RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ETTORE L. MARTIN

Espressioni di alcune grandezze negli spazi a curvatura costante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 15 (1946), p. 49-59

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__49_0>

ESPRESSIONI DI ALCUNE GRANDEZZE NEGLI SPAZI A CURVATURA COSTANTE

Nota di Ettore L. Martin (*a Padova*)

Nel corso di ricerche riguardanti la teoria dell' universo in espansione, mi si è presentato l' interesse di disporre di adatte formule, esprimenti la misura di alcune opportune grandezze geometriche. Una raccolta di tali formule, soddisfacenti, sia per il loro aspetto, che per le specifiche grandezze considerate, non ho trovato nei comuni repertorii da me consultati. Una accurata ricerca bibliografica su opere originali, riguardanti gli spazii a curvatura costante, non mi è stato, nè mi è possibile a tutt' oggi, effