Oss. II), io mi riconduco appunto al teorema di BIRKHOFF-KELLOGG citato dal CINQUINI nella postilla $^{\mathrm{VI}}$) di III); o, per essere più precisi (v. n. 28), mi riconduco a un risultato, che attribuisco a CACCIOPPOLI, e di cui sfrutto soltanto un corollario immediato, che, se si prescinde dal tipo meno generale di condizioni al contorno, in sostanza coincide appunto con quel teorema! -.

Quella mia Oss. II) è citata dal CINQUINI soltanto alla fine di III), ed in modo ambiguo e reticente.

Nel n. 2 di III), il Cinquini, dopo di aver riprodotto l'enunciato del teorema che dimostro in *A*) ([6]), dice infatti:

([6]) Nel riprodurre questo enunciato, il CINQUINI appone la seguente nota a piè di pagina:

« Nella "Posizione del problema" (n. 1, pag. 205) lo SCORZA DRAGONI suppone che in ogni porzione limitata la funzione $f$ sia in modulo minore di una funzione della sola $x$ integrabile, ma questa ipotesi, almeno per noi, è del tutto superflua, mentre lo SCORZA DRAGONI non dice, in modo esplicito, di abbandonarla ».

Verissimo, quella ipotesi è del tutto superflua. Ma è proprio sicuro il CINQUINI ch'io non l'abbia abbandonata esplicitamente? Non ha notato che nel "Criterio di risolubilità" (n. 3, pag. 207) io enuncio di nuovo tutte le ipotesi del n. 1, sopprimendo quella relativa all'essere $f$, in ogni por-

« Per la dimostrazione basta definire, con un noto artificio XXI), una funzione $g\ (x,\ y,\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ ponendo: $g = f$, ove è $|f| \leq H$

zione limitata, minore in modulo di una funzione sommabile della sola $x$ »; Ad ogni modo, dato e non concesso ch' io non mi sia accorto che quell' ipotesi, abbandonata di fatto *nell' enunciato* e nei ragionamenti svolti nel n. 3 della stessa *A*), era del tutto superflua, il Cinquini crede davvero che fosse opportuno farmi quell' appunto in quella forma? In tal caso mi sia permesso di far rilevare quanto segue.

Nel teorema II) della Memoria:

IV) *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni integro-differenziali*
[« Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo XX (1941), pagg. 257–270], Cinquini fa la seguente ipotesi «... *esistano quattro funzioni* $\alpha_j\ (x)$ $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ *non negative e integrabili sull' intervallo* $(x_0\ ,\ x_1\ )$... »

Occupandomi di questo teorema in:

*B*) *Un' osservazione su un problema al contorno per un' equazione integro-differenziale*
[« Atti del R. Istituto Veneto di Sc., Lett. ed Arti », tomo CI, parte II (1941–42), pagg. 695–710], mi sono accorto che l' ipotesi della sommabilità di $\alpha_2\ (x)$ [che corrisponde alla mia $\delta\ (x)$ della pag. 707 di *B*)] era del tutto inutile, cosa che ho fatto presente con la semplice postilla: « Sarebbe superfluo supporre $\delta\ (x)$ sommabile in $i$ », e senza far rilevare che questa condizione era stata esplicitamente posta dal Cinquini. Se mi rammento bene, anche il ragionamento del Cinquini si sarebbe potuto atteggiare in modo da riconoscere che l' ipotesi della sommabilità di $\alpha_2\ (x)$ non era essenziale [se mi rammento bene, sarebbe bastato porre, nella pag. 266 di IV):

$$\Lambda_1^*\ (x) = \alpha_0(x)\ \lambda_2^* + \alpha_1(x)\ \lambda_2^* + \alpha_2\ (x) \int_{x_0}^{x} \left\{ \left[ \beta_0\ (x,\ z) + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \beta_1\ (x,\ z) \right] \lambda_2^* + \beta_2\ (x,\ z) \right\} dz + \alpha_3\ (x),$$

in luogo di

$$\Lambda_1^*\ (x) = \alpha_0\ (x)\ \lambda_2^* + \alpha_1\ (x)\ \lambda_2^* + \alpha_2\ (x) \int_{x_0}^{x} \Lambda_2^*\ (z)\, dz + \alpha_3\ (x)];$$

ma questo è un punto su cui non val la pena di insistere. Piuttosto, porrò in rilievo che il Cinquini soltanto a proposito del caso particolare che enuncia a pag. 267 di IV), nota che in quel caso l' ipotesi della sommabilità di

$g = H$, ove è $f > H$; $g = -H$, ove è $f < -H$. Allora all'equazione $y^{(n-1)}(x) = y^{(n-1)}(x_1) + \int_{x_1}^{x} g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\, dt$ si può applicare un caso particolarissimo del nostro teorema citato in III), e in modo evidente ne segue l'asserto».

Ed ecco la postilla XXI) - la III) non avendo evidentemente alcun interesse per noi -:

«XXI) Tale artificio è indicato anche dal prof. SCORZA DRAGONI [n. 4, Osservazione II), pag. 211], ma in modo inesatto, perchè lo SCORZA DRAGONI pone: $g = f$, là dove $|f| \leq H$, $g = H$, là dove $|f| > H$».

Questa citazione è reticente ed ambigua. Essa infatti tace che cosa io mi proponga di fare in quell'Oss. II), introducendo quell'artificio. Ed è molto improbabile che il lettore di questa postilla *e delle parole ricordate in* 1) *e in* 3) possa immaginare che, in quell'Oss. II), io mi proponga appunto di far rilevare come il mio criterio si possa ricondurre al caso che la $f$ sia limitata.

**3.** - Ecco infatti il testo completo di quella mia Oss. II):

«Il teorema del n. 3 si riconduce facilmente al caso che $|f|$ sia limitata in tutto $S$. Scelto $H$ in modo che dalle (4) segua la (5), si ponga $g = f$ là dove $|f| \leq H$, $g = H$ là dove $|f| > H$. Allora se $r(x)$ è un elemento unito per la trasformazione analoga alla (1) con $g$ al posto di $f$» [cioè se $r(x)$ è una soluzione dell'attuale problema al contorno (1) con $g$ al posto di $f$] «per questo risultano soddisfatte disuguaglianze analoghe alle (6); esso è quindi unito anche per la (1)» [cioè è una soluzione anche per l'attuale problema (1)].

$\alpha_2(x)$ è inutile [vedi l'Oss. al n. 4: ivi l'ipotesi dell'integrabilità di $\alpha_2(x)$ è naturalmente sostituita con un'altra, che serve appunto a garantire sempre soddisfatta una certa condizione del teorema II) di IV), relativa alla sommabilità di certi prodotti $\alpha_2(x)\, \beta_i(x, z)$]; nel teorema III) di IV) il CINQUINI è condotto dalla pressione stessa delle cose a non supporre la sommabilità di una certa funzione $\psi_2(x)$, ma soltanto quella di certi prodotti in cui questa funzione compare [si veda anche l'oss. I al n. 5 di IV)]; ma il caso è diverso da quello prec..

L' ultima deduzione fra virgolette è, immagino, appunto quella che si nasconde sotto il « e in modo evidente ne segue l' asserto» del CINQUINI! – beninteso, ciò non vuol dire che quel tipo di deduzione compaia nella mia Oss. II) di $A$) per la prima volta –.

Un pedante potrà osservare che, in $A$), non indico esplicitamente dei criteri di risolubilità per la (1) di $A$) con la $g$ al posto della $f$. A un simile pedante risponderei che il far questo sarebbe stato un portar nottole ad Atene, specie dopo tutte le citazioni là contenute nella prefazione.

Per il seguito (v. nn. 25 e 40) ci sarà utile l' avere rilevato esplicitamente che il CINQUINI ha ammesso, in modo inequivocabile, che il « risultato dello SCORZA DRAGONI è *effettivamente* un' immediata conseguenza » di un teorema di BIRKHOFF-KELLOGG (7), esteso da SCHAUDER (8) e ritrovato indipendentemente (9) da CACCIOPPOLI (10).

**4.** – Quanto all' inesattezza, di cui nella postilla XXI), è quistione d' intendersi.

Nella mia Oss. II) di $A$) si legga: $g = f$, là dove $|f| \leq H$; $g = \frac{f}{|f|} H$, là dove $|f| > H$. Ed allora la mia inesattezza assume stranamente la stessa importanza di un errore di stampa! Ma si sarà poi trattato di un errore di stampa o di un *lapsus calami*? Vattelpesca.

(7) G. D. BIRKHOFF e O. D. KELLOGG, *Invariant points in function space* [« Transactions of the American Mathematical Society », vol. 23 (1922), pagg. 96-115].

(8) J. SCHAUDER, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen* [Mathematische Zeitschrift, vol. 26 (1927) pagg. 47–65]; *Bemerkung zu meiner Arbeit "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen,,* [*ibidem*, vol. 26, pagg. 417-431]; *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen* [« Studia Mathematica », vol. 2 (1930), pagg. 171–180].

(9) R. CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sull' esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale* [« Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », serie 6ª, vol. XI (1930), pagg. 794–799].

(10) R. CACCIOPPOLI, *Sugli elementi uniti di trasformazioni funzionali: un' osservazione sui problemi di valori ai limiti* [*ibidem*, serie 6ª, vol. XIII (1931), pagg. 498–502].

§ 2.

**5.** – Già altre volte Cinquini ha battezzato per «errori» delle mie sviste di nessuna importanza. Precisamente nei lavori ricordati in I), loc. cit. ([1]) e ([2]).

Per chiarezza, ripigliamo la questione *ab ovo.* Ecco di che si tratta.

Nella mia Nota lincea:

*C) A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per un' equazione differenziale del secondo ordine* ([11]),

mi occorreva di prolungare una funzione $\varphi(x, y, y')$, continua e limitata nell' insieme $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $-\infty < y' < +\infty$, in modo che la funzione prolungata, $\psi(x, y, y')$, risultasse continua e limitata per $x$ in $a \leq x \leq b$ ed $y, y'$ qualunque, crescente rispetto ad $y$ per $y \leq y_1(x)$ ed $y \geq y_2(x)$. Che un tale prolungamento fosse possibile era evidente. Per comodità ho preferito esplicitarne uno, ed ho posto: $\psi = \varphi$, là dove $\varphi$ era già definita, $\psi = \varphi_1$, se $y < y_1(x)$, e $\psi = \varphi_2$, se $y > y_2(x)$, con

$$(3) \qquad \varphi_i(x, y, y') = \varphi(x, y_i(x), y')\,[1 + \operatorname{tg}\mathrm{h}\,(y - y_i(x))].$$

Ora è evidente che in tal modo la funzione $\varphi_i$ risulta crescente soltanto se $\varphi(x, y_i(x), y')$ è sempre positiva. Ma è anche evidente che basta porre

$$(4) \qquad \varphi_i(x, y, y') = \varphi(x, y_i(x), y') + \operatorname{tg}\mathrm{h}\,(y - y_i(x))$$

perchè tutto vada a posto.

Il Cinquini ha richiamato l' attenzione su ciò nella prefazione di I), con le seguenti parole:

([11]) «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», serie 6ª, vol. XXII (1935), pagg. 44-48.

«La dimostrazione... data dall'A. [dimostrazione che va opportunamente corretta VI)] sfrutta un teorema...»;
ed ecco la postilla VI) (i corsivi sono del CINQUINI):

«VI) Infatti le funzioni $\varphi_1(x, y, y')$ e $\varphi_2(x, y, y')$ – contrariamente a quanto afferma l' A. – *non sono* sempre *crescenti* rispetto ad $y$, perchè la $\varphi(x, y, y')$ *non* è supposta diversa da zero».

E ci troviamo di nuovo di fronte a delle affermazioni, che non dicono affatto, a chi non vada a controllare l'originale, che si tratta di sviste inessenziali!

Perciò ho approfittato dell'occasione che mi veniva offerta dall'aver ripetuto la stessa svista nella Memoria:

*D) Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine* [12],
stampata allora allora, per farle seguire una

*Aggiunta* [13]
in cui ridavo alla quistione il suo giusto valore.

Questa *Aggiunta* si chiudeva con le parole: «Al CINQUINI evidentemente è sfuggito che nemmeno la $\varphi \neq 0$ sarebbe sufficiente per garantire la crescenza delle $\varphi_i$ rispetto ad $y$», parole che venivano riferite alla postilla VI), or ora citata.

**6.** – A queste mie osservazioni il CINQUINI ha reagito con l'*Aggiunta* ricordata in I). In essa egli afferma, tra l'altro:

«Lo SCORZA DRAGONI tiene, così, a far sapere ai suoi lettori che l'errore da Lui commesso è più grave di quello che risulterebbe dall'osservazione che io avevo fatto; e a tal riguardo nulla avrei da aggiungere...».

Ora nella mia *Aggiunta* io avevo detto in sostanza che «la forma effettiva» delle funzioni prolungate «non aveva alcun interesse», bastando che fossero soddisfatte alcune «condizioni qualitative, palesi e non implicanti, evidentemente, contraddizioni» e che avevo «preferito esplicitare il prolungamento per

(12) «Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma», serie 4ª, vol. 2 (1938), pagg. 177–215.

(13) *ibidem*, serie IV, vol. 2 (1938), pagg. 253–254.

comodità»! Non occorrono commenti. Qualunque lettore può giudicare da sè della buona fede del CINQUINI.

7. - Senza dilungarmi sulle altre anguillesche affermazioni dell' *Aggiunta* del CINQUINI (*), ricordata in I), ne riporto la fine:

(*) Aggiungo una nota a piè di pagina sulle bozze di stampa, perchè voglio evitare che il mio silenzio possa essere interpretato come un riconoscimento implicito della impossibilità di replicare efficacemente a quanto dice il CINQUINI.

Riporto quindi il resto del passo esaminato nel n. 6, dividendolo in parti, intercalate dalle mie osservazioni.

«Ma siccome l'affermazione dello SCORZA DRAGONI vorrebbe essere un appunto a me rivolto,...».

La mia osservazione non *voleva essere*, bensì *era* un appunto rivolto al CINQUINI. Quello ch'essa *voleva* era questo: fare rilevare che il CINQUINI commetteva, nell'atto stesso in cui me la rimproverava, una svista analoga alla mia.

«... debbo rilevare che i fatti la smentiscono completamente e che nulla effettivamente mi è "sfuggito", perchè, pur essendo ricorso in alcune mie dimostrazioni (vedi, per esempio, n. 1) ad un artificio analogo a quello dello SCORZA DRAGONI, l' ho fatto, a differenza da tale Autore, in modo perfettamente corretto,...».

Questo si chiama cambiar le carte in tavola. L'appunto mosso al CINQUINI si riferisce alla nota VI) a piè della pag. 2 di I) e non a quanto si trova scritto nel n. 1 di I); e basta rileggere quella nota VI), qui riprodotta nel n. 5, per riconoscere che i fatti confermano la mia affermazione.

«... come lo stesso SCORZA DRAGONI ha riconosciuto nella sua "*Aggiunta*", nella quale ha utilizzato proprio la mia costruzione per correggere i suoi errori (*sic* !)».

Il CINQUINI, nel fatto, ha anche lui bisogno di prolungare la funzione $\varphi(x, y, y')$ in modo da ottenere una nuova funzione continua, limitata, crescente in $y$ se $y \leq y_1(x)$ oppure se $y \geq y_2(x)$...; ed a questo scopo procede in sostanza come nel n. 5 del testo, ponendo però

$$\varphi_i(x, y, y') = \varphi(x, y_i(x), y') + \frac{(y - y_i(x))^2}{1 + (y - y_i(x))^2} \quad (i = 1, 2),$$

invece di far ricorso alle (4).

Certo che non ho la minima intenzione di contestare che in questo modo il CINQUINI ha rispetto a me la priorità di avere indicato esplicitamente un prolungamento effettivo di quella funzione $\varphi$, che soddisfaccia a quelle tali condizioni «palesi e non implicanti evidentemente contraddizioni».

E se io non avessi ritenuto trattarsi di banalità tali che non valesse

«Non sarà inopportuno aggiungere che allo SCORZA DRAGONI è completamente sfuggito il fatto che l'essenziale nell'errore da

davvero la pena di insistere su cose del genere, nella mia *Aggiunta* non avrei mancato di far rilevare la priorità del CINQUINI.

Ma visto che il CINQUINI ha ritenuto opportuno di osservare esplicitamente che io ho «utilizzato proprio la sua costruzione per correggere i miei errori», mi sia permesso di fare a mia volta qualche altro rilievo.

Nella sua *Aggiunta* il CINQUINI ammette dunque di aver fatto ricorso nel n. 1 di I) ad un artificio analogo al mio. Ma questo egli lo riconosce in una «*Aggiunta fatta nel novembre* 1938» [vedi loc. cit. (²), pag. 21]; mentre lo aveva taciuto nella Memoria I), già stampata nel maggio del 1938 [com'egli stesso ci fa sapere, loc. cit. (²), pag. 21].

Non sarà poi male approfondire un po' di più il contenuto di quel n. 1 di I). Quel n. 1 incomincia con le seguenti parole:

«Teorema I (dato dallo SCORZA DRAGONI: nuova dimostrazione)»; mentre questo teorema si può formulare nel modo che segue [ved. *C*), loc. cit. (¹¹)]:

*Se* $\varphi(x, y, y')$ *è continua e limitata nel cilindro* $C$: $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ $[y_1(x) \leq y_2(x)]$, $-\infty < y' < +\infty$ *e se l'equazione* $y'' = \varphi(x, y, y')$ *ha* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *come integrali in tutto* $a \leq x \leq b$, *essa ammette sempre almeno una soluzione*, $y_0(x)$, *per la quale sia* $y_0(x_0) = y_0$, $y_0(x_1) = y_1$, *se* $a \leq x_0 < x_1 \leq b$, $y_1(x_0) \leq y_0 \leq y_2(x_0)$, $y_1(x_1) \leq y_1 \leq y_2(x_1)$.

Esaminiamo dunque la linea direttiva di quella «nuova dimostrazione», prescindendo naturalmente dai dettagli, ma limitandoci ai punti essenziali, che sono i seguenti:

*a*) prolungamento della funzione $\varphi(x, y, y')$ in una funzione $\psi(x, y, y')$ continua e limitata in tutto lo strato $a \leq x \leq b$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$, coincidente con $\varphi(x, y, y')$ in $C$, crescente rispetto ad $y$ nei due insiemi $a \leq x \leq b$, $y \leq y_1(x)$, $|y'| < +\infty$ ed $a \leq x \leq b$, $y \geq y_2(x)$, $|y'| < +\infty$;

*b*) dimostrazione del fatto che il problema al contorno $y''(x) = \psi(x, y(x), y'(x))$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ ammette almeno una soluzione $z(x)$;

*c*) dimostrazione del fatto che, in virtù delle condizioni imposte a $\psi(x, y, y')$, risulta $y_1(x) \leq z(x) \leq y_2(x)$, di guisa che $z(x)$ è anche una soluzione delle $y''(x) = \varphi(x, y(x), y'(x))$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Questa è la strada che il CINQUINI segue nel n. 1 di I). Questa però è anche la strada che io avevo seguita nella mia Nota lincea del 1935. Il CINQUINI in I) cita sì la mia Nota lincea, ma soltanto per riportarne il mio teorema e per dire che la mia dimostrazione «va opportunamente corretta ... sfrutta un teorema di unicità, provato nella Nota stessa, ed è basata su un risultato ottenuto dal CACCIOPPOLI con considerazioni topologiche, che

Lui ripetutamente commesso sta appunto nel non essere verificata la disuguaglianza $\varphi \neq 0$. Infatti, se fosse $\varphi \neq 0$, si avrebbe,

parecchi anni prima avevano introdotto BIRKHOFF e KELLOGG»; e rammenta una mia Memoria, pubblicata sul «Giornale di Matematica di Battaglini», la *H*) qui citata nella nota ([25]), ed una mia Nota, pubblicata nel vol. 105 dei «Mathematische Annalen», soltanto per dire, a proposito di quest' ultima: «Rileviamo che anche lo SCORZA DRAGONI dà una dimostrazione elementare di un caso particolare del teorema sopra riportato: nell' ipotesi che la funzione $\varphi$ soddisfi alla condizione di LIPSCHITZ rispetto alle $y$ e $y'$» [cfr. I), nota $^{\mathrm{VII}}$) a piè di pag. 2]; e, sempre a proposito di quest' ultima: «in virtù di un ragionamento elementare già fatto dallo SCORZA DRAGONI» [cfr. I), n. 7, si badi bene, n. 7 non n. 1 !]. Debbono passare sei mesi prima ch' egli si decida a concedere, bontà sua, di avere utilizzato «un artificio analogo a quello dello SCORZA DRAGONI»!

Esaminiamo ora i punti *a*), *b*) e *c*).

Quanto al punto *a*), come s' è già detto, si tratta di cose che si possono palesemente fare.

Anche il punto *c*) si esaurisce facilmente, una volta prolungata la $\varphi$ in modo che $\psi$ soddisfaccia alle condizioni dette in *a*). Le dimostrazioni relative mia e del CINQUINI sono entrambe estremamente semplici {un lettore, che non vada a controllare gli originali, potrebbe forse essere condotto a credere, dal modo come il CINQUINI si esprime nella nota $^{\mathrm{VIII}}$) a piè della pag. 6 di I), che la mia non sia altrettanto semplice; nel fatto non è così, anzi le due dimostrazioni non sono concettualmente diverse, per chi sappia guardare alla sostanza delle cose; entrambe poi non sono concettualmente diverse da una data da S. BERNSTEIN in *Sur les équations du calcul des variations* [Annales Scientifiques de l' École Normale Supérieure, serie III, vol. 29 (1912), pagg. 431-485], n. 6}; la mia però è più aderente all' essenza delle cose, di guisa che essa ha permesso di applicare il procedimento dimostrativo delineato da me anche ad altri casi [cfr. per es. la mia Memoria *E*), citata nella successiva nota ([17]), § 4 e, in special modo, il n. 7].

E veniamo al punto *b*).

In *C*) io l' ho esaurito con l'applicazione di un teorema di BIRKHOFF–KELLOGG–SCHAUDER–CACCIOPPOLI [se ne vedano i lavori qui citati nelle note ([7]), ([8]), ([9]) e ([10])].

In I), invece, il CINQUINI non vuole utilizzare quel teorema, bensì vuole applicare un metodo di approssimazione dovuto a SEVERINI. Questo consiste:

*b'*) nell'approssimare la funzione $\psi(x, y, y')$ mediante funzioni $\psi_1(x, y, y')$, $\psi_2(x, y, y'), \ldots$ continue, equilimitate, lipschitziane rispetto a $y$ ed $y'$;

*b''*) nel dimostrare che il problema al contorno $y''(x) = \psi_p(x, y(x), y'(x))$, $y(x_0) = y_0, = y(x_1) = y_1$ è risolubile;

*b'''*) nel dimostrare che dalle soluzioni dei problemi approssimanti si può estrarre una successione convergente verso una soluzione del problema limite.

data la continuità della $\varphi$, o sempre $\varphi > 0$ – ed allora nessun appunto potrebbe essere fatto alla dimostrazione dello SCORZA

Questo il metodo.

Vediamo ora che difficoltà si potevano presentare nell'applicazione fattane dal CINQUINI al caso concreto in esame.

Intanto è evidente che il punto $b'$) non poteva presentarne, allo stato attuale dell'Analisi.

Allo stesso modo, lo sviluppo del procedimento delineato in $b'''$) non rappresentava attualmente nulla di più di un facile esercizio, anzi di una facile applicazione di procedimenti noti.

L'ultima, anzi l'unica difficoltà poteva quindi annidarsi nella dimostrazione del fatto enunciato in $b''$). Ora una simile dimostrazione non era difficile. Ma anche concesso che lo fosse stata, vi è sempre da rilevare che una dimostrazione del fatto accennato in $b''$) si trova già, p. es., nella mia Tesi di Laurea [Memoria $H$), citata qui in ( [5]) e in I) in [IV]), n. 12] e che il CINQUINI esaurisce il punto $b''$) «proprio» facendo ricorso allo stesso ragionamento usato ivi da me.

Con ciò io non intendo fare una rivendicazione di priorità: il ragionamento che ho utilizzato nel n. 12 di $H$), si trova anche sfruttato, p. es., nel passo di GRONWALL, citato nella successiva nota ([25]) e di cui non ero a conoscenza quand'io scrissi la mia Tesi di Laurea. Quello che io intendo è soltanto di far rilevare che, alla resa dei conti, nella dimostrazione che il CINQUINI battezza per «nuova» (dopo di aver detto che la mia aveva bisogno di essere «opportunamente corretta») di concettualmente nuovo non vi è nulla.

Non so poi se per il CINQUINI questo fosse implicito nel seguente periodo, tolto dalla prefazione di I): «Nel presente lavoro mi propongo... di dare una dimostrazione di carattere elementare [VII]) del teorema sopra citato dello SCORZA DRAGONI, riprendendo, con opportuni accorgimenti, il metodo del SEVERINI che si basa sulla considerazione di equazioni differenziali il cui secondo membro approssima il secondo membro della (I) ed è lipschitziano...: ciò permette di condurre la dimostrazione in modo da non aver bisogno di ricorrere al criterio di BIRKHOFF e KELLOGG..., sull'esistenza di un elemento unito in una trasformazione funzionale».

Il passo in esame dell'*Aggiunta* del CINQUINI si chiude con un:

«È vero che in tale costruzione, in luogo di una semplice funzione razionale da me usata, Egli ha preferito adoperare una trascendente, ma questo dipende soltanto dalla diversità delle nostre tendenze».

Basterebbe far rilevare che io ho fatto uso di una trascendente elementare, la tangente iperbolica, in un ordine di idee nel quale debbono essere familiari nozioni un po' più elevate di quella del numero $e$ o della funzione esponenziale, per coprire di ridicolo quanto dice il CINQUINI. Ma non ne vale la pena. Il prendere sul serio roba del genere sarebbe troppo poco serio.

Dragoni – o sempre $\varphi < 0$ ed allora sarebbe bastato il semplice cambiamento del segno più nel segno meno davanti alla funzione tg h, perchè, nella Nota lincea, tutto procedesse regolarmente!».

In queste righe si trovano:

α) *uno svisamento della questione*,

perchè il problema, di fronte al quale ci si trovava nella mia Nota lincea, non era di prolungare la funzione $\varphi$, mediante funzioni del tipo

$$(5) \qquad \varphi\,(x, y_1(x), y') \;\; [1 + \chi\,(y - y_1(x))],$$

in modo da farla risultare continua, ecc...; bensì quello di prolungare la funzione $\varphi$ in modo da farla risultare continua, ecc...

β) *un' affermazione gratuita*,

quella che io non mi sarei accorto «che l'essenziale nell'errore da» me «ripetutamente commesso» starebbe «appunto ecc...»: ed infatti, appunto per quanto è detto in α), io non ero affatto tenuto a rendere pubbliche delle osservazioni ridicole su quello che si poteva ottenere giocherellando con delle funzioni del tipo (5);

γ) *una contraddizione con tutto il tono dell' Aggiunta del* Cinquini,

perchè il passare dalle (3) alle (4) è altrettanto semplice che il passare dalle (3) alle

$$(6) \qquad \varphi_1\,(x, y, y') = \varphi\,(x, y_1(x), y') \;\; [1 - \mathrm{tg\,h}\,(y - y_1(x))];$$

δ) *di nuovo una svista analoga a quella che mi viene attribuita (gratuitamente, stavolta)*,

infatti, se ci permettiamo di ricorrere sia alle (3) che alle (6), non è più essenziale che sia sempre $\varphi \neq 0$, come vuole il Cinquini; basta che sia sempre $\varphi\,(x, y_1(x), y') \neq 0$, $\varphi\,(x, y_2(x), y') \neq 0$. Vorrà dire che, se $\varphi\,(x, y_1(x), y')$ e $\varphi\,(x, y_2(x), y')$ sono di segno contrario, si dovrà sostituire una conveniente delle (3) con una conveniente delle (6).

Domando scusa al lettore, se per rispondere al Cinquini sono costretto a scendere a considerazioni così banali.

## § 3.

**8.** – Riprendiamo in esame la Nota III); ci rimane a considerare il punto 2), di cui al n. 1 della Memoria presente.

Le osservazioni che CINQUINI tenta di respingere sono:

4) una mirante a fissare i termini di una situazione di fatto, creatasi in seguito ad una lacuna essenziale presentata da un suo ragionamento, svolto in

V) *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie d' ordine n* ([14]);

e:

5) una riguardante la dipendenza di un suo teorema [loc. cit. ([14]), n. 1] da un teorema d' analisi funzionale.

**9.** – L' osservazione, di cui in 4), si trova esposta in una postilla a piè di pag. 204 del lavoro *A*), citato in ([5]), qui riprodotta nel n. 19.

A proposito della quale postilla si può fare subito un' osservazione d' indole generale.

([14]) « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. IX (1940), pagg. 61–77.

La lacuna, cui si allude nel testo, si trova nella nota x) di V), a piè delle pag. 66–67, nel tentativo di estendere « un noto ragionamento di carattere elementare » [V), pag. 66]; ed è stata rilevata da C. MIRANDA [vedi la recensione di V), pubblicata nel « Zentralblatt für Mathematik », vol. 22 (1940), pag. 339]. Essa consiste essenzialmente nell' ammettere che una funzione $\varphi(x)$ [sulla cui continuità non si può dire nulla], definita in $a \leq x \leq b$, negativa in $a$ e positiva in $b$, si annulli in un punto compreso fra $a$ e $b$.

Il ragionamento di cui il CINQUINI fa uso nella nota x) di V), era stato già sfruttato da G. Zw[illegible] in:

*a) Su un problema ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine*

[« Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti » tomo XCVIII, parte II (1938–39), pagg. 69–78; Nota presentata il 20 novembre 1938 e licenziata per le stampe il 3 marzo 1939], però ZWIRNER lo applica in maniera ineccepibile, perchè nelle sue ipotesi egli riesce a dimostrare (loc. cit., n. 6) la continuità della sua funzione $\varphi(x)$.

Essa è una *mise au point* di dati di fatto. È redatta in modo da sintetizzare la situazione del momento, facendo gravare la mano meno di quello ch' era possibile fare. Quindi essa sarà sempre inattaccabile, adesso e nel futuro, qualunque possa essere la situazione attuale o futura.

Nella fattispecie si può osservare che il Cinquini, per porre fuori discussione un' affermazione di fatto, ch' egli aveva *dichiarato di ritenere nota*, ha finito col *farsela dimostrare* dal Brusotti ([15]).

**10.** - Per poter procedere con chiarezza, è bene ora entrare in qualche dettaglio ulteriore.

Lo studio del problema di Nicoletti per un' equazione o un sistema di equazioni differenziali ordinarie di tipo normale si può ricondurre alla risoluzione di un sistema del tipo

$$\Phi_j(x_1, \ldots, x_q) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, q), \tag{7}$$

e sostanzialmente al

Teorema I) - *Il sistema* (7) *ammette soluzioni nel rettangolo q - dimensionale* $R_q$: $a_1 \leq x_1 \leq b_1, \ldots, a_q \leq x_q \leq b_q$ $(a_j < b_j)$, *se le* $\Phi_j$ *sono continue ivi e soddisfanno alle*

$$\begin{aligned} &\Phi_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_q) < 0, \\ &\Phi_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, \ldots, x_q) > 0, \end{aligned} \tag{8}$$

*sulle faccie di* $R_q$.

**11.** - Rimandando ai numeri successivi chiarimenti ulteriori in proposito, possiamo ora dire qualcosa di più preciso, circa l' errore commesso dal Cinquini nella X) di V), cui si è già alluso nel n. 8 e nella nota ([14]) di questa Memoria.

([15]) L. Brusotti, *Dimostrazione di un lemma algebrico utile in questioni d' analisi* [« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. XI (1942), pagg. 211–215].

Esso consiste in sostanza nel credere che il sistema (7) si possa risolvere applicando con molta faciloneria un procedimento di eliminazione delle variabili.

Infatti, supposto per semplicità $q = 2$, il CINQUINI ragionerebbe come segue. Nelle ipotesi poste, per ogni $x_1 \geq a_1$ e $\leq b_1$ esiste (*almeno*) un valore di $x_2$, diciamolo $\lambda(x_1)$, tale che $\Phi_2(x_1, \lambda(x_1)) = 0$. Poichè $\Phi_1(a_1, \lambda(a_1)) < 0$, $\Phi_1(b_1, \lambda(b_1)) > 0$, esiste un $x_1^0$ tale che $\Phi_1(x_1^0, \lambda_1(x_1^0)) = 0$; quindi ecc.. Ora l'esistenza di $x_1^0$ non è certa, poichè $\lambda(x_1)$ potrebbe anche essere discontinua.

Guardando le cose da un punto di vista geometrico, l'errore appare ancora più evidente. Esso consiste nel credere che il luogo $\Phi_2(x_1, x_2) = 0$ contenga una curva continua, rappresentabile (cartesianamente, cioè) mediante un'equazione del tipo $x_2 = \lambda(x_1)$, per $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ (e quindi capace di dividere il rettangolo $R_2$ in due parti). Ora una pretesa del genere è inammissibile, anche se il luogo $\Phi_2(x_1, x_2) = 0$ è una curva di JORDAN.

La deduzione è invece esatta, se per ogni $x_1$ di $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, esiste un *solo* valore di $x_2$ che verifichi la $\Phi_2(x_1, x_2) = 0$, perchè allora quella tal funzione $\lambda(x_1)$ risulta automaticamente (determinata in modo unico e) continua; quel tal luogo si riduce ad una curva continua, suscettibile di una rappresentazione cartesiana, ecc. E nel lavoro *a*) di ZWIRNER, citato in ([14]), si verificava appunto una circostanza del genere; epperò in quel lavoro ZWIRNER ha potuto applicare il procedimento di eliminazione in modo ineccepibile [vedremo nella successiva nota ([30]) che per $q = 2$ il teorema I) si può dimostrare facilmente facendo vedere che il luogo $\Phi_2(x_1, x_2) = 0$ contiene un continuo che congiunge i due lati $x_1 = a_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$; $x_1 = b_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ di $R_2$].

**12.** – Questa è la sostanza dell'errore commesso dal CINQUINI, una volta liberatolo dalle sovrastrutture inerenti alla particolare applicazione del teorema I) ch'egli fa in V).

Egli invece, nelle pagg. 217-218 della Nota III), parla di quella lacuna tenendo conto di quelle sovrastrutture e dice perciò (le postille con cifre romane corrispondono a note a piè di pag. apposte dal CINQUINI, e prive di interesse per la quistione di cui si tratta):

nel lavoro V) «... al solo scopo di non usufruire di un risultato stabilito da BIRKHOFF e KELLOGG VI) mediante considerazioni di analisi funzionale, abbiamo accennato sommariamente in una nota a piè di pagina VII)» [lunga circa una pagina, nella quale il caso del problema (1) per $n = 4$ è trattato con abbondanza di dettagli, e non per cenni sommari!] «in qual modo si possa estendere ai problemi in questione il noto ragionamento elementare con cui si stabilisce, in condizioni particolarmente semplici, l'esistenza di almeno un integrale di un'equazione differenziale del secondo ordine congiungente due punti prefissati.

Come abbiamo già avuto occasione di rilevare VIII), ([16]), il contenuto di tale nota a piè di pagina, il quale è apparso incompleto IX),» [e qui il CINQUINI cita la recensione del MIRANDA, ricordata in ([14])] «si illumina completamente tenendo presente un'osservazione sugli zeri comuni a $q$ funzioni continue di $q$ variabili. Questa nostra osservazione, che avevamo comunicata a C. MIRANDA, il quale X) l'ha trovata equivalente al noto teorema di BROUWER» sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni continue di $R_q$ in sue porzioni, «può senz'altro enunciarsi nei seguenti termini...»;
e qui il CINQUINI enuncia il teorema I), e poi continua (i corsivi essendo suoi):

«Abbiamo inoltre rilevato XII) che *tale nostra osservazione è un'immediata conseguenza del caso particolare in cui le* $\Phi_j$ $(j = 1, \dots, q)$ *siano funzioni razionali intere*, caso nel quale ritenevamo la nostra affermazione come già nota».

**13.** - Circa il primo alinea del CINQUINI, riportato nel n. prec., osservo quanto segue.

Intanto è verissimo che se si sfrutta il teorema di BIRKHOFF e KELLOGG è possibile evitare l'insidia in cui il CINQUINI è caduto

([16]) Qui CINQUINI allude al n. 8 della sua conferenza:
VI) *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie* [« Rendiconti del Seminario Matematico e fisico di Milano », vol. XIV (1940), pag. 157-170].

nel lavoro V). La cosa è evidente per chi abbia una certa conoscenza di queste teorie [17].

Ma non è meno vero che l'unica difficoltà, da superare nell'ordine di idee che il CINQUINI seguiva in V), poteva eventualmente presentarsi soltanto nell'evitare il teorema di BIRKHOFF e KELLOGG!

So bene che nella prefazione del lavoro V) il CINQUINI dice invece:

«voglio ora mostrare in qual modo il metodo già seguito» in I) e VII), loc. cit. [1] e [18], «che si basa sulla considerazione di equazioni ausiliarie ... con secondo membro continuo e ... lipschitziano» rispetto alle variabili diverse dalle $x$, «possa riuscire altrettanto utile, quando sia *opportunamente modificato e generalizzato*, per» studiare il problema (1);

«il procedimento seguito nella dimostrazione del primo teorema della presente Memoria generalizza uno dei metodi già seguiti, per $n = 2$» in I) e VII) «utilizzando ancora, *in modo opportuno*, la classica successione dei polinomi di STIELTJES, ...»;

«per stabilire il secondo teorema, siccome l'uso dei polinomi di STIELTJES non sarebbe stato altrettanto efficace, abbiamo ricorso ad un altro metodo di approssimazione, il quale si giova

(17) Pel CINQUINI sarebbe bastato sapere che il problema (1) è risolubile, se $|f(x, u_0, ..., u_{n-1})|$ risulta minore in $S$ di una funzione della sola $x$, sommabile in $I$: $a \leq x \leq b$.

E sfruttando le considerazioni di analisi funzionale introdotte nei lavori citati in [7], [8], [9] e [10] è appunto facile rispondere alla questione. Per uno sviluppo delle deduzioni relative nel caso $n = 2$, si veda il mio lavoro

*E) Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti*,

[«Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Roma», serie IV, vol. 2 (1938), pagg. 255-275], § 3. Pel caso del problema (1), si veda, per es., il n. 34 del lavoro presente.

(18) Si allude al seguente lavoro di CINQUINI:

VII) *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine*

[«Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa», serie II, vol. VIII (1939), pagg. 271-283].

Avverto infine che il carattere corsivo dei passi che seguono è usato qui, non negli originali.

di una classe di funzioni ... introdotta da TONELLI nelle sue ricerche sulla quadratura delle superficie. Peraltro, l' uso di tale classe di funzioni *non viene fatto immediatamente, ma è subordinato ad un' operazione preliminare*, in virtù della quale la successione di funzioni $f_m$, con le quali, in definitiva, viene approssimata la funzione $f$, soddisfa alla disuguaglianza $|f_m| \leq |f|$. Questa seconda dimostrazione *mette in luce il fatto che*, per quanto le nostre ricerche non vengano mai meno al loro carattere estremamente elementare e traggano il loro spunto dalle ben note ricerche del SEVERINI, *il metodo seguito si rinnova in ogni singolo caso, utilizzando nuovi originali procedimenti approssimativi che si presentano particolarmente efficaci* »;
so bene che in un altro suo lavoro CINQUINI dice (19), a proposito di una questione analoga:

« pongo in evidenza che *una delle difficoltà da superare* nei procedimenti già seguiti è costituita dal fatto che le funzioni $f_m$ con cui si approssima la $f$ debbono verificare una disuguaglianza analoga a quella cui soddisfa la $f$ »;
so bene tutto questo. Ma sta di fatto che già a quell' epoca, l' unica difficoltà che si poteva eventualmente incontrare nello stabilire i teoremi di V) era quella di stabilirli evitando il teorema di BIRKHOFF e KELLOGG, o i teoremi derivati.

Infatti il CINQUINI nella V) dimostra prima che, nelle sue ipotesi, le eventuali soluzioni delle (1) e le loro derivate prime, seconde, ... $(n-1)$ - esime sono limitate: e in quelle ipotesi la cosa era abbastanza evidente per chi conosceva quanto a quell' epoca si sapeva già sulle equazioni del secondo ordine.

Giunti a questo punto basta applicare l' artificio usato da ZWIRNER in:

*b) Sopra un teorema sulle equazioni differenziali del secondo ordine* (20),

(19) Nella Nota:
VIII) *Un' osservazione sopra i problemi di valori al contorno per l' equazione* $y'' = f(x, y, y')$,
[« Boll. dell' Unione mat. it. », serie II, vol. II (1939-40), pagg. 322-325], a piè di pag. 323.

(20) « Rendiconti del Seminario matematico di Padova », vol. X (1939), pag. 65-68.

il quale artificio permette di ricondurre con sorprendente semplicità i teoremi considerati in V), a proposito del problema (1), al caso che la $f$ sia in modulo minore in tutto $S$ di una conveniente funzione della sola $x$, $\mu(x)$, sommabile in $I$: $a \leq x \leq b$ ([21]). Ed *approssimare una tal f mediante funzioni* $g_m$, *minori in modulo della* $\mu(x)$, *misurabili rispetto ad* $x$, *continue e lipschitziane in senso generalizzato rispetto ad* $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ *ecc... è cosa talmente semplice che non val la pena di insistervi* [comunque si veda la nota ([62])].

Tutto è quindi ricondotto a risolvere il problema (1) per le $y^{(n)} = g_m$, perchè poi da queste si risale facilmente alla $y^{(n)} = f$, applicando il metodo del Severini e il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Tutto è ricondotto a quel punto, ma è qui che al Cinquini è venuta meno la possa: o, per meglio dire, che il Cinquini ha pensato, in sostanza, di risolvere il sistema (7), nelle ipotesi del teorema I), applicando un procedimento di eliminazione, buono se le (7) fossero state lineari o giù di lì.

**14.** - Osserviamo incidentalmente, che dalla rapida esposizione fatta nel n. 13 si trae in particolare che, allo stato attuale dei problemi finora presi in esame, non è *affatto necessario rinnovare in ogni singolo caso il metodo di* Severini, *utilizzando nuovi originali procedimenti approssimativi.* Il procedimento d'approssimazione può essere sempre quello accennato verso la fine del n. 13, e tutte le difficoltà incontrate dal Cinquini, e dal Cinquini poste in rilievo con abbondanza di dettagli, si dissolvono ([22]).

([21]) L'artifizio consiste in sostanza nell'introdurre una $g(x, u_0, \ldots, u_{n-1})$ ponendo: $g = f$, là dove $|f| \leq \mu(x)$; $g = \mu$, là dove $f > \mu$; $g = -\mu$, là dove $f < -\mu$. Con ciò la $g$ soddisfa senz'altro a disuguaglianze analoghe a quelle verificate dalla $f$, ecc.

Un artifizio analogo era stato sfruttato da me nel n. 9 della Memoria *E*) citata in ([17]).

Il lettore avrà riconosciuto l'artifizio ricordato nel n. 2.

([22]) Non sarà inopportuno aggiungere che la Nota VIII) del Cinquini, citata in ([19]), [dalla quale abbiamo tolto quel periodo:

L' utilità dell' artificio usato da ZWIRNER nel lavoro $b$), citato in ([20]), è stata peraltro riconosciuta anche dal CINQUINI in IV)

« pongo in evidenza che una delle difficoltà da superare nei procedimenti già seguiti è costituita dal fatto che le funzioni $f_m$ $(x, y, y)$ con cui si approssima la $f$ $(x, y, y')$ debbono verificare una disuguaglianza analoga a quella cui soddisfa la $f$ ... »
ricordato nel n. 13, ] si riferisce alla mia Nota :

$F$) *A proposito di un teorema sulle equazioni differenziali ordinarie* [ Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova », vol. X (1939), pagg. 90–100 ].

Orbene, per l' appunto a pag. 95 della mia Nota $F$) è sfruttato l' artifizio dello ZWIRNER proprio per approssimare, senza difficoltà di sorta, la mia funzione $f$ mediante una successione di funzioni (ch' io chiamo $g_m$) soddisfacenti ad una disuguaglianza analoga a quella verificata dalla $f$ ! – vero si è che io conduco la dimostrazione in modo da non aver bisogno di supporre le $g_m$ lipschitziane.

È visto che ci siamo, parliamo un poco di questa Noticina VIII).

Essa si apre con :

« Un lavoro di G. SCORZA DRAGONI », [ la Nota $F$)] « apparso in questi giorni, ha per oggetto un complemento ad un mio recente teorema »: il teorema II), n. 2, della Nota VII) citata in ([18]).

Ma è del pari vero che quel teorema II) di VII) ha per oggetto un complemento ad un teorema, dato da me nel § 4 della Memoria $E$) citata in ([17]) e da me esteso nella Nota :

$G$) *Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti*
[ « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », serie 6, vol. XXVIII (1938), pagg. 317–325 ] — riconoscendo così esatta una presunzione avanzata nella nota ([23]) a piè di pag. 271 di $E$) —; e che questo complemento, o meglio la possibilità di ottenere complementi, analoghi a quello effettivamente ottenuto dal CINQUINI, è chiaramente espressa nel n. 11 di $E$) ed è ripetuta nella chiusa dell' introduzione di $G$), con la dichiarazione ch' io non intendevo occuparmene perchè non doveva essere cosa difficile a farsi !

A pag. 323 di VIII) dopo di avere rienunciato il teorema II) del n. 2 di VII), il CINQUINI dice :

« Nel lavoro » $F$) « citato, lo SCORZA DRAGONI si occupa del caso in cui si può sopprimere l' ipotesi $|u| \leq k\,\varphi\,(u)$, e dimostra che, se è in tutto $(a, b)$ $\psi_1(x) \equiv 0$, tale condizione è superflua. Nelle seguenti righe (n. 1) desidero mostrare che tale risultato si deduce rapidissimamente dalla dimostrazione stessa del mio teorema sopra riportato con un' osservazione molto semplice, ma che può essere utile anche in altri casi [v]) » [ e qui, nella nota [v]) gli scappa quel « pongo in evidenza che una delle difficoltà ... » ] « si ha così una nuova dimostrazione del teorema dello SCORZA DRAGONI, la quale, [loc. cit. (6), pagg. 258-259]: ivi infatti egli ammette che «a differenza da quanto» egli aveva «fatto nei... precedenti lavori

oltre ad essere ottenuta con il mio solito procedimento elementare, offre, in confronto a quella dell' Autore citato, il vantaggio di non richiedere il prolungamento della funzione $f(x, y, y')$, per $y < y_1(x)$ e per $y > y_2(x)$» ; ma in $F$) non mi occupo soltanto del caso in cui si possa sopprimere l'ipotesi $|u| \leq k\varphi(u)$, ma ridimostro tutto il teorema II) del n. 2 di VII) [come affermo esplicitamente nelle ultime due righe della prefazione di $F$)], con procedimenti e ragionamenti a proposito dei quali dico [Nota $F$), pag. 94]:

«Il procedimento che seguo non lascia nulla a desiderare dal punto di vista della semplicità V)» [ed ecco la nota V): «Specie dopo la dimostrazione estremamente elementare che ZWIRNER ha dato di un mio teorema... fondamentale per il procedimento...»] «I ragionamenti nella loro sostanza coincidono con quelli che ho svolti nei miei lavori» $E$) e $G$).

Nella Nota $F$) io prolungo effettivamente la $f(x, y, y')$ per $y < y_1(x)$ e per $y > y_2(x)$, ma che il non farlo rappresenti un vantaggio è una affermazione gratuita del CINQUINI [anche nei riguardi del teorema del n. 2 di VIII)].

Anzi adesso al lettore può venire un sospetto :

Il CINQUINI, per fruire di quel vantaggio, non si sarà messo, nel redigere la VII), su una strada, che lo portava a dover realmente incontrare delle difficoltà per costruire delle funzioni $f_m$, soddisfacenti ad una certa condizione di LIPSCHITZ, ed astrette ad approssimare la $f$ e a soddisfare contemporaneamente ad una disuguaglianza analoga a quella verificata dalla $f$?

Ma non è necessario approfondire qui questo punto. Per quello che stiamo dicendo, la cosa non ha interesse. Quelle difficoltà si dissipano, per incanto, quando questi problemi si guardano [cfr. la mia $F$)] da quello che è il punto di vista che loro spetta. E tanto basta a noi.

Il CINQUINI tutt'al più potrebbe osservare che in $E$) io non ho esaurito subito la questione con la stessa generalità con cui la tratto poi in $G$). Verissimo: ma già in $E$), nella nota a piè di pag. 271, dissi che non ritenevo essenziale una certa ipotesi; e in $G$) dissi che non mi era stato difficile eliminarla.

Un'ultima cosa : nel riguardare le Note VII) e VIII), mi è venuto fatto di osservare quanto segue :

Nella nota XV) a piè di pag. 283 della VII) [sulla quale avremo occasione di tornare nella successiva nota (62)] il CINQUINI dice fra l'altro :

«... Inoltre (per quanto la dimostrazione dello ZWIRNER presenti alcune varianti rispetto a quella del n. 1 del presente lavoro, nella quale io mi sono attenuto al metodo seguito nel § 1 della mia precedente Memoria,» [cioè la I), loc. cit. (1)] «lo ZWIRNER ha utilizzato proprio il procedimento (opportunamente semplificato) di approssimazione che io avevo seguito, in condizioni diverse, nel § 2 della stessa mia Memoria, *e che ho ripreso nel* e *per brevità»* [il corsivo è mio] due certe proposizioni [analoghe ai teoremi di V), ma relative ad un' equazione integro-differenziale] «non vengono dimostrate in modo diretto, ma vengono dedotte... facendo uso di un artificio recentemente introdotto da G. ZWIRNER per le equazioni differenziali» [e qui CINQUINI cita il lavoro *b*)] e che egli «estende (*sic*!)» al caso là considerato; ed il riconoscimento è ripetuto dal CINQUINI in:

IX) *Sopra i problemi di valori al contorno per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie* ([23]),

*n.* 2 *del presente lavoro, con opportune varianti per superare nuove e maggiori difficoltà»* [ il corsivo è mio ] ;
— ed il CINQUINI è stato talmente impressionato dall' idea di queste «nuove e maggiori difficoltà» da ritenere opportuno di porle di nuovo in evidenza appunto nella nota [V]) della VIII), riprodotta per intero nel n. 13 di questa mia —.

Ma allora, perchè nella prefazione di VII), parlando e di quel tale procedimento del § 2 della I), con riferimento all' uso che ne farà nel n. 2 della VII) e di quell' altro tenuto nel § 1 della stessa I), egli dice «ambedue questi procedimenti sono *immediatamente applicabili alle nuove condizioni dello* SCORZA DRAGONI, *come mostrerò nelle pagine che seguono»*, [anche questo corsivo è mio ] «utilizzando il primo di essi per provare una proposizione più generale del primo teorema dello SCORZA DRAGONI, a cui ho sopra accennato, e l' altro per stabilire un' altra proposizione» [quella del n. 2 di VII), di cui si è discorso] «anch' essa più generale del secondo teorema del citato Autore»?

Ed il CINQUINI non ci venga a raccontare ora che quei tali procedimenti si applicano sì *immediatamente* nel caso delle mie condizioni, e che le *nuove e maggiori difficoltà* si incontrano soltanto quando si dànno quelle proposizioni più generali. Egli sa che basta esaminare i nn. 2 e 3 della sua VII), per accorgersi che questo non è sostenibile [anche senza tener conto del fatto che fin dal n. 11 di *E*) io avevo già considerato esplicitamente condizioni analoghe (analoghe, non identiche) a quelle ch' egli considera nel n. 2 di VII) ]. Egli sa che la risposta da dare a quella domanda è un' altra: nella prefazione di VII) bisognava dare addosso a me, nella nota [XV]) di VII) bisognava dare addosso ad un mio scolaro. Ed il CINQUINI non si è accorto che, a voler calcare la mano contro tutti e due, ci scappava fuori una contraddizione.

Circa il teorema che il CINQUINI dà nel n. 1 della VII), si veda la successiva nota ([24]) ; circa la nota [XV]) di VII), si veda anche la successiva nota ([3]), già ricordata.

([23]) «Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere» vol. LXXV (1941 42), pagg. 195-210.

dov' è detto, a pag. 196: «la proposizione in questione viene dedotta *in modo molto rapido*» [anche questo corsivo è mio] «dal precedente teorema, usufruendo di un artificio usato da G. ZWIRNER per il caso di una sola equazione differenziale» in *b*) «e che viene qui esteso (*sic*!) ai sistemi di tali equazioni».

A favore del CINQUINI si può osservare che quando egli ha scritto la Memoria V), il lavoro *b*) di ZWIRNER forse non era ancora uscito. Non so se le cose stiano proprio così. Ma in ogni caso resta che l'unica difficoltà da superare in V) poteva al massimo essere quella che si è detta, cioè quella di evitare il teorema di BIRKHOFF–KELLOGG–SCHAUDER–CACCIOPPOLI.

**15.** – Si potrebbe obbiettare che ad una visione così limpida del procedimento delineato nel n. 13 ci si è giunti soltanto adesso, dopo la Memoria V) del CINQUINI.

Ora il procedimento delineato nel n. 13 è proprio quello che ZWIRNER ha tenuto nella Nota:

*c*) *Problemi al contorno per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine: teoremi di esistenza e di unicità* ([24]), per dare relativamente al caso $n = 3$ teoremi analoghi a quelli dati da CINQUINI in V), e questa Nota è stata redatta da ZWIRNER pressapoco nel periodo di tempo in cui CINQUINI scriveva la V).

Il lettore che rammenti quello che si è detto all' inizio del n. 13 si domanderà naturalmente: e lo ZWIRNER evita o non evita il teorema di BIRKHOFF-KELLOGG nel dimostrare i teoremi di *c*)?

Ecco: ZWIRNER evita il teorema di BIRKHOFF-KELLOGG, poichè egli risolve il problema (1) [per $n = 3$, e per $|f| \leq \mu(x)$, ecc...], riportandosi al teorema I) [per $q = 2$]; e questa volta non in condizioni da poter ricorrere ad una eliminazione di variabili come ha fatto in *a*), loc. cit. ([14]), ma utilizzando, sia pure se non enunciandolo esplicitamente, il teorema I) per $q = 2$!

([24]) «Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», vol. XCIX (1939–1940), parte II, pag. 263–275.

Per quella che potrebbe essere la visione attuale della quistione, si veda procedimento dello STAMPACCHIA, delineato nella successiva nota ([67]).

Ma allora l' osservazione che il problema di NICOLETTI per le equazioni (oppure per i sistemi di equazioni) differenziali ordinarie, ecc... si può ricondurre al teorema I) è del CINQUINI, come apparirebbe dai periodi di questi riportati nel n. 12, o il CINQUINI è stato sostanzialmente preceduto?

Il lettore legga quanto dirò nei numeri seguenti a proposito del secondo degli alinea del CINQUINI riportati nel n. 12, e dia la risposta che gli sembrerà più giusta.

**16.** – Passiamo dunque a questo secondo alinea. E rifacciamo la storia del come il problema di NICOLETTI è stato ricondotto al teorema I).

Nel caso di un problema, diciamo, unidimensionale [il problema (1) per $n = 2$], questa riduzione è abbastanza semplice e si trova, p. es., nella mia Tesi di Laurea:

*H) Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gl' integrali di un' equazione differenziale del secondo ordine* ([25]);

in questo caso ci si riporta al teorema I), per $q = 1$, e la riduzione è appunto quel noto ragionamento elementare, cui il CINQUINI allude nei passi riportati nel n. 12.

Nel caso di un problema, diciamo, bidimensionale, ZWIRNER, dopo di avere evitato nel lavoro *a*) citato in ([14]) l' insidia in cui è caduto il CINQUINI nella Memoria V), nella Nota:

*d) Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del quarto ordine* ([26]),

più vecchia ancora della *c*), tratta appunto un problema al contorno per un' equazione del quarto ordine riconducendolo al teorema I) per $q = 2$ ([27]). In questa Nota ZWIRNER dimostra il teo-

([25]) «Giornale di matematiche di Battaglini», vol. 69 (1931), pagg. 77–112; n. 12.

Ma si veda anche: T. H. GRONWALL, *On the existence and properties of the solutions of a certain equation of the second order* [«Annals of Mathematics», serie II, vol. 28 (1927), pagg. 355-364], n. 4.

([26]) «Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Padova», vol. IX (1938), pagg. 150–155.

([27]) Si rammenti che a pag. 153 di *c*), ZWIRNER dice: «... gli archi $\gamma_1'$, $\gamma_2'$, $\gamma_3'$, $\gamma_4'$ sono contenuti rispettivamente nell' *interno* dei rettangoli... »;

rema I) [sempre senza enunciarlo esplicitamente], supponendo $q = 2$ e ricorrendo alla nozione di ordine di un punto rispetto ad una curva e dice, a piè di pag. 151:

«Il procedimento non sembra legato al carattere bidimensionale del problema» [al contorno considerato] «a patto di ricorrere alla nozione di ordine di un punto rispetto ad una varietà».

Ora nella Nota *d*), ZWIRNER sfrutta la nozione di ordine di un punto rispetto ad una curva soltanto per dimostrare il teorema I) nel caso $q = 2$ (sia pure senza enunciarlo, l'enunciato esplicito non occorreva); sicchè, nell'estensione cui lo ZWIRNER accenna in queste righe, l'uso della nozione di ordine di un punto rispetto ad una varietà non può essere invocata altro che per dimostrare il teorema I) nell'ipotesi di $q$ qualunque. Non mi sembrerebbe quindi di dire cosa senza fondamento, se affermassi che ZWIRNER allora sapeva già che il problema di NICOLETTI si poteva ricondurre al teorema I). Ma anche senza arrivare tanto in là, resta il fatto ch'egli ha osservato esplicitamente questa possibilità in un caso particolare ed ha accennato ad una strada

e questa frase equivale appunto a dire che per un certo sistema quale il (7), con $q = 2$, sono soddisfatte disuguaglianze quali le (8).

Più generalmente, è facile riconoscere che il teorema I) equivale alla seguente proposizione:

*Il centro di $R_q$ è interno a ogni insieme $\Gamma$ ottenuto deformando $R_q$ con continuità, in modo che le faccie di $R_q$ contenute negli iperpiani $x_j = a_j$, $x_j = b_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ si trasformino in insiemi rispettivamente interni ai semispazi $x_j \leq \frac{a_j + b_j}{2}$, $x_j \geq \frac{a_j + b_j}{2}$ (oppure in insiemi rispettivamente interni ai semispazi $x_j \geq \frac{a_j + b_j}{2}$, $x_j \leq \frac{a_j + b_j}{2}$;* caso che si riconduce al precedente a mezzo di una simmetria rispetto al centro di $R_q$ ).

E questo teorema lo si può dimostrare con quello stesso ragionamento, di cui L. E. J. BROUWER si è servito in *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl* [«Mathematische Annalen», vol. 70 (1911), pagg. 161-166, § 1] per riconoscere che: *il centro di $R_q$ sarebbe interno a $\Gamma$, se $R_q$ fosse un cubo e se la deformazione continua di $R_q$ in $\Gamma$ spostasse ogni punto di $R_q$ di una quantità minore del semilato di $R_q$* .

Lo ZWIRNER evidentemente non era a conoscenza di questo ragionamento di BROUWER.

che conduce in modo del tutto naturale ed evidente a riconoscere il valore generale della sua osservazione.

La quale è stata applicata da ZWIRNER in:

*e*) *Problemi di valori ai limiti per equazioni differenziali ordinarie* [28],

per eliminare alcune ipotesi restrittive introdotte in *a*), ed infine in *c*), loc. cit. [24]: in tutti questi casi egli tratta problemi, diciamo, bidimensionali; nel lavoro *c*) applica la sua osservazione ad un caso in cui il secondo membro dell' equazione che considera non è limitato, ma è minore in modulo di una funzione della sola $x$ sommabile in $I$: $a \leq x \leq b$.

**17.** - Come appare da quanto si è detto, dopo la pubblicazione dei lavori *a*) [dico *a*) e non *c*)], *d*) ed *e*) veniva alla luce la Memoria V) di CINQUINI, che provocava l' obbiezione mossagli da MIRANDA, pubblicata in seguito nel «Zentralblatt für Mathematik» [29] e qui ricordata nella nota [14].

Fra MIRANDA e CINQUINI seguì allora uno scambio di idee, come appare dalla Nota di MIRANDA:

*Un' osservazione sul teorema di* BROUWER [30].

(28) «Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Padova», vol. X (1939), pagg. 35-45 [se ne veggano in ispecial modo le pagg. 38-39].

(29) Non sarà inopportuno osservare che entrambi i lavori *d*) ed *e*) di ZWIRNER erano conosciuti dal CINQUINI prima che la V) fosse licenziata per le stampe. Si veda infatti la nota v) di V). Se il CINQUINI avesse letto più attentamente i lavori *d*) ed *e*) ed il lavoro *a*), citato in *e*), egli si sarebbe accorto dell' insidia nascosta nel ragionamento svolto nella nota x) della stessa V). Invece il CINQUINI enuncia là un paio di giudizi *tranchants* sui lavori *d*) ed *e*) [su lavori non letti attentamente, si badi bene] e tira via.

Un' ultima avvertenza. L' obbiezione del MIRANDA si trova pubblicata nel fascicolo 8 del volume 22 del «Zentralblatt für Mathematik», pubblicato con la data 25 luglio 1940. Ma MIRANDA ha mosso la sua obbiezione al CINQUINI verbalmente in occasione del II Congresso tenuto dall' Unione Matematica Italiana a Bologna nei primi dell' aprile 1940.

(30) «Bollettino dell' Unione mat. it.», serie II, vol. III (1940-41), pagg. 5-7.

In quell' occasione ebbi a dire a MIRANDA che ero già a conoscenza delle applicazioni possibili del teorema I) alle equazioni differenziali e che anzi di

Da quanto MIRANDA dice in questa Nota si apprende che: in occasione di quello scambio di idee il CINQUINI gli comu-

quel teorema io conoscevo una dimostrazione pel caso $q = 2$, quella cui MIRANDA allude nella sua Nota, fin dal tempo delle mie prime ricerche sull' ultimo teorema geometrico di POINCARÉ, cioè fin dal 1931–32: { nel caso $q = 2$ il teorema I) mi permetteva di dimostrare immediatamente che *una trasformazione topologica di una corona circolare ammette due punti uniti distinti, se ruota le due circonferenze estreme in versi opposti, avvicina al centro tutti i punti di uno dei raggi della corona, mentre ne allontana tutti quelli di un altro* [ la trasformazione non può essere allora un autoomeomorfismo; nel caso degli autoomeomorfismi l'ultima condizione va sostituita con: avvicina al centro tutti i punti *interni* ad uno dei raggi, mentre ne allontana tutti i punti *interni* ad un altro; questo caso si può ricondurre al precedente considerando una conveniente corona interna a quella data; oppure si può trattare come il precedente, osservando che nelle (8) i segni $<$ e $>$ si possono sostituire con $\leq$ e $\geq$ ] }; gli accennai alla eventuale possibilità di dimostrare il teorema I), per $q$ qualunque, ricorrendo alla nozione d' indice di KRONECKER. Riassumo qui la mia vecchia dimostrazione del 1931-32 [ che si può atteggiare in modo da supporre che nelle (8) valgano i segni $\leq$ e $\geq$ ]:

Si faccia $q = 2$, e si considerino tutti i punti di $R_2$, che si possano congiungere con un punto $P$ del lato $x_1 = a_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ mediante una curva aperta di Jordan, contenuta in $R_2$, sulla quale sia sempre $\Phi_1(x_1, x_2) < 0$ [ $\Phi_1 \leq 0$, se nelle (8) valgono i segni $\leq$ e $\geq$ ]; e sia $E'$ il loro insieme. La frontiera di $E'$ individua nel piano $x_1 x_2$ al più un' infinità numerabile di insiemi aperti e connessi, di cui uno, ed uno solo, $E$, illimitato. L' insieme $E$ è semplicemente connesso { per la definizione di connessione semplice adottata in questo punto si veda B. v. KERÉKJÀRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, I [ Springer, Berlino (1923) ] pag. 105 }; e la sua frontiera è quindi un continuo, che si presenta come somma del lato $x_1 = a_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ di $R_2$; di due segmenti dei lati $x_2 = a_2$, $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ e $x_2 = b_2$, $a_1 \leq x_1 \leq b_1$; di un continuo $K_1$ che ha (almeno) un punto sul primo e un altro (almeno) sul secondo di questi. Su $K_1$ la $\Phi_1(x_1, x_2)$ è identicamente nulla. Arrivati a questo punto si può o osservare che $\Phi_2(x_1, x_2)$ [ se non si annulla mai nei punti di $K_1$ per cui è $x_2 = a_2$ od $x_2 = b_2$, inciso necessario soltanto se nelle (8) valgono i segni $<$ e $\geq$ ] assume valori di segno contrario in $K_1$, e quindi si deve annullare almeno una volta nel continuo $K_1$; oppure si può costruire per la $\Phi_2(x_1, x_2)$ un continuo $K_2$, analogo a $K_1$, e dimostrare poi che $K_1$ e $K_2$ hanno almeno un punto comune.

La dimostrazione esposta sfrutta il così detto metodo della separazione delle variabili [ cfr. v. KERÉKJÀRTÓ, loc. cit, nota a piè di pag. 199; si venicò che il problema di NICOLETTI si poteva ricondurre al teorema I);

dano anche le pagg. 191-194 per altre applicazioni dello stesso metodo].

Questa dimostrazione non è estendibile con altrettanta semplicità al caso di $q$ qualunque.

Ma sostanzialmente era stata già estesa prima ancora che io costruissi per mio conto la dimostrazione esposta.

Infatti H. LEBESGUE nella Memoria *Sur les correspondances entre les points de deux espaces* [«Fundamenta Mathematicae», vol. 2 (1921), pagg. 256-285; nn. 3-8 e 14] sviluppa, in uno spazio a $q$ dimensioni, dei ragionamenti che in sostanza estendono quelli esposti per $q = 2$ e portano ad un lemma, di cui il teorema I) è una facile conseguenza. LEBESGUE aveva già enunciato il suo lemma in una Nota pubblicata nel vol. 70 (1911) dei «Mathematische Annalen»; ma la dimostrazione che ne aveva accennato era incompleta. Una dimostrazione del lemma di LEBESGUE è stata data fin dal 1913 da BROUWER in *Ueber den natürlichen Dimensionsbegriff* [«Journal für die reine und angewandte Mathematik», vol. 142 (1913), pagg. 146-152; vedi anche *ibidem*, vol. 153 (1924), pag. 253].

Io non ho approfondito abbastanza la dimostrazione del teorema I) data dal BRUSOTTI (l'approfondirla non era necessario ai fini della polemica; potrà sembrare strano ma è proprio così; si veda difatti quanto dico nei nn. 21 e 32 di questa). Ma non credo che sarei cattivo profeta se avanzassi la presunzione che BRUSOTTI ha indicato un altro metodo per superare proprio quegli stessi ostacoli che si sono parati dinnanzi al LEBESGUE nella sua Memoria dei «Fundamenta Mathematicae»; e che quindi il sostrato della dimostrazione di BRUSOTTI sia topologico nella sua essenza.

Lo ZWIRNER nei lavori *c*), *d*), *e*) citati in ([24]), ([26]), ([28]) ha tenuto ancora un'altra strada.

Circa la quale vi è qualche osservazione da fare. Essa nel caso $q = 2$ presenta certamente un interesse didattico. Infatti, in quel caso, ZWIRNER dimostra il teorema I) ricorrendo in sostanza ad una proposizione notissima, che risale a CAUCHY {cfr. W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie* [Teubner, Lipsia, 4ª ed. (1923)], vol. I, pagg. 219-220}, di teoria delle funzioni di variabile complessa: La funzione $f(z)$ della variabile $z$ sia continua (derivabile o non) nel cerchio $|z| \leq 1$ e mai nulla ivi, allora, se si prolunga per continuità lungo la circonferenza $|z| = 1$ una determinazione di $\arg f(z)$, questa si riproduce ad ogni giro completo dell'origine.

La strada tenuta dallo ZWIRNER per dimostrare il teorema I), applicata al caso $q > 2$, presenta invece un interesse al più teorico. Infatti essa si basa sulla nozione di ordine di un punto rispetto ad un ciclo; ma con questa nozione si può dimostrare il teorema di BROUWER {cfr. P. ALEXANDROFF e H. HOPF *Topologie*, I [Springer, Berlino (1935)], pag. 480}; ma il teorema di BROUWER e il teorema I) sono stati riconosciuti equivache:

in quell' occasione il CINQUINI diede una dimostrazione del teorema I) per $q = 2$;

che:

tale dimostrazione non sembrava facilmente estendibile al caso di $q$ qualunque.

Pertanto in quella Nota MIRANDA osservò che il teorema I) è equivalente al teorema di BROUWER sull' esistenza di punti uniti

lenti dal MIRANDA ... Comunque è effettivamente molto probabile che il teorema I) si possa dimostrare basandosi sulla nozione di ordine di un punto rispetto ad un ciclo [ oppure, se si vuol dir così, su quella d' indice di KRONECKER ], senza passare attraverso il teorema di BROUWER sull' esistenza di punti uniti nelle trasformazioni dell' elemento $q$ - dimensionale in sè. E questa presunzione è confermata dal fatto che la dimostrazione del teorema I), implicitamente data da BROUWER nel lavoro ricordato in ([27]), sfrutta concetti strettamente legati a quello di indice di KRONECKER. Ritengo, anzi, che il teorema I) si possa dedurre appunto da quello stesso teorema di POINCARÉ-BOHL [ ALEXANDROFF e HOPF, loc. cit., pag. 459 ], da cui si può dedurre anche il teorema di BROUWER [*ibidem*, pag. 480]. Una dimostrazione del teorema I), sviluppata dallo ZWIRNER per $q = 2$ seguendo questo suggerimento, è molto elegante e si può certo estendere al caso $q > 2$. Tutto ciò, dopo la Nota di MIRANDA [per tacere dei lavori di BROUWER e di LEBESGUE citati qui e in ([27])], ha sempre un valore di curiosità più che altro; tant' è vero che la nota di MIRANDA è stata per lo ZWIRNER un motivo di più [altri sono esposti nella successiva nota ([68])] per non ritenere opportuno di insistere sull'estendere la sua trattazione del problema di NICOLETTI al caso di problemi tri-, quadri -, ... dimensionali [ naturalmente questa notizia finora non era pubblica ]. Comunque, appunto a titolo di curiosità, lo ZWIRNER riprenderà la questione in un prossimo lavoro.

[ZWIRNER ha effettivamente completato le sue considerazioni, che si trovano esposte in un lavoro che comparirà in questo volume stesso.

In questo stesso volume sarà pubblicata anche una mia Noticina, in cui dò un' altra dimostrazione brevissima del teorema I), deducendolo sempre dal teorema di POINCARÉ-BOHL. Questa dimostrazione e quella di ZWIRNER però non sono essenzialmente distinte da quella implicitamente data da BROUWER in loc. cit. ([27]); e che così debba essere è facilmente prevedibile *a priori*, appunto perchè i concetti sfruttati in quest' ultima sono strettamente affini all' indice di KRONECKER.

Sono ritornato sull' argomento in una Nota presentata nel febbraio 1946 alla *Pontificia Academia Scientiarum*; in essa sviluppo la deduzione del teorema I) dal lemma di LEBESGUE, che enuncio in un modo indicato esplicitamente da SPERNER (aggiunto sulle bozze di stampa) ].

nelle trasformazioni continue in sue parti dell' elemento $q$ - dimensionale [e formulò anzi il teorema I), sostituendo nelle (8) i segni $<$ e $>$ con $\leq$ e $\geq$, il che peraltro è evidente che può farsi].

Nel n. 8 della Conferenza VI), citata in ([16]), il CINQUINI fa vedere in modo esplicito come un problema di NICOLETTI relativo a un caso, diciamo, tridimensionale si possa ricondurre al teorema I), facendovi $q = 3$.

Il procedimento tenuto dal CINQUINI in questa Conferenza, posteriore ai lavori *d*) ed *e*) [se non al lavoro *c*), che è stato licenziato per la stampa il 1° marzo 1940, mentre la Conferenza VI) è stata tenuta dal CINQUINI il 23 aprile 1940, come appare dalla pag. IX del vol. XIV dei Rendiconti del Seminario mat. e fis. di Milano], differisce da quello tenuto dallo ZWIRNER solo per lati formali : per es., chiunque abbia una certa dimestichezza con queste teorie capisce subito che differenze sostanziali non potevano essere portate dal fatto che pel CINQUINI il secondo membro dell' equazione era minore di una funzione sommabile della sola $x$, mentre in *d*) ed *e*) ZWIRNER suppone quei secondi membri limitati [peraltro in *c*) lascia cadere questa ipotesi e ne fa una analoga a quella del CINQUINI]; differenze formali sono quelle portate dalla diversità dei problemi considerati; sostanziali non erano nemmeno le differenze dovute al fatto che il problema considerato in VI) era tridimensionale e non bidimensionale ([31]).

([31]) L' unica attenuante che il CINQUINI possa invocare si è che lo ZWIRNER non ha mai enunciato in modo esplicito il teorema I) [perchè non aveva bisogno di farlo]. Se il C NQU NI vuole invocarla, anche dopo quanto ha detto a proposito dei lavori *d*) ed *e*), nei passi cui si è alluso qui in ([29]), faccia pure! Ma non dimentichi che il lavoro *e*) si trova ricordato anche in VI), proprio alla fine di quel tale n. 8 di VI) con le parole seguenti –, più cortesi bisogna riconoscerlo di quelle che aveva usato nei passi qui ricordati, ricordati non riprodotti, in ([29]) – :

« Ricordiamo ancora che G. ZWIRNER » in *e*) « ha esteso XIII) al caso $n > 2$ un teorema stabilito dal TONELLI, per $n = 2$, nel lavoro citato in ... » [pag. 170 di VI)]; ed ecco la postilla XIII) :

« G. ZWIRNER » Nota *e*) « n. 3. La dimostrazione dello ZWIRNER si giova dei risultati di BIRKHOFF, KELLOGG, CACCIOPPOLI, ma può facilmente mo-

Bisognava dunque o esporre una o rimandare ad una dimostrazione del teorema I) pel caso $q = 3$: questa era l'unica novità: orbene, a questo proposito, il lavoro VI), nella nota [XII]) a piè delle pagg. 168-169, contiene questa frase stupefacente:

«Questa conclusione» [cioè l'esistenza di radici pel sistema (7), nelle ipotesi del teorema I) e per $q = 3$] «se non sembra evidente nelle attuali ipotesi in cui le $\Phi_j$ sono funzioni continue» di tre variabili «si deduce nel seguente modo dal caso, che riteniamo noto, in cui le $\Phi_j$ sono funzioni razionali intere» nelle tre variabili da cui dipendono;

dopo di che segue la deduzione (che occupa una metà circa della pag. 169); ma circa il caso ritenuto noto punto e basta!

Rammentiamo incidentalmente che la VI) del Cinquini aveva (vedine il n. 1) «un ben preciso obbiettivo (vedi n. 5)»: quello (vedine il n. 5) «di indicare in qual modo il metodo del Severini, usato in maniera sistematica e con opportune modificazioni, abbia permesso di stabilire in modo semplicissimo e senza far mai uso nè del citato criterio di Birkhoff e Kellogg, nè di altre considerazioni topologiche, nuovi teoremi generali e di riottenere,

dificarsi in modo da divenirne indipendente».

Dunque il Cinquini si è accorto che, nel n. 3 di *e*), Zwirner ha fatto ricorso ai metodi di Birkhoff, Kellogg, Caccioppoli nel caso di problemi, diciamo, $(n-1)$-dimensionali; mentre invece non si è accorto che, nel n. 1 di *e*), Zwirner, nel caso di un problema, diciamo, bidimensionale, ha sviluppato proprio quel metodo che il Cinquini stesso applica nello stesso n. 8 della stessa VI) ad un problema, diciamo, tridimensionale.

Il Cinquini non avrebbe fatto meglio a leggerlo tutto il lavoro *e*) dello Zwirner? tanto più che questi nella prefazione di *e*) [loc. cit. ([28]), pag. 36] dice «La dimostrazione che dò è più aderente alla natura dell'argomento. Questo implica infatti (come del resto sarà chiarito) la soluzione di un sistema di due equazioni (non lineari) in due incognite, soluzione che qui è fatta dipendere da teoremi sulle trasformazioni piane anzichè dal procedimento di eliminazione tenuto» in *a*)!

Osserviamo incidentalmente che nella postilla [XIII]) di VI) il Cinquini dice sì, che la dimostrazione di Zwirner si può facilmente modificare in modo da svincolarla dai risultati di Birkhoff – Kellogg – Schauder – Caccioppoli, ma non dice che questo si può fare a patto di ricorrere al teorema I), cioè ad un teorema di cui egli allora non conosceva alcuna dimostrazione.

per via elementare, risultati conseguiti da altri autori con diversi procedimenti »!

Osserviamo incidentalmente [vedi questo numero e la nota ([29])] che dal confronto delle date risulta che MIRANDA ha mosso la sua obbiezione al CINQUINI una ventina di giorni prima che quest' ultimo leggesse la sua Conferenza VI).

**18.** - Così i fatti. Invece un lettore dell' ultimo alinea del CINQUINI riportato nel n. 12 [« Abbiamo inoltre rilevato XII) che *tale nostra osservazione è un' immediata conseguenza del caso particolare in cui le* $\Phi_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ *siano funzioni razionali intere*, nel qual caso ritenevamo la nostra affermazione come già nota »; ed ecco la postilla XII) « Luogo cit. in VIII), nota XII) a piè delle pagg. 168-169 »], che non vada a controllare l' originale, può essere condotto a pensare che in VI):

il CINQUINI abbia sfruttato il teorema I) reputandolo conseguenza immediata di un' altra proposizione;

che il CINQUINI abbia creduto questa proposizione già nota, anzi classica, anzi tanto classica da non ritenere nemmeno necessario di indicare esplicitamente un posto ove essa fosse dimostrata.

Questo fraintendere, dirà il CINQUINI, è reso impossibile dal fatto che poco dopo egli riporta, in calce alla pag. 218 di III), il seguente mio periodo tolto dalla nota V) a piè della pag. 204 di $A$): « CINQUINI ha osservato altrove, e la cosa è banale, che è sufficiente stabilire questo fatto quando le funzioni $\Phi_j$ sono dei polinomi, nei riguardi del qual caso egli si limita a dire di ritenerlo noto ». Già, il periodo è riportato, ma è riportato sotto la taccia di ambiguità (cfr. il successivo n. 20): nel testo infatti di quella pag. 218 il CINQUINI scrive, alludendo a quella mia nota V) di $A$): « Ora, presa conoscenza di quanto scrive a tal riguardo, in forma un po' ambigua, il signor SCORZA DRAGONI XIII), ... »; e nella postilla XIII): « Dice fra l' altro lo SCORZA DRAGONI nel luogo cit. in IV): "CINQUINI ha osservato altrove ...". »

Quel fraintendere può essere agevolato dal fatto che in III) il CINQUINI dice, sì, che nel caso dei polinomi riteneva l' affermazione nota, ma non specifica che egli in VI) (non ha scritto: « questo caso si riconduce al caso noto dei polinomi... », bensì) ha scritto a un dipresso «questo caso si riconduce al caso che riteniamo noto...». Sicchè potrebbe sembrare che quelle parole «nel qual caso ritenevamo la nostra affermazione come già nota» non siano parole scritte in VI), ma parole pubblicate per la prima volta nella III), posteriore alla VI), quasi per giustificare una sua ammissione affrettata e non per alludere ad una sua affermazione curiosamente avventata fatta in VI) [tanto più che nell' alinea in discorso si passa dal carattere corsivo al carattere rotondo proprio in uno dei punti principali, principali non dal punto di vista della speculazione scientifica, ma della polemica].

Naturalmente non pretendo che l' ambiguità sia intenzionale, ma l' equivoco può sorgere, e quando ci si vuol permettere di dare dell' ambiguo agli altri, si deve stare molto attenti a quello che si scrive, specie quando quello che si scrive rappresenta, per chi lo scrive, un piccolo rospo da inghiottire.

Comunque, il fatto non è che il Cinquini nella nota [XII]) di VI) abbia ritenuto inutile di soffermarsi su una cosa nota, ma il fatto è (cfr. il successivo n. 20) che egli ha dichiarato di ritenere nota una certa proposizione, e non ci si è soffermato perchè egli non era in grado nè di dimostrarla, nè di dire dov' essa fosse dimostrata [dopo di che il lettore si domanderà: che cosa vi è di ambiguo nel passo dello Scorza Dragoni riportato in quella tal postilla [XIII]) della pag. 218 di III)?].

Non era in grado di dire dov' essa fosse dimostrata, tant' è vero che nella Memoria:

X) *Sopra il problema di* Nicoletti *per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie* (32)

il Cinquini, avendo di nuovo bisogno del teorema I), ha preferito dimenticarsi di aver già osservato che il teorema I) era immediatamente riducibile al caso dei polinomi, ed ha creduto più opportuno fare ricorso proprio alla dimostrazione datane dal Miranda e pubblicata nel frattempo (33)!

(32) «Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa», serie II, vol. X (1941), pagg. 127-138.

(33) Le cose stanno proprio così. Cinquini per colmare quella lacuna ha fatto ricorso alla dimostrazione di Miranda. Ed ecco in che modo:

Non era in grado di dimostrarla, tant' è vero che, dopo che io ho stigmatizzato questo suo modo di procedere con le parole riprodotte nel successivo n. 19, egli si è fatto dimostrare il teorema I), nel caso dei polinomi, dal BRUSOTTI [loc. cit. ([15])]!

E dire che il teorema I) era proprio praticamente noto, come risulta *ad abundantiam* dalle note ([27]) e ([30]) di questa Memoria istessa (*)!

## § 4.

**19.** - Nella mia Nota *A*) a piè di pag. 204, ho stigmatizzato quel tal modo di procedere del CINQUINI con le seguenti parole:

«La dimostrazione di CINQUINI» [si allude al lavoro V) citato in ([14])] «presentava una lacuna in un punto essenziale..., rilevata da C. MIRANDA...; per colmarla sarebbe bastato dimostrare» il teorema qui chiamato teorema I) ([34]). «CINQUINI ha osservato altrove, e la cosa è banale, che è sufficiente» stabilirlo «quando

a pag. 134 di X) a un certo punto dice, nel testo:
«... per una semplice osservazione di cui abbiamo già fatto uso...»
ed in nota a piè di pagina:
«Rileviamo per il seguito che la nostra osservazione { cfr. luogo citato per primo in III), » [cioè la VI)] «n. 8, *a*) } è valida, più generalmente, anche per un parallelepipedo dello spazio a *q* dimensioni. Ciò può dedursi immediatamente con un semplice cambiamento di coordinate dal risultato di C. MIRANDA: *Un' osservazione su un teorema di* BROUWER [«Boll. Unione Matematica Italiana», vol. III (1940-41), pagg. 5–7], cui avevamo avuto occasione di comunicare la nostra osservazione».

Il luogo citato per primo in III) è appunto la Conferenza VI); l'osservazione è appunto quella dell'esistenza di soluzioni pel sistema (7) nelle ipotesi del teorema I).

(*) Si veda anche la postilla aggiunta al n. 23.

([34]) Per colmarla si sarebbe potuto anche ricorrere al teorema di BIRKHOFF e KELLOGG naturalmente. Ma non ho creduto necessario farlo rilevare, dato che uno degli scopi del CINQUINI nel redigere la V) era appunto quello di evitare quel teorema: cosa che riconosce egli stesso anche in III): «... al solo scopo di non usufruire di un risultato stabilito da BIRKHOFF e KELLOGG mediante considerazioni di analisi funzionale...».

le funzioni $\Phi_j$ sono dei polinomi, nei riguardi del qual caso egli si limita a dire di ritenerlo noto... Successivamente MIRANDA ha dimostrato che quel fatto è equivalente alla classica proposizione di BROUWER, relativa all' esistenza di punti uniti nelle trasformazioni continue dell' elemento a $q$ dimensioni in una sua parte e posta da CACCIOPPOLI a fondamento delle sue ricerche. Ed è a questa dimostrazione di MIRANDA che CINQUINI fa ricorso nella sua» Memoria X) [qui citata in ([32])] «nota VIII) a piè di pag. 134. In definitiva, per il momento, anche CINQUINI rinuncia, implicitamente, ad evitare l' uso della topologia. Quello che rimane, si è che per il problema di NICOLETTI, relativo per es., all' equazione differenziale, ordinaria, di tipo normale, d' ordine $n$ basta la topologia uni —, bi —, ..., $(n - 1)$ — dimensionale. La cosa era facilmente prevedibile *a priori* ed era stata già posta in netto rilievo in casi particolari; cfr., per es., G. ZWIRNER» lavoro *d*), qui citato in ([26]).

**20.** - Il CINQUINI giudica queste parole come «scritte in forma un po' ambigua», cfr. III), pag. 218.

Il periodo del CINQUINI è un po' contorto: non si capisce bene se egli giudichi ambigue soltanto le parole «il CINQUINI ha osservato altrove, e la cosa è banale, che è sufficiente stabilirlo quando le funzioni $\Phi_j$ sono dei polinomi, nei riguardi del qual caso egli si limita a dire di ritenerlo noto» o se, come è più probabile, egli intenda tacciare di ambiguità tutto il passo riportato nel n. prec.

Nel primo caso basta confrontare di nuovo quelle mie parole con quelle che il CINQUINI stesso scrive nella nota XII) di VI), già riportate verso la fine del n. 17 :

«Questa conclusione, se non sembra evidente nelle attuali ipotesi in cui le $\Phi_j$ sono funzioni continue..., si deduce nel seguente modo dal caso, che riteniamo noto, in cui le $\Phi_j$ sono funzioni razionali intere...».

Nel secondo caso, il lettore rilegga quel passo e giudichi se quel passo presenti ambiguità di sorta; e nell' eventualità che ne riscontri (ambiguità o cose non poste in piena luce) dica, adesso ch' è meglio informato sui dettagli della questione, se tutte queste sono o non sono a favore del CINQUINI.

**21**. – Dopo quel piccolo preambolo sulla mia pretesa ambiguità, il CINQUINI prosegue [in III), nelle pagg. 218-219]:

«... abbiamo chiesto l'autorevole parere del collega prof. L. BRUSOTTI su tale questione algebrica» [cioè: sulla risolubilità del sistema (7), nelle ipotesi che le $\Phi_j$ siano polinomi soddisfacenti alle (8)]. «Quest' ultimo Autore non ha trovato difficoltà a redigere la Nota già citata» [e qui ricordata in ([15])] «Risulta ben evidente che la dimostrazione del BRUSOTTI usufruisce in modo essenziale del fatto che le funzioni in questione siano razionali intere, e che essa è semplice ed elementare proprio in virtù di questa ipotesi».

E tutto questo che c' entra? chi ha mai contestato al prof. BRUSOTTI la capacità di dimostrare il teorema I) nell' ipotesi che le $\Phi_j$ fossero dei polinomi? e chi ha mai negato che questa ipotesi potesse semplificare il problema? anzi, chi ha mai negato che il teorema I) potesse essere addirittura noto?

Osserviamo incidentalmente che il BRUSOTTI dice «Il presente scritto... è inteso a dimostrare in modo semplice ed elementare una proposizione algebrica che può essere utile esplicitamente stabilire... *Veramente è risultato dapprima conveniente aggiungere un' ipotesi* che, precisando la tesi, permette una dimostrazione per induzione matematica. Dall' enunciato così modificato si passa poi facilmente a quello richiesto» (il corsivo è mio), cioè al teorema I) per i polimoni.

**22**. – Il CINQUINI invece prosegue:

«D' altra parte la nostra affermazione», circa la riconducibilità del caso che le $\Phi_j$ siano continue al caso dei polinomi «[in merito a cui il prof. SCORZA DRAGONI sentenzia: "e la cosa è banale"], è contenuta in una nota a piè di pagina del manoscritto di una conferenza... rivolta ad un pubblico di cui fanno parte molti ingegneri: ora di fronte a tale uditorio l' oratore può riuscire ben più efficace, se non trascura considerazioni anche elementari ma utili nella pratica [e quindi "banali" soltanto per il Signor SCORZA DRAGONI ([35])], che se si abbandona ad una a-

([35]) Il lettore noti che il senso da me dato alla frase «e la cosa è banale» è stato falsato, più o meno abilmente.

strusa disquisizione sugli elementi uniti degli spazi funzionali (36) ».

Sicchè il CINQUINI, quando espone della matematica pura ad un pubblico in cui sono presenti degli ingegneri, insiste (37) su quei punti che *sono* banali (38) (banali per un matematico, beninteso, beninteso) e sorvola, dichiarando di «ritenerli noti», su quelli che per lui rappresentano delle quistioni non ancora risolte? Che se poi il CINQUINI, nel tenere quella sua conferenza VI), si è limitato a leggerne il testo, si dovrebbe dire ch' egli dà addirittura per dimostrate cose che, per quanto ne sa lui, non lo sono (39) !

**23.** - A proposito di quel:

«in merito a cui il prof. SCORZA DRAGONI sentenzia "e la cosa è banale"»

desidero precisare che l' idea di sostituire funzioni continue con polinomi, in quanto idea generale, non è nemmeno nuova, ma sostanzialmente già rilevata. E da chi? Ma, p. es., proprio da BIRKHOFF e KELLOGG, nella loro Memoria citata in (7)!

Ivi infatti (n. 2) essi riconducono, con un passaggio al limite, il solito teorema di BROUWER per le trasformazioni continue dell' elemento a $q$ dimensioni al caso delle trasformazioni

(36) Il CINQUINI voleva dire: sugli elementi uniti di trasformazioni...

(37) Dico insiste, perchè una metà circa della pag 169 di VI) viene appunto dedicata a dimostrare, sia pure in calce, quell' affermazione.

(38) Lo ha quasi ammesso anche il CINQUINI, nella stessa III), poche righe prima di dire «e quindi "banali" soltanto per il Signor SCORZA DRAGONI»! Infatti nella pag. 218 di III) non aveva forse scritto:
«Abbiamo inoltre rilevato che *tale nostra osservazione è un'* **immediata** *conseguenza del caso particolare in cui le* $\Phi_j$ ... *siano funzioni razionali intere ....*» [il corsivo è del Cinquini, il grassetto è mio; il periodo si trova qui ricordato nel n. 12]?

(39) Nel testo di VI) infatti il CINQUINI, dopo di avere osservato che le $\Phi_j$ soddisfanno alle ipotesi del teorema I), tira avanti con un puro e semplice «Si conclude XII) che c' è almeno un punto in cui le $\Phi_j$ sono simultaneamente nulle» [loc. cit. (16); la postilla XII) è appunto quella, già ricordata verso la fine del n. 17, nella quale si finisce col considerare la conclusione, di cui si ha bisogno, come roba già nota].

rappresentabili mediante polinomi. Ora un teorema sull' esistenza di punti uniti in una trasformazione è sempre equivalente ad un teorema sull' esistenza di radici per un sistema di equazioni...

A questo punto è spontaneo dirsi:

Il teorema I) e il teorema di Brouwer sono equivalenti. Non sarà quindi per avventura possibile dedurre il teorema I), nel caso che le $\Phi_j$ siano polinomi, proprio dal lemma per gli zeri comuni a più polinomi di cui si servono Birkhoff e Kellogg (loc. cit., n. 1) per dimostrare il teorema di Brouwer nel caso di trasformazioni rappresentabili mediante polinomi? e la risposta non deve essere difficile (*).

## § 5.

**24.** - E veniamo al punto 5) del n. 8.

Anche qui sarà meglio riprodurre integralmente il passo del Cinquini che intendo esaminare. Spezzerò questo passo in parti, in modo da essere più chiaro nelle risposte. Il passo in oggetto si trova a pag. 219 di III), Come al solito i richiami, a piè di pagina, qui trascritti con cifre romane, si riferiscono a note di III).

«Ma c' è di più: lo Scorza Dragoni dice inoltre: "... Questo criterio è stato esteso da Cinquini (pel caso di $n$ qualunque) e da Zwirner [XIV]) (pel caso di $n = 3$), con procedimenti di altra natura. Ma in seguito Zwirner stesso ha riconosciuto [XV]) che tutte queste estensioni sono anch' esse conseguenze dell' osservazione di Caccioppoli ecc.» [questo passo è tolto dalla pre-

(*) La risposta è facilissima. La dimostrazione che così si ottiene pel teorema I), nel caso dei polinomi è immediata. Essa si trova contenuta in una mia Noticina pervenuta all' Accademia dei Lincei il 20 febbraio 1946.

Non sarà superfluo osservare che la ragione intima, per cui il sostituire funzioni continue con polimoni ha successo sia col teorema I) che col teorema di Brouwer, è sempre il fatto che certi indici di Kronecker di certi sistemi di funzioni continue sono diversi da zero, e quindi sono diversi da zero anche gli indici corrispondenti di sistemi di polinomi abbastanza prossimi alle funzioni (nota aggiunta sulle bozze di stampa).

fazione di $A$)] «In merito a questa affermazione ci sono da fare, innanzi tutto, alcuni rilievi.

$\alpha$) Lo SCORZA DRAGONI non aveva mai rilevato, per proprio conto, in circa due anni XVI) ciò che lo ZWIRNER ha riconosciuto (40). Lo ZWIRNER ha pubblicato la Nota da noi citata in XIV) e apparsa alcuni mesi dopo la nostra Memoria citata in III) senza che il prof. SCORZA DRAGONI, sotto la cui guida ZWIRNER lavora, si accorgesse che anche il risultato conseguito dallo ZWIRNER era " conseguenza ,, dell' osservazione di CACCIOPPOLI.

$\beta$) Lo SCORZA DRAGONI pubblica ora una Nota [da noi citata in I)]» [cioè la Nota che qui indichiamo con $A$)] «di dieci pagine per stabilire un criterio che,

$\gamma$) come risulta dal n. 2 della presente Nota» [cioè della III)], «si deduce in poche parole proprio da un caso particolarissimo del nostro teorema cui si riferisce lo SCORZA DRAGONI;

$\delta$) pertanto il recente risultato del Signor SCORZA DRAGONI viene ad essere, esso pure, una " conseguenza,, dell' osservazione di CACCIOPPOLI;

$\varepsilon$) e a tal riguardo è bene ricordare che tale risultato dello SCORZA DRAGONI è *effettivamente* un' immediata conseguenza anche del teorema di BIRKHOFF e KELLOGG da noi citato in VI)».

**25**. – Risponderemo in seguito al punto $\alpha$).

Per quel che ha tratto al punto $\beta$), vogliamo ricontare insieme quelle 10 pagine?

Nelle prime 5 pagine della Nota $A$) si trovano: la prefazione; la posizione del problema; la deduzione immediata, da una notissima formula d' interpolazione, di un lemma [che è l' equivalente di quelli usati da CINQUINI e ZWIRNER nei loro lavori]; l' enunciato del teorema (che occupa anche qualche rigo della sesta pagina).

Nelle pagine 6ª, 7ª, 8ª: dimostrazione del teorema.

(40) In:

*f*) *Problemi di valori al contorno per le equazioni differenziali ordinarie d' ordine n*
[«Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Padova», vol. XII (1941), pagg. 114–122].

Nelle pagine 9ª e 10ª: osservazioni.

Sicchè tre pagine soltanto di dimostrazione. Ma c'è di più. Al quarto rigo della 7ª pagina si legge «Dopo di che l'esistenza di un elemento unito per la (1)» [cioè di una soluzione del problema (1) del lavoro presente] «discende senz'altro dal teorema di CACCIOPPOLI ricordato nella nota III)» [qui citato nella nota (10)] «Per comodità del lettore sviluppo quest'ultima deduzione nei suoi dettagli». Sicchè in totale un po' meno di una pagina di considerazioni, tutt'altro che astruse (41). Comprese le formule, la pagina consta poi di ventuno righe di composizione!

Che se poi il CINQUINI si fosse dato la pena di approfondire quelle ventuno righe, si sarebbe accorto che in esse io mi riconduco, nella sostanza, proprio a quel teorema di BIRKHOFF e KELLOGG, a proposito del quale egli dice «ed a tal riguardo è bene ricordare che tale risultato dello SCORZA DRAGONI è *effettivamente* un'immediata conseguenza anche del teorema di BIRKHOFF e KELLOGG da noi citato in VI)»!

Il lettore avrà già capito che lo scopo della mia Nota *A*) non era certo quello di pubblicare quelle ventuno righe.

**26.** - Per il punto $\gamma$), basta rimandare al § 1 della Nota presente.

(41) In esse sfrutto in sostanza [enunciandole mediante il linguaggio della topologia degli spazi astratti] alcune proprietà notissime delle famiglie di funzioni equicontinue ed equilimitate. Queste proprietà, stabilite da GIULIO ASCOLI e sfruttate poi da C. ARZELÀ, sono proprio quelle su cui si basano quei «metodi della Scuola di CESARE ARZELÀ» di cui il CINQUINI si fa corifeo, come vedremo nel n. 30.

Nello sviluppare la deduzione uso poi naturalmente il teorema di BROUWER sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni continue dell'elemento a $q$ dimensioni in sue parti. Epperò non sarà inopportuno ricordare, ancora una volta [un'altra, l'ho già fatto in *E*), loc. cit. (17), nota XXV) a piè di pag. 267], che del teorema di BROUWER si conoscono dimostrazioni da dirsi elementari [cfr. l'appendice – intitolata appunto *Elementare Beweise des Fixpunktsatzes für das Simplex und des Pflastersatzes* – al nono capitolo della *Topologie* di ALEXANDROFF ed HOPF citata in (30)], anche se non si vuol ricorrere a quella che MIRANDA e BRUSOTTI hanno finito col darne nei lavori citati in (15) e (30) [od a quella data da BIRKHOFF e KELLOGG nel n. 2 della Memoria citata in (7)].

Per quel che riguarda il punto $\delta$), e chi ha l'intenzione di negarlo? Da tutto il contesto della prefazione di $A$) appare chiarissimo che io considero il mio criterio una «conseguenza dell'osservazione di CACCIOPPOLI» !

Per quel che riguarda il punto $\varepsilon$), anche qui: e chi ha l'intenzione di negarlo? Non io di certo, dato che in quelle ventuno righe io mi riconduco appunto, sia pure senza nominarlo esplicitamente, proprio a quel teorema di BIRKHOFF e KELLOGG che il CINQUINI cita nella $^{VI}$) di III)! Non io di certo, dato che in quella famosa Oss. II) di $A$), ho detto che il problema (1) «si riconduce facilmente al caso che $|f|$ sia limitata in tutto $S$»! Anzi, come ho già detto (al n. 3), il CINQUINI vedrà anche nel n. 40 come mi faccia comodo ch'egli si sia deciso a fare un'osservazione quale quella contenuta in $\varepsilon$).

**27.** – Quanto al punto $\alpha$), potrei far sapere al CINQUINI che ero sicuro che il suo teorema si poteva dedurre da quello di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI molto, ma molto tempo prima dello scadere di quei fatali due anni; e che ZWIRNER, appunto perchè sotto la mia guida, si è occupato di quella tal deduzione quando io ho giudicato che fosse venuto per lui il momento di farlo.

Ma stavolta è molto più semplice adottare la curiosa ([42]) *forma mentis* del CINQUINI, per fare i miei «rilievi».

Infatti, cosa potrei dire del CINQUINI,

il quale, per tre anni, ogni volta che enunciava estensioni successive di quel teorema, faceva osservare con tenace costanza ([43]) che esso non rientrava nei teoremi per le equazioni differenziali dati da CACCIOPPOLI in loc. cit. ([10]); ma «non ha mai rilevato» che quello si poteva dimostrare proprio mediante le stesse considerazioni di analisi funzionale con cui CACCIOPPOLI deduceva questi?

([42]) Dico curiosa, perchè, dopo tutto, che male ci sarebbe stato a non osservare subito la possibilità di dedurre dalla proposizione di BIRKHOFF – KELLOGG – SCHAUDER – CACCIOPPOLI quelle di CINQUINI e ZWIRNER?

([43]) loc. cit. ([1]), pagg. 12-13, Oss. al n. 4.

loc. cit. ([14]), pagg. 68-69, Oss. I$^a$ e II$^a$ del n. 1.

loc. cit. ([32]), pagg. 135-136, Oss. $c$) e $d$) del n. 3.

il quale ([44]), anzi, messo sull' avviso dalla mia recensione del suo lavoro X) citato in ([32]) - pubblicata nel «Zentralblatt für Mathematik» (vol 25, pag. 324) e terminante con le parole «Alle diese Resultate sind auch Folgerungen eines topologischen Satzes von CACCIOPPOLI (Rend. Acc. Naz. dei Lincei, VI s., *13*, 498-502 (1931), dies Zbl. *2*, 32)», quello appunto contenuto nella Nota qui citata in ([10]) –, invece di rilevare « per proprio conto . . . ciò che lo ZWIRNER ha riconosciuto», si è affrettato a pubblicare il lavoro II), per provare la che mia «asserzione» non aveva «fino ad oggi» [l' oggi di allora, naturalmente]. «alcun fondamento» – quasi che io in quella recensione avessi detto «Es ist bekannt, dass alle . . .» ! – ?

il quale in II), «per mettere in evidenza che dai risultati che figurano nella Nota del CACCIOPPOLI, citata dallo SCORZA DRAGONI, non segue alcuna delle» sue «proposizioni» [II) loc. cit. ([3]), pag. 106], fa vedere che:

$\alpha_1$) queste non si deducono da nessuno dei teoremi che CACCIOPPOLI, dedica ivi alle equazioni differenziali, – quasi che io non avessi detto «Folgerungen eines topologischen Satzes...» ! –;

che:

$\beta_1$) queste non rientrano in quello, ch' egli, seguendo CACCIOPPOLI, dice essere «il risultato fondamentale che figura nella Nota di CACCIOPPOLI», senza accorgersi

che:

$\beta_1'$) il risultato ch' egli riporta, contenuto nel secondo alinea di pag. 501 del lavoro citato in ([10]), non è un teorema di carattere topologico, almeno nell' accezione consueta (lo stesso potendosi dire per l' estensione di quel risultato cui CACCIOPPOLI accenna nel n. 3 della sua Nota in discorso);

che:

$\beta_1''$) l' unico risultato di carattere topologico (nell' accezione comune del termine) contenuto nella Nota di CACCIOPPOLI, è bensì quello ivi esposto nel penultimo alinea di pag. 500;

e che:

$\beta_1'''$) da questo teorema seguono appunto i suoi?

([44]) Da questo momento non è più necessario attenersi alla *forma mentis* del CINQUINI.

**28.** – Qui occorre una lieve precisazione. Dal contesto di $A$) e dalla nota $f$) di ZWIRNER qui citata in ([40]) appare chiaro che il teorema topologico di CACCIOPPOLI, cui si allude in esse, è appunto quello ricordato sotto $\beta_1''$); cioè, per liberarlo da sovrastrutture inutili per il nostro caso, il seguente, che trascrivo quasi letteralmente dal passo citato in $\beta_1''$):

TEOREMA II). – *Sia* $\Sigma$ *lo spazio metrico delle funzioni continue in* $a \leq x \leq b$ *insieme con le proprie derivate prime, seconde,* $\ldots$, $(n-1)$ – *esime, la distanza di due punti* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$ *di* $\Sigma$ *essendo data dalla somma* $\max|\varphi(x)-\psi(x)| + \max|\varphi'(x)-\psi'(x)| + \ldots + \max|\varphi^{(n-1)}(x)-\psi^{(n-1)}(x)|$; *sia* $\vartheta(x) = F[\tau(x)]$ *una trasformazione continua di* $\Sigma$ *in (una parte di)* $\Sigma$; *allora la* $\vartheta(x) = F[\tau(x)]$ *ammette almeno un elemento unito, se muta una porzione (chiusa)* $\Sigma'$ *di* $\Sigma$ *in un insieme compatto rispetto a* $\Sigma'$ *in essa contenuto, purchè* $\Sigma'$ *sia così costituita da ammettere, al pari di* $\Sigma$, *come modelli topologici approssimanti campi (chiusi) semplicemente connessi. Quest' ultima circostanza si presenterà, p. es., se* $\Sigma'$ *è dedotta da* $\Sigma$ *imponendo un confine superiore ai valori assoluti di* $\tau(x)$, $\tau'(x), \ldots, \tau^{(n-1)}(x)$, le $\tau(x)$ potendosi approssimare con le loro derivate mediante polinomi, nello spazio dei cui coefficienti limitazioni del tipo ora detto staccano insiemi convessi.

Questo teorema io l' ho attribuito a CACCIOPPOLI, ma forse ho avuto torto. Infatti io non ho mai potuto consultare l' originale del terzo dei lavori di SCHAUDER, citati nella nota ([8]); ma nel riassunto pubblicatone nello «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» [vol. 56, parte I (1932), pag. 355] trovo: «Für die von S. BANACH in seiner Dissertation betrachteten linearen, normierten, vollständigen Räumen (B — Räume) kann man auf die Kompaktheit von $H$ verzichten. Das führt zu: Satz II. In einem B—Raum sei eine konvexe, abgeschlossene Menge $H$ gegeben. Die stetige Funktionaloperation $F(x)$ bilde $H$ auf sich selbst ab. Ferner sei di Menge $F(H)$ in $H$ kompakt. Dann ist ein Fixpunkt vorhanden». Perchè il CINQUINI non ha fatto lui l' indagine bibliografica? Se avesse potuto trovare che quel teorema II) non è di CACCIOPPOLI, in III) avrebbe potuto dire (magra scusa in verità e alquanto stiracchiata) che in II) era stato messo fuori strada dalla mia falsa attribuzione di quel teorema al CACCIOPPOLI.

Ma questo avrebbe dovuto farlo in III), immediatamente dopo che la mia Nota *A*) e la nota di *f*) ZWIRNER, loc. cit. ([40]), su cui quella si poggia, avevano chiarito l'equivoco, che eventualmente potesse esser sorto. Invece in III) il CINQUINI non rileva affatto errori di attribuzione; e ciò non ostante sembra che egli creda ancora [cfr. III), nota XIX) a piè di pag. 220] che la II) costituisca una risposta efficace alla mia recensione, ricordata qui nel n. 27.

**29.** - Circa la risposta datami in II), desideravo ancora far presente che, dopo tutto, il CINQUINI, bontà sua!, «non vuole ([45]) escludere *a priori* che riprendendo in forma opportuna e con quella precisione che non dovrebbe mai mancare, quelle considerazioni che sono state introdotte originariamente da BIRKHOFF e KELLOGG, il Signor SCORZA DRAGONI o qualche altro autore possano riottenere con metodo più elevato i» suoi «risultati e conseguirne dei nuovi...» [cfr. II), pag. 106]. Certo che per escludere una cosa del genere, dopo la mia recisa affermazione, ci sarebbe voluto un discreto coraggio.

Il CINQUINI prosegue, nel passo che stiamo riportando, a questo modo: «... se così avverrà, noi avremo il piacere di constatare che le nostre elementari ricerche, (che già in altra occasione sono state ben utili al prof. SCORZA DRAGONI), avranno dato origine a nuove scoperte (*sic*!) che finora non sono state effettuate!».

Poichè il CINQUINI non ha sentito il dovere elementare di chiarire che cosa intenda, dicendo che «già in altra occasione le» sue ricerche mi «sono state ben utili», sarò io ad avvertire il lettore che il CINQUINI ha già affermato un'altra volta ch'esse mi sono state «molto utili»: precisamente nell' *Aggiunta* di cui in I). E vuol sapere il lettore che utilità ne ho tratta? La conoscenza dell'«errore (*sic*!) in cui» ero «incorso nella Nota lincea del 1935» [loc. cit. ([2]), pag. 22] e di cui abbiamo discorso abbastanza nel § 2! È venuto alla luce un topo e sembrava che dovessero partorire i monti.

([45]) Naturalmente nell' originale si legge: vogliamo, invece di: vuole.

§ 6.

**30.** – Continuando l'esame del lavoro III), ci troviamo di fronte ai seguenti periodi ([46]), in cui i corsivi sono del CINQUINI:

«Ma è inutile dilungarci XVII), perchè bastano poche parole, *le quali mettono le cose a posto in modo chiaro e definitivo*, per rispondere contemporaneamente, sia all'affermazione dello SCORZA DRAGONI riportata poco sopra ([47]), sia alla seguente altra dello stesso autore: "In definitiva, per il momento anche CINQUINI rinuncia, implicitamente, ad evitare l'uso della topologia ([48]) „.

Infatti, tenuta presente la dimostrazione del BRUSOTTI, *è pacifico che per stabilire tutti i teoremi esistenziali per i problemi di valori al contorno* (relativi a equazioni differenziali ordinarie ed anche a sistemi di tali equazioni), dovuti non solo a noi ma anche ad altri autori XVIII), *non c'è alcun bisogno di ricorrere alle considerazioni di analisi funzionale dovute a* BIRKHOFF *e* KELLOGG (e riprese otto anni dopo da R. CACCIOPPOLI, il quale ha dovuto poi riconoscere la priorità degli autori citati), *ma nemmeno di usufruire della topologia degli spazi a un numero finito di dimensioni*: basta seguire il procedimento elementare che abbiamo sviluppato nei nostri lavori e che trae il suo spunto dalle note ricerche di C. SEVERINI. Ma ciò è questione di gusti: a noi piace dare il nostro modesto contributo a porre in luce i metodi della Scuola di CESARE ARZELÀ; invece, evidentemente, il Signor

([46]) Nel passo che segue le postille contrassegnate con numeri romani sono del CINQUINI e verranno riportate, se non sono state già ricordate, per quel tanto che basti.

Inoltre per la chiarezza di quanto segue è bene che il lettore tenga presente la nota V) a piè di pag. 204 del mio lavoro *A*), citato in ([5]), qui riportata nel n. 19 nelle sue linee essenziali.

([47]) Quella riportata qui nel terzo alinea del n. 24.

Veramente è un po' difficile ravvisare una risposta efficace a quella mia affermazione nel passo del CINQUINI, che stiamo riportando nel testo.

Forse per il CINQUINI tale risposta è contenuta nella nota XVII); in tal caso rimando al successivo n. 39. O forse nella nota XIX), nella quale egli rimanda al suo lavoro II); ed in tal caso si vedano i nn. 27-29.

([48]) Cfr. n. 19.

SCORZA DRAGONI preferisce insistere nel valorizzare le idee di BIRKHOFF e KELLOGG ([49]) !

Non ci indugiamo ulteriormente a replicare allo SCORZA DRAGONI XIX), ma vogliamo far presente che, *tenuto conto della nostra osservazione e del risultato del* MIRANDA, *la Nota del* BRUSOTTI *fornisce una dimostrazione elementare del teorema di* BROUWER ».

**31.** – Il CINQUINI dovrebbe sapere benissimo in quanti e quali lavori io mi sia avvalso, quando lo ho ritenuto opportuno, di procedimenti, diciamo, elementari [necessariamente basati proprio sui teoremi di GIULIO ASCOLI sulle famiglie di funzioni equicontinue ed equilimitate, che stanno a fondamento di quei tali metodi della Scuola di CESARE ARZELÀ].

Ed il CINQUINI dovrebbe anche sapere che uno dei motivi conduttori della Matematica è la costruzione di sistemi ipotetico-deduttivi sempre più astratti, e perciò dominanti in un'unica visione sintetica sempre più ampia un numero sempre maggiore di fatti o di intere teorie.

Ora i teoremi generali di BIRKHOFF e KELLOGG [ritrovati indipendentemente da CACCIOPPOLI, che naturalmente ha riconosciuto la priorità di questi Autori ([50])], di SCHAUDER, di CACCIOPPOLI e di altri rappresentano il fondamento comune di tante questioni esistenziali dell'Analisi matematica. Sicchè il ricondurre un risultato staccato (o un procedimento) nell'ambito di uno di quei teoremi (o di uno di quei procedimenti dimostrativi) ha un maggior valore filosofico che non il dimostrare elementarmente un risultato contenuto in una teoria più vasta.

Ma il CINQUINI è proprio del parere contrario [« . . . se pur i teoremi da noi stabiliti per via elementare si possono ritrovare anche con mezzi più elevati [*ma l'interessante sarebbe proprio il viceversa* ([51]) !] ciò non è una semplice "conseguenza„ come il prof. SCORZA DRAGONI va sentenziando con molta facilità

([49]) Nella nota ([41]) si allude a quest' ultimo passo.
([50]) loc. cit. ([10]), pag. 499.
([51]) Il carattere corsivo nell' originale è sostituito dal rotondo.

e con irriducibile insistenza, ma richiede la pubblicazione di lavori che riempiono parecchie pagine», loc. cit. ([4]), nota [XVII]) a piè di pag. 220 ([52])].

Naturalmente le considerazioni generali, che ho fatto, si prestano, appunto perchè generali, ad essere svisate. Per evitare che il CINQUINI si dedichi a questa attività, non sarà inopportuno fissare in modo esplicito alcune cose, altrimenti superflue: che il ritrovare elementarmente un risultato, già noto per altra via più elevata, può avere il suo interesse (se non altro didattico); che in lavori di scoperta ogni metodo è ugualmente interessante; che una teoria particolare può essere spinta, mediante strumenti di ricerca particolarmente adatti ad essa, più avanti che non una corrispondente teoria generale, i risultati della teoria particolare avendo sempre il loro bravo valore filosofico; che un progresso realizzato in una teoria particolare si può riflettere in uno per la teoria generale ([53]), e quindi in altri per altre teorie particolari, ecc.

Un esempio di quest' ultimo fatto è fornito proprio dalle ricerche mie e di CACCIOPPOLI. I risultati che ho ottenuti, diciamo, elementarmente nella mia Tesi di Laurea ([54]) sul problema al contorno $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ per equazioni differenziali del 2° ordine, sono stati per CACCIOPPOLI [sebbene non appaia esplicitamente dalla sua Nota citata in ([9]), e la cosa sarebbe

([52]) Ecco il testo completo della nota :

« Mettiamo ancora in rilievo che lo ZWIRNER impiega una Nota di nove pagine [da noi citata in [XV])]» [e qui in ([40])] «per mostrare che il nostro teorema citato in [III]) è " conseguenza ,, dell'osservazione di CACCIOPPOLI : è dunque ben evidente che, se pur i teoremi ... ».

Se si ripiglia il computo delle pagine del lavoro di ZWIRNER, con lo stesso criterio tenuto nel n. 25 per la mia Nota *A*), si trova che la dimostrazione è lunga quattro pagine e mezza e che anch'essa sviluppa *ex novo* tutti i dettagli della deduzione di BIRKHOFF–KELLOGG–SCHAUDER–CACCIOPPOLI, applicandola al caso in esame (naturalmente, sebbene non sia detto, sempre per comodità del lettore).

([53]) Purtroppo però (purtroppo non per me, naturalmente) un progresso nella teoria generale si riflette di solito in un progresso per parecchie teorie particolari.

([54]) Memoria *II*), loc. cit. in ([25]).

stata fuori luogo] l' occasione per dedicarsi alle sue ricerche sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali; come corollari di queste egli ha formulato due teoremi su quel problema ([55]), che esulavano da quelli da me indicati; di questi due teoremi io ho dato (estendendoli, ma rinunciando per uno alle quistioni di unicità) due dimostrazioni, diciamo, elementari ([56]), che mi hanno condotto a riunirli in un unico enunciato ([57]), dimostrato, diciamo, elementarmente ([58]); il quale mi ha servito di modello per formulare un nuovo teorema d' esistenza circa i punti uniti di una trasformazione funzionale ([59]).

**32.** - «... tenuta presente la dimostrazione del Brusotti, *è pacifico che per stabilire tutti i teoremi esistenziali per i problemi di valori al contorno... non c' è alcun bisogno... nemmeno di usufruire della topologia degli spazi a un numero finito di dimensioni...*».

Piano! bisognerebbe essere intanto sicuri che la dimostrazione del Brusotti non presenti in forma algebrico-geometrica dei fatti topologici nella loro essenza [cfr. nota ([30])]. Io sono un po' esigente in proposito: per me (e non soltanto per me, credo) già il teorema sull' esistenza degli zeri di una funzione continua che assuma valori di segno contrario in un intervallo è un particolare travestimento analitico di fatti squisitamente topologici ([60]).

(55) Uno nella Memoria *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicità ed alcune sue applicazioni* [«Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Padova», vol. III (1932), pagg. 1–15], n. 4; l'altro nel n. 2 della Nota citata in (10).

(56) Si veggano i §§ 1 e 2 della Memoria *D*) citata in (12) ed il § 2 della Memoria *E*) citata in (17).

(57) Memoria *D*), § 3; Memoria *E*), n. 4.

(58) È poi dimostrato più semplicemente da L. Tonelli in *Sull' equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$ [«Annali della R. Scuola Normale di Pisa», vol. VIII (1939), pagg. 75–88].

(59) Nella Nota:

*I*) *Un teorema d' esistenza per gli elementi uniti di una trasformazione funzionale*

[che verrà pubblicata in questi «Rendiconti»].

(60) *Un' immagine continua di uno spazio topologico connesso è connessa* [cfr. Alexandroff e Hopf, loc. cit. (30), pag. 53].

Del resto, diamo pure temporaneamente per pacifico quello che il CINQUINI desidera. E con ciò? Vi è forse per questo un rigo da mutare nella mia osservazione, riportata nel n. 19? Tutt' al più nel senso che il CINQUINI ha ancora una volta rinunciato ad evitare l' uso della topologia: ha preferito cedere il compito al BRUSOTTI.

**33.** - «... *per stabilire tutti i teoremi esistenziali per i problemi di valori al contorno ..., non c' è alcun bisogno di ricorrere alle considerazioni di analisi funzionale dovute a* BIRKHOFF *e* KELLOGG (e riprese otto anni dopo da R. CACCIOPPOLI ...), *ma nemmeno ...* ».

Potrei dire (cfr. il passo citato nel n. 19) che io ero disposto ad ammettere che la cosa era facilmente prevedibile *a priori*.

Ma intendo qui precisare meglio come vada guardata la questione.

Nel mio passo citato nel n. 19, forse per essere sintetico o forse perchè non ho mai preso l' impegno di muovere al CINQUINI tutti gli appunti possibili, ho lasciato in ombra un lato essenziale della questione.

Ora è opportuno metterlo in luce.

Il problema di NICOLETTI si può in sostanza ricondurre al teorema I) per le equazioni differenziali, ordinarie, di tipo normale, i cui integrali dipendano con continuità dai valori iniziali (non occorrono qui dettagli ulteriori). L' equivalenza fra il teorema I) e il teorema di BROUWER, riconosciuta da MIRANDA, permetteva (una volta in possesso del teorema d' esistenza e di dipendenza continua per le soluzioni del problema dei valori iniziali) di completare lo studio del problema di NICOLETTI per un' equazione, soddisfacente a quelle condizioni e d' ordine $n$, sfruttando la topologia uni —, bi —, ..., $(n - 1)$ — dimensionale.

Ma per estendere i risultati che così si ottengono a casi in cui quella dipendenza continua manchi, CINQUINI ricorre a dei procedimenti di approssimazione, considera successioni di funzioni equicontinue ed equilimitate, applica a queste il teorema di ASCOLI (cioè ne sfrutta una proprietà di compattezza), ...; tutte cose elementari, se si vuole, ma che disgraziatamente sono procedimenti di stretta pertinenza dell' analisi funzionale. Tant' è vero che il contenuto astratto del procedimento d' approssimazione del SEVERINI utilizzato dal CINQUINI ha il suo fondamento in « una proposizione elementare di analisi funzionale, del tutto intuitiva e sostanzialmente formulabile come segue: *L' esistenza di elementi uniti si conserva, nel passare al limite in una successione uniformemente convergente di trasformazioni continue di uno spazio metrico in sottoinsiemi di una sua porzione compatta* » [cfr. la prefazione della mia Memoria *E*), cit. in (17)] (61).

(61) Nel lavoro *d*) citato in (28) ZWIRNER chiude la prefazione dicendo « La questione quindi si esaurisce mantenendosi nell' ambito della topologia piana ».

A questa affermazione egli è stato condotto dal paragonare la dimostrazione là data con quella costruita da CACCIOPPOLI in (9). Quivi CACCIOPPOLI usa il teorema di BROUWER sui punti uniti delle trasformazioni continue in sè degli elementi uni –, bi –, ... *n* –, .... dimensionali e il teorema di ASCOLI « ma non presuppone nessuna conoscenza sulle soluzioni dell' equazione ... » [ Nota *d*), loc. cit. (26), pag. 150 ]; ZWIRNER, presupposto il teorema d' esistenza pel problema dei valori iniziali, usa mezzi di topologia piana nel caso che gl' integrali della sua equazione dipendano con continuità dai valori iniziali, per poi ricorrere a procedimenti d' approssimazione (e quindi a un' applicazione del teorema di ASCOLI).

Ma questo ZWIRNER lo ha fatto rilevare implicitamente nel penultimo alinea di quella prefazione, dicendo « la condizione di LIPSCHITZ si elimina poi facilmente con procedimenti noti »; e nella chiusa di quella Nota, dicendo « di qui segue, mediante noti procedimenti di approssimazione, che la condizione di LIPSCHITZ può essere soppressa senza che il teorema dimostrato perda la sua validità ».

È quindi chiaro in che senso vadano intese quelle frasi dello ZWIRNER e quella che là aggiunge nella nota IV) a piè di pag. 151; « Il procedimento non sembra legato al carattere bidimensionale del problema, a patto di ricorrere alla nozione di ordine di un punto rispetto ad una varietà », a meno di non volerle far essere inesatte per forza. Precisamente, vanno intese nel senso che: egli risolve il problema nel caso lipschitziano mediante la topologia piana, presupponendo noto il teorema d' esistenza e di dipendenza continua pel problema dei valori iniziali; nel caso generale, approssimandolo mediante problemi sempre risolubili mediante la topologia piana; di guisa che anche il caso generale presenta delle caratteristiche bidimensionali [gli equivoci in cui può far cadere questa frase saranno chiariti meglio nel n. 36 ]. Non vanno certo intese nel senso che lo ZWIRNER ritenesse di avere completamente eliminato l' uso di procedimenti di analisi funzionale.

Nello stesso senso va quindi interpretato quel mio « ... Quello che rima-

Sicchè, anche ammesso che la dimostrazione del BRUSOTTI non implichi sostanzialmente la topologia degli spazi euclidei [ma si tenga presente la nota ([30])], il CINQUINI ha intanto sempre bisogno di ricorrere nelle sue ricerche proprio a considerazioni di analisi funzionale, anche se non le esprime col linguaggio della teoria degli spazi topologici astratti.

In quanto precede è implicito che al giorno d'oggi io modificherei le ultime righe della mia nota V) della $A$), riportata nel n. 19; ma le modificherei in modo che il CINQUINI non ci avrebbe nulla da guadagnare nel cambio.

E' poi evidente che questi cambiamenti non lederebbero nella sostanza quello, che nel n. 9 ho detto a proposito di quella postilla. Essa sintetizzava fedelmente la situazione creata dal modo di procedere del CINQUINI. Lasciava nell'ombra uno degli aspetti teorici del problema, ma che era irrilevante nei riguardi degli scopi, che allora mi ero proposto nel redigere quella postilla.

**34.** – Perchè sia più chiaro o, meglio, più efficace quello che dirò in seguito, non sarà male esporre in che cosa si traduca, per es., il metodo generale usato da CACCIOPPOLI in ([9]) [e risalente nella sostanza al lavoro di BIRKHOFF e KELLOGG citato in ([7])], quando lo si applichi al problema (1). Dopo di che lo paragoneremo con quello che si verrebbe a costruire utilizzando il teorema 1) ed i procedimenti d'approssimazione del SEVERINI.

Considero un caso semplice: quello che in tutto $S$ sia

$$(9) \qquad |f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})| \leq \mu(x),$$

con $\mu(x)$ sommabile in $I$: $a \leq x \leq b$. Suppongo inoltre, come è abituale, $f$ misurabile rispetto ad $x$ e continua rispetto ad

ne, si è che per il problema di NICOLETTI... basta la topologia uni –, bi –, ..., $(n-1)$ – dimensionale .... », cfr. n. 19; tant' è vero che in quel passo io rimando proprio al lavoro $d$) dello ZWIRNER [cfr. n. 19; ma vedi anche l' originale, in loc. cit. ([5]), nota V) a piè di pag. 204], la lettura del quale eliminerebbe ogni eventuale equivoco; – ma si veda anche quanto dico alla fine del n. 33 –.

$(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$. Il problema (1) equivale [cfr. $A$), loc. cit. (5), n. 1] a quello di determinare una funzione unita nella trasformazione funzionale

$$\vartheta(x) = F[\tau(x)] =$$

$$= \sum_1^n {}_i \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})\ (x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})\ (x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_a^{t_2} dt_1 \int_a^{t_1} f(t, \tau(t), \ldots, \tau^{(n-1)}(t))\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_a^{x_i} dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_a^{t_2} dt_1 \int_a^{t_1} f(t, \tau(t), \ldots, \tau^{(n-1)}(t))\, dt \right\},$$

la quale trasformazione risulta continua nello spazio metrico $\Sigma$ delle funzioni continue nell' intervallo $I$ insieme con le prime $n - 1$ derivate, la distanza fra due punti $h(x)$ e $k(x)$ di $\Sigma$ essendo data dalla somma $\max |h(x) - k(x)| + \max |h'(x) - k'(x)| + \ldots + \max |h^{(n-1)}(x) - k^{(n-1)}(x)|$, massimi presi in $I$ naturalmente.

Ciò premesso, dividiamo $I$ in $2^p$ parti uguali $(p = 1, 2, \ldots)$ e consideriamo una funzione $\varphi_p(x)$ [di $\Sigma$], con derivata $(n - 1)$ — esima continua in $I$ e lineare in ciascheduna di quelle parti, la quale soddisfaccia alle

$$\varphi_p(x_1) = \ldots = \varphi_p(x_n) = 0, \tag{10}$$

e poniamo

$$\psi_p(x) = F_p[\varphi_p(x)] = F[\varphi_p(x)], \tag{11}$$

di guisa che $\psi_p(x_1) = \ldots = \psi_p(x_n) = 0$, da cui, tenuto conto anche della (9) e della (11),

$$|\psi_p(x)| \leq L,\ |\psi_p'(x)| \leq L, \ldots, |\psi_p^{(n-1)}(x)| \leq L \quad (a \leq x \leq b), \tag{12}$$

con $L$ costante opportuna.

Se interpretiamo i valori assunti da $\varphi_p(x)$, $\varphi_p'(x)$, ..., $\varphi_p^{(n-1)}(x)$ nei $2^p+1$ estremi degli intervalli in cui si è suddiviso $I$, e quelli analoghi assunti ivi da $\psi_p(x)$, $\psi_p'(x)$, ..., $\psi_p^{(n-1)}(x)$ come coordinate risp. di due punti $P_p$ e $Q_p$ dell' $S_w$ reale, euclideo, con $w=(2^p+1)n$, la (11) si traduce in una dipendenza continua di $Q_p$ da $P_p$, mentre le (12) ci dicono che questa trasformazione $P_p \to Q_p$ muta *tutto* l' $S_w$ in una sua porzione limitata. Dal teorema di Brouwer segue allora subito che per ogni $p=1, 2, \ldots$ è possibile trovare una $\overline{\varphi}_p(x)$ tale, che per essa i punti $\overline{P}_p$ e $\overline{Q}_p$ corrispondenti coincidano. Val quanto dire, tale che $\overline{\varphi}_p^{(i)}(x)$ e $\overline{\psi}_p^{(i)}(x)$ $[i=0, \ldots, n-1;\ \overline{\varphi}_p^{(0)}=\overline{\varphi}_p,\ \overline{\psi}_p^{(0)}=\overline{\psi}_p]$ coincidano negli estremi di quei tali intervallini.

In virtù della (9) e della (11), le $\overline{\psi}_p^{(n-1)}(x)$ sono equicontinue, mentre poi sono equilimitate per l' ultima delle (12); in virtù della loro linearità e della $\overline{P}_p=\overline{Q}_p$ sono quindi equicontinue anche le $\overline{\varphi}_p^{(n-1)}(x)$, mentre la loro equilimitazione discende vuoi dalle (10) e dalla loro equicontinuità, vuoi dalla loro linearità, dall' ultima delle (12) e dalla $\overline{P}_p=\overline{Q}_p$. Risalendo si riconosce che sono equicontinue ed equilimitate anche le $\overline{\psi}_p^{(i)}(x)$, $\overline{\varphi}_p^{(i)}(x)$, per $i=0, \ldots, n-2$. Per una conveniente successione di numeri naturali $p_1$, $p_2$, ... potremo quindi supporre che le due successioni $\overline{\varphi}_{p_r}(x)$ e $\overline{\psi}_{p_r}(x)$ convergano (in $\Sigma$!) verso due limiti $\overline{\varphi}_0(x)$, $\overline{\psi}_0(x)$ [teorema d' Ascoli, cioè compattezza rispetto a $\Sigma$ dei due insiemi descritti risp. da $\overline{\varphi}_p(x)$ e $\overline{\psi}_p(x)$].

In tal caso $\overline{\varphi}_{p_r}^{(i)}(x)$ e $\overline{\psi}_{p_r}^{(i)}(x)$, con $i=0, \ldots, n-1$, tendono uniformemente verso due limiti uguali. In particolare avremo $\overline{\varphi}_0(x)=\overline{\psi}_0(x)$, e la (11) diventa $\overline{\varphi}_0(x)=F[\overline{\varphi}_0(x)]$. Ma le (10) sono soddisfatte da tutte le $\overline{\varphi}_p(x)$, sicchè $\overline{\varphi}_0(x)$ è unita nella $\vartheta(x)=F[\tau(x)]$ e si annulla per $x=x_i$, $(i=1, \ldots, n)$.

La deduzione è estremamente elegante e, come si vede, essa richiede soltanto la conoscenza del teorema d' Ascoli e del teorema di Brouwer per gli spazi euclidei ad un numero comunque elevato di dimensioni [oltre naturalmente al teorema del passaggio al limite sotto il segno d' integrale lebesguiano e i teoremi fondamentali della teoria della misura].

**35.** - Non starò a sviluppare il procedimento da seguire per ottenere lo stesso risultato ricorrendo al teorema I) e ai metodi d'approssimazione ispirati a quelli del SEVERINI. Ne indicherò le linee essenziali.

Per quel procedimento occorrono:

il teorema d'esistenza e d'unicità (e quindi di dipendenza continua) per gli integrali della

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)),$$

verificanti certe condizioni iniziali, nell'ipotesi suppletiva che $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ soddisfaccia ad una condizione di LIPSCHITZ generalizzata [teorema di CARATHÉODORY];

la deduzione, applicando il teorema precedente, e il teorema I) [facendovi $q = n - 1$ in questo caso], dell'esistenza di una soluzione del problema al contorno considerato, nell'ipotesi che $f$ soddisfaccia a quella tal condizione suppletiva;

l'approssimazione [62] di una funzione $f$, non soddisfacente

[62] Esaminerò soltanto un caso particolare. Si supponga $n = 3$. Allora per costruire la $f_p(x, u_0, u_1, u_2)$, per $p = 1, 2, \ldots$, si può procedere nel modo che segue [cfr. ZWIRNER, nota $c$), citata in (24)]. Si decomponga ogni iperpiano $x = \bar{x}$ $(a \leq \bar{x} \leq b)$ in cubi mediante i piani $u_0 = \frac{r}{p}$, $u_1 = \frac{r}{p}$, $u_2 = \frac{r}{p}$ $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ e sia $T$ uno di questi. Nei quattro spigoli paralleli all'asse delle $u_0$ si definisca la $f_p$ in base alle condizioni di essere lineare (in $u_0$) e di coincidere con la $f$ negli estremi; dopo di che la $f_p$ sarà individuata anche nelle faccie di $T$ parallele al piano $u_0 u_1$, se le si impone di essere ivi lineare nella $u_1$; ed infine in tutto $T$ in base alla condizione di essere lineare in $u_2$.

È facile presumere che si potrebbe decomporre ogni iperpiano $x = \bar{x}$ in «simplessi» [cioè in triangoli, se $n = 2$; in tetraedri, se $n = 3, \ldots$] invece che in cubi. Per es., per $n = 2$ si procederebbe in questo modo. Fissato $p$, si suddividerebbe ogni piano $x = \bar{x}$ $(a \leq \bar{x} \leq b)$ in quadrati mediante le rette $u_0 = \frac{r}{p}$, $u_1 = \frac{r}{p}$ ed i quadrati in triangoli mediante le diagonali parallele alla retta $u_0 = u_1$, e si definirebbe $f_p$ imponendole d'essere lineare in $u_0$, $u_1$ in ciascuno di quei triangoli e di coincidere con la $f$ nei vertici del triangolo stesso. Una simile successione $f_1, f_2, \ldots$ è stata appunto sfruttata da ZWIRNER in:

a quella tal condizione suppletiva, mediante una successione di funzioni $f_1, f_2, \ldots$ dello stesso tipo della $f$ [in particolare sod-

*g*) *Un' osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali*
[«Bollettino dell' Unione mat. it.», serie II, vol. I (1939), pagg. 334-336].

Per i conoscitori delle teorie di cui si discorre è risaputissimo che le funzioni $f_1, f_2, \ldots$ considerate dallo ZWIRNER in *g*) convergono verso la $f$, in virtù della continuità della $f$ rispetto ad $u_0$, $u_1$; essi sanno pure che, se è soddisfatta la (9), le $f_p$ sono minori in modulo di $\mu(x)$ e soddisfanno ad una condizione di LIPSCHITZ generalizzata.

Chiunque abbia una certa conoscenza del metodo di SEVERINI [e del teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale di LEBESGUE] e che osservi che le $f_p$ risultano misurabili nella $x$ oltre che continue in $(u_0, u_1)$, è subito disposto a concedere che dall' esistenza di una soluzione del problema

$$y''(x) = f_p(x, y(x), y'(x)) \, ; \quad y(x_0) = y_0 \, , \; y(x_1) = y_1$$

[esistenza che si può stabilire con metodi analoghi a quelli seguiti da me in *H*), loc. cit. ([25])] ne debba seguire quella per una soluzione del problema

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \, ; \quad y(x_0) = y_0 \, , \; y(x_1) = y_1 \, .$$

Ed è appunto questo che lo ZWIRNER dimostra in *g*).

Quanto ho detto basta già per far comprendere ai competenti quanto sia ridicola la rivendicazione di priorità che il CINQUINI fa a danno dello ZWIRNER [nella nota XV) a piè di pag. 283 della Memoria VII) citata in ([18])] con questi termini:

«Durante la revisione delle bozze del presente lavoro ho preso visione» della Nota *g*) «di G. ZWIRNER nella quale l' A. dà una dimostrazione di carattere elementare» di un teorema «dello SCORZA DRAGONI» [Memoria *E*), citata in ([17]), n. 6]. «Il risultato ottenuto dallo Zwirner in tale Nota, la quale trae la sua naturale origine dalla mia precedente Memoria» [la I)] «(*non* citata da tale A.), è quindi contenuto, come caso particolare, nella proposizione del n. 1 del presente lavoro. Inoltre (per quanto la dimostrazione dello ZWIRNER presenti alcune varianti rispetto a quella del n. 1 del presente lavoro, nella quale io mi sono attenuto al metodo seguito nel § 1 della mia precedente Memoria)» [la I)], «lo ZWIRNER ha utilizzato proprio il procedimento (opportunamente semplificato) di approssimazione che io avevo seguito, in condizioni diverse, nel § 2 della stessa mia Memoria e che ho ripreso, nel n. 2 del presente lavoro, con opportune varianti per superare nuove e maggiori difficoltà» [a proposito delle quali si veda quanto dico nei nn. 13 e 14 e nella nota ([22])]. «Ma lo ZWIRNER non cita affatto la mia Memoria della quale ben conosceva l' esistenza, come risulta dal contenuto disfacenti tutte ad una disuguaglianza analoga alla (9)], e siffatte che quella tale condizione suppletiva sia da esse verificata;

la considerazione del problema (1) per ciascuna delle equazioni approssimanti $y^{(n)} = f_p$;

la dimostrazione che dalle soluzioni del problema (1) per le equazioni approssimanti, se ne può estrarre una successione convergente verso una soluzione dello stesso problema per la $y^{(n)} = f$ ([63]).

della Sua nota [II]) a piè della pag. 335... ».

Come ho già detto, quella tale rivendicazione di priorità non sarà mai presa sul serio dai competenti. Ma ci sono anche degli incompetenti. A questi farò sapere [cosa che il CINQUINI tace nella nota [XV]) della VII) su riportata] che nella Nota *g*) lo ZWIRNER avverte che dimostrerà il teorema del n. 6 della mia Memoria *E*), ricorrendo ai teoremi di CARATHÉODORY ed «applicando noti procedimenti di approssimazione» e che nella nota [II]) a pag. 335 di *g*) [cioè nella nota ricordata da CINQUINI nella sua [XV]) di VII)] lo ZWIRNER rimanda alla mia Memoria *E*) per altra bibliografia; che nella mia Memoria *E*) sono citate le ricerche di SEVERINI, MÜLLER, MINZONI e CINQUINI (ed è indicato il teorema generale che soggiace al metodo ideato dal SEVERINI).

([63]) In definitiva «il procedimento elementare che» CINQUINI «ha sviluppato nei suoi lavori e che trae il suo spunto dalle note ricerche di C. SEVERINI» (cfr. n. 30) si basa:

α) su un teorema d'esistenza (e di dipendenza continua) di CARATHÉODORY;

β) su una riduzione del problema di NICOLETTI al teorema I), che è stata posta in luce dallo ZWIRNER pei problemi bidimensionali nei lavori *c*), *d*), *e*), nel secondo dei quali lo ZWIRNER dice che il procedimento tenuto non sembra legato al carattere bidimensionale del problema [i lavori *d*) ed *e*) sono citati dal CINQUINI nella nota [V]) a piè di pag. 63 della Memoria V), citata in ([14]); il lavoro *e*) è citato nell'osservazione al n. 8) della Conferenza VI), citata in ([16]); l'unica citazione esplicita del lavoro *c*) ch'io abbia trovato nelle Memorie del CINQUINI è invece quella che compare nella nota [XIV]) a piè di pag. 219 della III), loc. cit. ([4])];

γ) sul teorema I), di cui finora si conoscono tre dimostrazioni di BROUWER, di MIRANDA e di BRUSOTTI, per tacere di quelle che si debbono poter dare sviluppando le considerazioni accennate nella nota ([30]) ed alla fine nel n. 23 [adesso le dimostrazioni del teorema I) sono aumentate: si vedano i lavori miei e di ZWIRNER citati alla fine della nota ([30]) e nella postilla (*) del n. 23 (aggiunto sulle bozze di stampa)].

ε) su lemmi di BERNSTEIN, CINQUINI, GRONWALL, NAGUMO, SATÔ, TONELLI, ZWIRNER atti ad assicurare che, sotto certe ipotesi, gli

Naturalmente nelle deduzioni precedenti bisogna applicare quello stesso teorema d' ASCOLI, quello stesso teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale che sono stati sfruttati nel n. prec....

**36.** – Ed ora guardiamo l' essenza dei due procedimenti, tenuti per dimostrare l' esistenza di un elemento unito nella

$$\vartheta(x) = F[\tau(x)],$$

definita nel n. 34, cioè di una soluzione del problema (1).

CACCIOPPOLI approssima, diciamo, la $\vartheta = F[\tau]$ mediante una successione di trasformazioni $\psi_1 = F_1[\varphi_1]$, $\psi_2 = F_2[\varphi_2], \ldots$ che interpreta come trasformazioni $T_1$, $T_2 \ldots$, operanti su spazi euclidei $S_{3n}$, $S_{5n}$, $S_{9n}$, ..., aventi cioè dimensioni tendenti all' infinito. Dimostra, col teorema di BROUWER per gli spazi euclidei, che la $T_p$ ammette almeno un punto unito. Passa al limite, e fa vedere, che l' esistenza dell' elemento unito si conserva nel fare questo passaggio.

Sicchè il procedimento di CACCIOPPOLI ci presenta il teorema d' esistenza del problema (1) sotto una luce nuova. Esso ci fa apparire quel teorema come una estensione del teorema di BROUWER allo spazio a infinite dimensioni $\Sigma$ ed alla trasformazione $\vartheta = F[\tau]$ di questo in una sua parte [CACCIOPPOLI stesso nel n. 3 di loc. cit. (9) diceva già: «Il nostro teorema estende allora in sostanza quello di BROUWER allo spazio hilbertiano; e si applica subito anche in questa forma alla dimostrazione dell' esistenza degli integrali di un' equazione differenziale»]; e lo

integrali di un' equazione differenziale normale, d' ordine $n$, soddisfacenti alle condizioni di NICOLETTI si mantengono limitati insieme colle prime $n-1$ derivate.

δ) sulla considerazione di equazioni approssimanti, dovuta al SEVERINI.

In conclusione credo che l' «utilità» che il CINQUINI ha tratto o avrebbe potuto trarre [bisogna adoperare il condizionale, poichè, a quanto sembra, il CINQUINI non ha letto con sufficiente attenzione le Note dello ZWIRNER] da coloro che hanno contribuito a sviluppare quel metodo è certo molto maggiore di quella, ch'io non abbia avuto dalle sue elementari ricerche e per la quale rimando alla fine del n. 29.

pone in relazione con quel mio risultato d'analisi funzionale già ricordato nel n. 33 e peraltro posteriore alle ricerche di CACCIOPPOLI – quest' ultima osservazione non avrà alcun interesse per il seguito –.

Nel n. 35 abbiamo approssimato la $\vartheta = F(\tau)$ mediante una successione di trasformazioni funzionali $\vartheta = F_1^*(\tau)$, $\vartheta = F_2^*(\tau)$,... – dove $\vartheta = F_p^*(\tau)$ è la trasformazione funzionale che, pel problema al contorno approssimante, ha lo stesso ufficio che la $\vartheta = F(\tau)$ ha pel problema (1) –. Per la $\vartheta = F_p^*(\tau)$ si è in possesso del teorema d'esistenza e di dipendenza continua dai valori iniziali del CARATHÉODORY. In base a questo, mediante il teorema I), per spazi a $n - 1$ dimensioni, o, il che fa lo stesso, appunto per l'osservazione di MIRANDA, mediante il teorema di BROUWER per spazi a $n - 1$ dimensioni, si dimostra che la $\vartheta = F_p^*(\tau)$ ammette sempre almeno un elemento unito. Si passa al limite; si riconosce che l'esistenza dell'elemento unito non si perde nel fare questo passaggio; si arriva quindi al teorema d'esistenza pel problema (1).

Il quale teorema si presenta quindi sotto un'altra luce. Esso è un'interpretazione del teorema di BROUWER per gli spazi ad $n - 1$ dimensioni.

CACCIOPPOLI aveva torto a credere d'avere esteso in loc. cit. ([9]) il teorema di BROUWER agli spazi hilbertiani (prescindo dalle questioni di priorità)? Abbiamo avuto torto a dire che il teorema d'esistenza per la (1) si presentava come un'estensione del teorema di BROUWER allo spazio $\Sigma$? Il problema (1) ha solo apparentemente caratteristiche dimensionali infinite?

E no, che diamine!

Il problema (1) ha caratteristiche dimensionali essenzialmente infinite.

Perciò nella nota ([81]) ho accennato ai possibili equivoci della terminologia dello ZWIRNER. Ma la terminologia è molto suggestiva e comoda, traduce un fatto reale [quello che gl' integrali di un' equazione d'ordine $n$, soddisfacente a certe condizioni di regolarità, costituiscono uno spazio a $n$ dimensioni, per così dire], e perciò l'ho adottata anche in questa Memoria.

**37.** – Ma prescindiamo pure dalle considerazioni del numero precedente; e paragoniamo i due metodi delineati nei nn. 34 e 35 da un altro punto di vista.

L' unico vantaggio che il metodo del n. 35 può vantare nei riguardi di quello del n. 34, si è che per trattare il problema (1) esso ha bisogno del teorema I) soltanto per $q = n - 1$ - naturalmente dato e non concesso che questo sia un vantaggio.

Ma d' altra parte, se vogliamo costruire la teoria del problema di Nicoletti per un' equazione d' ordine qualunque, dovremo pur presupporre la conoscenza del teorema I) per $q$ qualunque.

Ma il teorema di Brouwer è equivalente al teorema I), e l' equivalenza si stabilisce in modo immediato [Miranda, loc. cit. ([30])]. Inoltre Cinquini ha subito affermato che la dimostrazione del Brusotti per il teorema I) è semplice ed elementare, quindi il Cinquini deve ormai considerare [e considera di fatto ([64])] come elementarmente stabilito anche il teorema di Brouwer ([65]).

Sicchè la posizione mentale del Cinquini nei riguardi del problema di Nicoletti, studiato per equazioni differenziali d' ordine prefissato a piacere è la seguente:

α) deve in sostanza ammettere la conoscenza del teorema di Brouwer per spazi euclidei ad un numero qualunque di dimensioni, - conoscenza che, in virtù dell' osservazione di Miranda, non potrà mai superare, in quanto a profondità di pensiero, quella del teorema I) – ;

β) conosce un procedimento, quello del n. 34, che permette di dare una risposta affermativa al problema di Nicoletti [e non al problema di Nicoletti soltanto], applicando in maniera elegante, rapida e semplice il teorema d' Ascoli e il teorema di Brouwer (oltre a quello del passaggio al limite sotto l' integrale, naturalmente):

ma lui preferisce seguirne un altro

che non è più rapido (presuppone note cose che il me-

([64]) loc. cit. ([4]), pagg. 220.

([65]) Circa la possibilità, già nota da tempo, di dimostrare elementarmente il teorema di Brouwer, si rilegga quanto ho detto appunto nella nota ([41]).

todo del n. 34 può trattare simultaneamente al problema di NICOLETTI, e cioè una risposta al problema di CAUCHY);

che non è più semplice;

che non si è rivelato finora capace di condurre a risultati e procedimenti così proteiformi come sono quelli che CACCIOPPOLI ed altri hanno dato, ispirandosi ad una visione geometrica dei problemi dell'analisi funzionale ([66]);

([66]) Non sarà male ricordare qui che una teoria particolare può essere spinta mediante l'uso di strumenti di ricerca particolarmente adatti ad essa, più avanti di una corrispondente teoria generale [e quindi che nei lavori di scoperta non bisogna lasciarsi tarpare le ali da un malinteso, diciamo, purismo]. Così, p. es., NICOLETTI, in *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie* [«Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», vol. XXXIII (1897-1898), pagg. 746-759], tratta (in piccolo) un problema per l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n} = G\left(x\ y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h \partial y^k}, \ldots\right),$$

ove $h = 0,1,\ldots,m$; $k = 0,1,\ldots,n$ e

$$h + k \leq m + n - 1;$$

mentre ZWIRNER in:

*h*) *Sopra il problema di* NICOLETTI *per una particolare classe di equazioni differenziali a derivate parziali*
[«Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Padova», vol. XIV (1943), pagg. 17-36], tratta lo stesso problema coi metodi di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI supponendo

$$h \leq m - 1,\ k \leq n - 1$$

- si noti che anche il SIBIRANI, in *Démonstration géometrique de l'existence de l'intégrale dans un type hyperbolique parabolique d'équations aux dérivées partielles* [Bulletin des Sciences Mathématiques, serie II, t. XXXIII (1909), pagg. 40-47], occupandosi di un problema alla CAUCHY per la stessa equazione, ha supposto anch'egli $h \leq m - 1$, $k \leq n - 1$. Il risultato di SIBIRANI è stato ritrovato ed esteso da ZWIRNER in:

*i*) *Condizioni sufficienti per l'esistenza degli integrali di un'equazione differenziale a derivate parziali a tipo iperbolico*
[«Atti dell'Istituto Veneto di Sc., Lett. ed Arti», tomo CII, parte II (1942-43), pagg. 329-350].

Naturalmente non sarebbe privo di interesse vedere se la trattazione svolta dallo ZWIRNER in *h*) si può atteggiare in modo da comprendere tutto che rispetto a quello sviluppato nel n. 34 può avanzare una sola pretesa gratuita di vantaggio ([67]): di richiedere l' uso

il risultato del NICOLETTI. Dico che non sarebbe privo di interesse, ma non dico che sarebbe necessario per giustificare la posizione da me assunta nel testo.

[E qui aggiungo qualche riga sulle bozze di stampa, per avvertire che la posizione da me assunta nel testo non è infirmata nemmeno dal fatto che il teorema, dato recentemente da G. ZWIRNER in *Sull' equazione* $y' = \lambda f(x, y)$ [questi «Rendiconti», questo volume], n. 1, con l' uso del metodo di BIRKHOFF–KELLOGG–SCHAUDER–CACCIOPPOLI, si può ottenere facilmente anche con procedimenti di altra natura, analoghi, p. es., a quelli utilizzati da me e da GRONWALL, nei lavori citati nella nota ([25]). Il risultato si può raggiungere sia previo un prolungamento dell' equazione, sia senza di questo. La prima deduzione è forse più rapida. Mi limiterò a un cenno in un caso particolare.

La funzione $f(x, u)$ sia continua in $(x, u)$, positiva e lipschitziana rispetto alla $u$ nel quadrato $R: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq u \leq 1$. Allora, secondo ZWIRNER, per un conveniente valore di $\lambda$ esiste una soluzione della $y'(x) = \lambda f(x, y(x))$, che valga $\alpha$ per $x = 0$ e $\beta$ per $x = 1$ $(0 \leq \alpha \leq 1,\ 0 \leq \beta \leq 1)$.

Infatti, si ponga $\varphi(x, u) = f(x, u)$, in $R$; $\varphi(x, u) = f(x, 0)$, se $u < 0$; $\varphi(x, u) = f(x, 1)$, se $u > 1$. La soluzione $y(x \mid \lambda)$ della $y'(x) = \lambda \varphi(x, y(x))$, che per $x = 0$ vale $\alpha$, è definita in tutto $0 < x \leq 1$. Inoltre $y(b \mid \lambda)$ è una funzione continua di $\lambda$, che tende $a - \infty$ e $+ \infty$, risp. per $\lambda \to -\infty$ e $\lambda \to +\infty$. Quindi esiste un $\lambda_0$ per cui $y(b \mid \lambda_0) = \beta$.

Dopo di ciò, attesa la $\varphi(x, u) > 0$, è facile riconoscere che $y(x \mid \lambda_0)$ è monotona; cioè sempre compresa fra $\alpha$ e $\beta$; e quindi fra 0 e 1; epperò $y(x \mid \lambda_0)$ è anche un integrale della $y'(x) = \lambda_0 f(x, y)$; ecc.

L' ipotesi della lipschitzianeità della $f(x, u)$ si elimina, al solito, col metodo di SEVERINI; ecc.

Allo stesso modo si tratta il caso più generale considerato da ZWIRNER].

([37]) Per converso, ripetiamolo, il metodo del n. 34 permette fra l' altro di dimostrare proprio quel teorema d' esistenza di CARATHÉODORY, di cui CINQUINI presuppone la conoscenza [per richiedere subito dopo anche quella del teorema di dipendenza continua].

Questo è forse il momento più adatto per avvertire che il problema di NICOLETTI e quello di CAUCHY si possono trattare simultaneamente, anche facendo ricorso al teorema I), ed eliminando anzi (se non altro per lo meno formalmente) l' uso delle equazioni approssimanti. L' osservazione mi è stata comunicata dallo STAMPACCHIA, che l' ha applicata in una Nota ancora inedita.

Ecco, in essenza, di che si tratta.

del torema I) in ispazi la cui dimensione è minore dell' ordine dell' equazione per cui il problema di NICOLETTI è posto, mentre

Costruiamo le funzioni approssimanti di CARATHÉODORY–TONELLI, relative al problema di CAUCHY per la $y^{(n)} = f$. A questo scopo, dividiamo l' intervallo $a \leq x \leq b$ in $p$ parti uguali mediante i punti $a = x'_0 < < x'_1 < \ldots < x'_{p-1} < x'_p = b$; poniamo $\delta = x'_1 - x'_0$; e, detti $\eta_0, \ldots, \eta_{n-1}$ dei parametri reali, indichiamo con $\eta$ l' $n$ — pla $(\eta_0, \ldots, \eta_{n-1})$ e con

$$\chi_p(x \mid \eta) \qquad\qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

la funzione, assolutamente continua in $a \leq x \leq b$ insieme con le sue prime $n - 1$ derivate, individuata ivi in modo ricorrente dalle posizioni

$$\chi_p(a \mid \eta) = \eta_0, \ldots, \chi_p^{(n-1)}(a \mid \eta) = \eta_{n-1}$$

e dalla condizione di avere la derivata $n$ - esima nulla in $x'_0 \leq x \leq x'_1$ e quasi ovunque uguale a

$$f(x - \delta, \chi_p(x - \delta), \ldots, \chi_p^{(n-1)}(x - \delta)) \qquad (x'_{i-1} \leq x - \delta < x'_i)$$

in $x'_i \leq x < x'_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, p)$ – si sottintende che $f$ soddisfaccia alle solite ipotesi, in particolare alla condizione semplificatrice espressa dalla (9) del n. 34 –.

Le funzioni $\chi_p(x \mid \eta)$ sono univocamemente determinate da $\eta$; epperò ne dipendono con continuità. Ebbene: si applichi il teorema I) non per dimostrare che esiste un' integrale di una conveniente equazione approssimante, che soddisfaccia alle condizioni al contorno volute, bensì per dimostrare che per ogni $p$ esiste almeno una $\chi_p(x)$ che soddisfaccia a quelle condizioni al contorno; e poi si dimostri che dalla successione ottenuta se ne può estrarre una convergente verso una soluzione del problema (1).

Il metodo del n. 34 e quello qui delineato differiscono grosso modo in ciò:

il primo considera una successione di classi $\{\varphi_1\}$, $\{\varphi_2\}, \ldots$ di funzioni soddisfacenti alle condizioni al contorno; e dimostra che da $\{\varphi_p\}$ si può estrarre una funzione $\varphi_p(x)$ in modo che la successione $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ sia atta (non dico a convergere ma) a fornire approssimazioni sempre migliori di una soluzione, cioè a fornire una sottosuccessione convergente verso una soluzione;

il secondo considera invece una successione $\{\chi_1\}$, $\{\chi_2\}, \ldots$ di classi di funzioni, notoriamente atte ad approssimare integrali della $y^{(n)} = f$ soddisfacenti (nel punto $a$, ma questo inciso, volendo, può essere soppresso) a l' altro ha bisogno del teorema di Brouwer per ispazi euclidei ad un numero qualunque di dimensioni.

Se al Cinquini piace assumere e compiacersi di mantenere posizioni mentali del genere, faccia pure; ma non dia ad intendere di avere *messo le cose a posto in modo chiaro e definitivo* (68).

condizioni di Cauchy prefissabili ad arbitrio; e dimostra che da $\{\chi_p\}$ si può estrarre una funzione $\chi_p(x)$ soddisfacente alle condizioni volute, con la presunzione, confermata nel fatto, di ottenere una successione atta a fornirne una parziale convergente verso una soluzione,

– insomma, il primo cerca delle approssimazioni tra le funzioni che soddisfanno ai vincoli imposti; il secondo cerca delle funzioni, che soddisfacciano ai vincoli, tra quelle che approssimano gli integrali della $y^{(n)} = f$ (sorvoliamo sulle inesattezze di questa frase) –;

il primo applica il teorema di Brouwer, cioè il teorema I), a spazi euclidei a un numero di dimensioni che tende all' infinito; il secondo applica il teorema I) a spazi (a $n-1$ dimensioni, se si dà il ruolo di valore iniziale per la $x$ a uno dei punti $x_1, \ldots, x_n$) a $n$ dimensioni (se, come si è fatto, si dà il ruolo di valore iniziale per la $x$ al punto $a$, e questo è diverso da $x_i$), ma richiede un teorema di dipendenza continua delle $\chi_p(x \mid \eta)$ da $\eta$; entrambi sfruttano, ciascuno a suo modo, la continuità in $\Sigma$ della trasformazione funzionale $\vartheta = F(\tau)$ del n. 34.

Credo che potrei esimermi dall' istituire altri confronti. L' istituirne non dovrebbe essere strettamente necessario nei riguardi della polemica. Ai fini di questa dovrebbe essere sufficiente quello che ho fatto nel testo: cioè aver paragonato *quei* due metodi che sono stati posti a raffronto dal Cinquini, ed a proposito dei quali il Cinquini ha espresso in modo inequivocabile la sua preferenza con l' intenzione di *mettere le cose a posto in modo chiaro e definitivo.*

Comunque non sarebbe inopportuno osservare che anche il metodo, esposto in questa nota, fa uso del teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale e del teorema di Ascoli (cioè di quegli stessi procedimenti che entrano in gioco nel n. 34); che il vantaggio di aver bisogno del teorema I) soltanto per ispazi la cui dimensione non superi l' ordine dell' equazione assegnata, diventa al solito molto illusorio non appena si richieda di studiare un qualunque problema di Nicoletti per equazioni d' ordine prefissato a piacere. Ma non vorrei essere frainteso. Non vorrei che queste mie righe fossero interpretate come espressione di un giudizio sfavorevole a proposito dell' idea di Stampacchia; la quale invece è indubbiamente molto elegante.

(68) Spero che siano ormai chiari i motivi, a cui alludo vagamente nella nota (30), e per cui a suo tempo ho sconsigliato allo Zwirner di insistere a

**38.** – «... ma vogliamo far presente che, *tenuto conto della nostra osservazione e del risultato del* MIRANDA, *la Nota del* BRUSOTTI *fornisce una dimostrazione elementare del teorema di* BROUWER».

Che la dimostrazione del teorema di BROUWER si potesse ricondurre a quistioni sui polinomi era già stato osservato da BIRKHOFF e KELLOGG (cfr. n. 23).

La dimostrazione che questi hanno dato pel teorema di BROUWER, è elementare alla stessa stregua di quella che BRUSOTTI ha dato per il teorema I).

## § 7.

**39.** - Riprendiamo quel «... se pur i teoremi da noi stabiliti per via elementare si possono ritrovare con mezzi più elevati... ciò non è una semplice "conseguenza", come il prof. SCORZA DRAGONI va sentenziando con molta facilità e con irriducibile insistenza, ma richiede la pubblicazione di lavori di parecchie pagine», già ricordato nel n. 31.

Ed incominciamo subito con un alto là. Io non ho mai parlato di «semplice conseguenza», come un lettore frettoloso potrebbe forse essere condotto a credere dalla lettura del CINQUINI. Io ho parlato sempre e soltanto di «conseguenze», mai di «co-

percorrere quella strada che aveva aperta coi lavori *c*), *d*), *e*). Rimane fermo beninteso che i lavori di ZWIRNER hanno due pregi: quello di avere mostrato per primi come il metodo, basato sul teorema I), che io avevo seguito in *H*), loc. cit. ([25]) [utilizzando il teorema I) per $q = 1$], si poteva estendere a problemi più generali; di avere sviluppato questa estensione in casi didatticamente interessanti (perchè bidimensionali).

Non sarà inopportuno osservare che per dare un simile consiglio non era necessario aspettare (come peraltro non ho aspettato) che MIRANDA riconoscesse equivalenti il teorema I) e la classica proposizione di BROUWER. Non era necessario, perchè la strada che si apriva spontaneamente dopo i lavori *c*), *d*) ed *e*) di ZWIRNER si poteva seguire «a patto di ricorrere alla nozione di ordine di un punto rispetto ad una varietà» [e quindi a patto di ricorrere al teorema classico di KRONECKER sulla risoluzione di un sistema di equazioni non lineari], cioè a patto di ricorrere a strumenti che permettono di dimostrare il teorema di BROUWER.

rollari» ! Con ciò naturalmente non è escluso che a taluno quelle «conseguenze» possano sembrare, in tutto o in parte, dei «corollari».

Che quelle «conseguenze» siano poi «conseguenze» è stato dimostrato in lavori, contro i quali il Cinquini finora non ha saputo muovere nessuna obbiezione più seria di quella di contarne le pagine, nel modo che a lui è piaciuto di più, andandone cioè a guardare il numero complessivo, senza preoccuparsi di vedere quante erano quelle veramente e solamente dedicate alla deduzione [cfr. il n. 25 e la nota (52)].

**40.** - Ma v' è dell' altro.

Dal lavoro *f*) di Zwirner citato in (40), è facile vedere che il teorema dato dal Cinquini in V), loc. cit. in (14), n 1, ed al quale il Cinquini nella III) riconduce il mio teorema di *A*) [credendo con ciò di darmi una lezione, cfr. § 1], è una *conseguenza immediata* del teorema di Birkhoff - Kellogg - Schauder - Caccioppoli (69).

Anzi, adesso che il Cinquini ha creduto opportuno «sentenziare», senza accorgersi o per lo meno tacendo che il farlo dopo quelle mie ventuno righe o dopo quella mia Oss. II) di *A*) era un portare vasi a Samo: «... è bene ricordare che tale risultato dello Scorza Dragoni è *effettivamente* un' immediata conseguenza anche del teorema di Birkhoff e Kellogg da noi citato in VI)» [III), loc. cit. (4), pag. 219], adesso egli non può più stare a cavillare intorno a certe accezioni della parola «conseguenza», a meno di non ritrattarsi poco decentemente. Ebbene: sappia ora che nelle ultime righe dell' Oss. IV) di *A*) è appunto implicito che il suo risultato del n. 1 di V) non è soltanto «conseguenza», ma è anche «*conseguenza*

(69) La cosa è ancora più evidente se si guarda all' altro lavoro di Zwirner:

*l*) *Un criterio d' esistenza relativo a un problema al contorno per un' equazione differenziale ordinaria d' ordine n*
[« Rendiconti della R. Acc. d' Italia », vol. III (1942), pagg. 217-222; se ne veda specialmente il n. 2].

*immediata*» del teorema di BIRKHOFF - KELLOGG - SCHAUDER - CACCIOPPOLI (70): ivi infatti pongo implicitamente in rilievo che la mia

(70) Rammentiamo che in III) il CINQUINI ha scritto [alle pagg. 217–218, cfr. il n. 12 di questa mia]:

«... al solo scopo di non usufruire di un risultato stabilito da BIRKHOFF e KELLOGG VI) mediante considerazioni di analisi funzionale...»;

e rammentiano ch' egli ivi ha scritto anche [alla pag. 220; cfr. peraltro il n. 30 di questa mia]:

«... *per stabilire tutti i teoremi esistenziali per i problemi di valori al contorno* (relativi a equazioni differenziali ordinarie ed anche a sistemi di tali equazioni), dovuti non solo a noi ma anche ad altri autori XVIII), *non c' è alcun bisogno di ricorrere alle considerazioni di analisi funzionale dovute a* BIRKHOFF *e* KELLOGG...»

Ora non vorrei che il CINQUINI avesse l'improntitudine di basarsi sulle parole ricordate per sostenere che in esse è implicito che anch' egli si era accorto che il suo teorema del n. 1 di V) era conseguenza *immediata* del teorema di BIRKHOFF e KELLOGG.

Per togliergli ogni simile velleità gli rammento ch' egli nella III) per il mio teorema di *A*) dice:

«... e a tal riguardo è bene ricordare che tale risultato dello SCORZA DRAGONI è *effettivamente* un' immediata conseguenza anche del teorema di BIRKHOFF e KELLOGG da noi citato in VI)»

[cfr. la pag. 219 di III) e il n. 24 di questa mia]; mentre ivi [nota XVII) a piè della pag. 220 di III); cfr. il n. 31 di questa mia] a proposito del suo risultato del n. 1 di V) dice:

«... se pur i teoremi da noi stabiliti per via elementare si possono ritrovare anche con mezzi più elevati..., ciò non è una semplice "conseguenza", come il prof. SCORZA DRAGONI va sentenziando con molta facilità e con irriducibile insistenza, ma richiede la pubblicazione di lavori che riempiono parecchie pagine»

Infine, per tagliare la testa al toro, rammenterò al CINQUINI che *la sua* III) *è posteriore al lavoro f) di* ZWIRNER, *loc. cit.* (43), *al lavoro l) dello stesso, all' Oss.* IV) *della mia A);* mentre invece nella II), pubblicacata subito dopo il primo campanello d' allarme rappresentato da quel mio tale riassunto del suo (suo, del CINQUINI) lavoro X) [cfr. il n. 27 di questa mia] e prima ancora che uscissero i lavori che quel riassunto implicitamente preannunciava [cioè i lavori *f*), *l*) ed *m*), citato quest' ultimo nella successiva nota (76)], mentre invece nella II), dico, egli aveva scritto [cfr. la pag. 106 di II), oppure il n. 29 di questa mia]:

«Tuttavia, noi non vogliamo escludere *a priori* che riprendendo, in forma opportuna e con quella precisione che non dovrebbe mai mancare, quelle considerazioni topologiche che sono state introdotte originariamente da BIRKHOFF e KELLOGG, il Signor SCORZA DRAGONI o qualche altro

Oss. II) di *A*) si trasporta concettualmente tal quale dal mio al caso considerato dal CINQUINI ([71]).

**41.** - Esplicitiamo queste considerazioni.

Riproduciamo il teorema e l' Oss. II) di *A*), per quel tanto che basti a far vedere l' assoluto parallelismo fra le deduzioni dei nn. 42 e 44.

Dovremo basarci sul lemma:

*Se* $\tau(x)$ *è una funzione assolutamente continua in* $I: a \leq \leq x \leq b$ *insieme con le prime* $n - 1$ *derivate, che si annulli in (almeno) n punti di I e per la quale sia, in quasi tutto I,*

$$|\tau^{(n)}(x)| \leq \text{cost.} = H, \text{ riesce } |\tau(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} H, \ |\tau'(x)| \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} H, \ldots, \tau^{(n-1)}(x) \leq (b-a) H,$$

dato da me nel n. 2 di *A*) ([72]).

**42.** - Dopo di ciò ecco il teorema che dimostro in *A*):

*Il problema* (1) *ammette almeno una soluzione assolutamente continua insieme con le prime* $n - 1$ *derivate in I* [e sod-

autore possano riottenere con metodo più elevato i nostri risultati e conseguirne dei nuovi .... ».

([71]) Ecco le ultime righe di quell' Oss. IV): « Un ragionamento analogo a quello dell' Oss. II) mostra che il criterio di ZWIRNER » [citato nella nota ([69])] « si riconduce al caso che $|f|$ sia minore, in tutto *S*, di una funzione della sola *x*, sommabile in *I* », cioè in $a \leq x \leq b$. Si tenga presente che questo criterio di ZWIRNER è più ampio di quello del n. 1 di V), dato dal CINQUINI.

Si noti inoltre che il lavoro *l*) di ZWIRNER, cui si alludeva in quell' Oss. IV), era sì in corso di stampa quando presentavo la mia *A*) all' Istituto Veneto, ma esso era già pubblicato quando CINQUINI stampava la III), come si rileva dalla citazione ch' egli ne fa ivi nella nota [XVIII]) a piè di pag. 220. Sicchè allora il CINQUINI aveva già davanti a sè tutti gli elementi per intendere il significato esatto di quell' Oss. IV).

([72]) loc. cit. ([5]), n. 2. Ivi nell' ultima parte della dimostrazione mi è sfuggito un *lapsus calami* evidente : in luogo di *n* si legga *r*. Mi sia inoltre permesso correggere un errore di stampa contenuto nel quarto rigo della pag. 706 della Nota *B*) citata in ([6]): ivi si legga $\gamma$ al posto di *g*.

disfacente ivi alla $y^{(n)} = f$ quasi ovunque], *se* $f(x, u_0, \ldots, u_{n-1})$ *è misurabile rispetto ad* $x$ *e continua rispetto ad* $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ *nell' insieme* $S$ *e se esiste una costante positiva* $H$ *tale che per*

$$(13) \qquad a \leq x \leq b, \ |u_0| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} H, \ldots, |u_{n-1}| \leq (b-a) H$$

*risulti*

$$(14) \qquad |f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})| \leq H.$$

Ed infatti, scelto $H$ in modo che dalle (13) segua la (14), si ponga $g = f$, là dove $|f| \leq H$; $g = \frac{|f|}{f} H$, là dove $|f| > H$. Il problema

$$y^{(n)}(x) = g(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)); \ y(x_1) = \ldots = y(x_n) = 0$$

ammette allora una soluzione $p(x)$, assolutamente continua con $p'(x), \ldots, p^{(n-1)}(x)$ in $I$ ([73]); in virtù del lemma e della $|p^{(n)}(x)| \leq H$ risulta quindi

$$|p(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} H \ldots, |p^{(n-1)}(x)| \leq (b-a) H;$$

epperò, per la (14) in quanto conseguenza delle (13),

$$f(x, p(x), \ldots, p^{(n-1)}(x)) = g(x, p(x), \ldots, p^{(n-1)}(x)),$$

da cui l' enunciato.

**43.** - E passiamo al teorema contenuto nel n. 1 di V).

Stavolta ci baseremo sul lemma :

*Se* $\tau(x)$ *è una funzione assolutamente continua in* $I$ *insieme con le prime* $n-1$ *derivate, che si annulli in (almeno)*

([73]) Si applichi il teorema II) del n. 28, facendovi $\Sigma' = \Sigma$, alla trasformazione analoga alla $\vartheta(x) = F[\tau(x)]$ del n. 34; cfr. loc. cit. ([9]), n. 2. Cfr. anche il n. 34 di questa mia. Pel caso $n = 2$ si può anche vedere il n. 6 della mia Memoria $E$) citata in ([17]). Il fatto che la funzione $g$ sia limitata non permette di introdurre semplificazioni nel metodo esposto nel n. 34.

*n punti di $I$ e per la quale sia, in quasi tutto $I$,* $|\tau^{(n)}(x)| \leq \varphi(x)$, *con* $\varphi(x)$ *sommabile in $I$, riesce*

$$|\tau(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

$$|\tau'(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|\tau^{(n-1)}(x)| \leq \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

enunciato esplicitamente da Zwirner in $f$), loc. cit. ([40]), n. 1, ma già implicito nella formula (15) a pag. 67 della Memoria V) del Cinquini [ivi il Cinquini riconosce anche la validità del lemma riportato nel n. prec., quando $\tau^{(n)}(x)$ si supponga continua in $I$, e quindi la $|\tau^{n}(x)| \leq H$ soddisfatta in tutto $I$; è poi superfluo avvertire che nel lemma di questo numero ho introdotto l'integrale da $a$ a $b$ di $\varphi(x)$ in luogo di quello di $|\tau^{(n)}(x)|$ soltanto per comodità].

**44.** – Ciò premesso, ecco il teorema dato dal Cinquini nel n. 1 di V):

*Il problema* (1) *ammette* (*almeno*) *una soluzione assolutamente continua in $I$ insieme con le prime $n-1$ derivate* [e soddisfacente ivi alla $y^{(n)} = f$ quasi ovunque], *se* $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *è misurabile rispetto ad $x$ e continua rispetto ad* $(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ *nell'insieme $S$ e se verifica ivi la disuguaglianza*

$$(15) \qquad |f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})| \leq \sum_{0}^{n-1}{}_i\, \alpha_i(x)\, u_i + \beta(x),$$

*dove la* $\beta(x)$ *e le* $\alpha_i(x)$ *sono funzioni non negative e sommabili in $I$, con*

$$M = \int_a^b \psi(x)\, dx < 1,$$

*se*

$$\psi(x) = \sum_0^{n-1}{}_i \frac{(b-a)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \alpha_i(x)$$

*per* $x \geq a$ *e* $\leq b$, *naturalmente.*

Ed infatti, posto $N = \int_a^b \beta(x)\, dx$, si scelga il numero positivo $K$ in modo che sia $MK + N < K$ e si ponga: $g = f$, là dove $|f(x, u_0, \ldots, u_{n-1})| \leq K\psi(x) + \beta(x)$; $g(x, u_0, \ldots, u_{n-1}) = = \frac{f}{|f|}[K\psi(x) + \beta(x)]$, là dove $|f(x, u_0, \ldots, u_{n-1})| > K\psi(x) + + \beta(x)$ (74).

Il problema (1) ammette allora una soluzione $p(x)$, assolutamente continua in $I$ insieme con $p'(x), \ldots, p^{(n-1)}(x)$, quando si sostituisce la $f$ con la $g$ (75); in virtù del lemma, della $|p^{(n)}(x)| \leq K\psi(x) + \beta(x)$ e della $MK + N < K$ risulta quindi

$$|p(x)| \leq \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} K, \ldots, |p^{(n-1)}(x)| \leq K;$$

(74) Questo è l'artificio, già ricordato nel n. 13, che lo ZWIRNER ha usato in *b*), loc. cit. (20), per ricondurre in modo rapido e semplice ad equazioni a secondo membro maggiorato da una funzione sommabile della sola $x$ [cioè, in ultima analisi al teorema di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI] un altro teorema di CINQUINI [quello del n. 1 della Memoria VII), citata in (18)]. Lo stesso artificio permette certamente di fare lo stesso anche per gli altri teoremi, e non soltanto pel primo, del lavoro V) del CINQUINI, che stiamo esaminando. Ma non è certo questione sulla quale qui valga la pena di insistere. Per lo stesso motivo sorvolerò anche sui teoremi della Memoria IV), loc. cit. (6), nella quale il CINQUINI ha finalmente riconosciuta (cfr. n. 14 di questa mia) l'utilità che può trarsi dall'artifizio dello ZWIRNER.

(75) Si cfr. con quanto è detto nella nota (73).

e, per la (15), $|f(x, p(x), \dots, p^{(n-1)}(x))| \leq K\psi(x) + \beta(x)$ ; donde

$$f(x, p(x), \dots, p^{(n-1)}(x)) = g(x, p(x), \dots, p^{(n-1)}(x)),$$

da cui l' enunciato ([76]).

([76]) L' ultima parte dell'Oss. IV), riprodotta nella nota ([71]) ed esplicitata nel testo non infirma il valore di quello che ZWIRNER ha fatto nelle note *f*) ed *l*), citate risp. in ([40]) e ([69]): di due proposizioni di analisi funzionale a sua disposizione [tanto per intenderci, quella contenuta in loc. cit. ([9]) e la sua estensione contenuta in loc. cit. ([10])], egli ha preferito la seconda piuttosto che la prima. La strada che si veniva a percorrere in questo modo non era molto più lunga di quella che si sarebbe percorsa nell' altro.

Così, per es., anch' io nella mia Nota *B*), citata in ([6]), posteriore alla *A*) e quindi all' Oss. IV), ho preferito ricorrere al teorema contenuto in loc. cit. ([10]), invece che a quello del loc. cit. ([9]).

Si noti infine che le considerazioni svolte si possono fare anche per l' altro lavoro di ZWIRNER sui :

*m*) *Problemi di valori al contorno per sistemi di equazioni differenziali ordinarie*
[« Atti del R. Istituto Veneto di Sc., Lett. ed Arti », tomo CI, parte II (1941–42), pagg. 405-418],
in cui egli, fra l' altro, riconduce al teorema contenuto in loc. cit. ([10]) tutti quelli che CINQUINI dà nella sua Nota X) citata in ([32]).

Quanto poi ai teoremi che CINQUINI dà in IX), loc. cit. ([23]), basta osservare che nella IX) stessa essi appaiono, per chi conosca i lavori precedenti, come delle facili conseguenze dei risultati ch' egli dà in X).

*(Pervenuto in Redazione il 25 Gennaio 1946)*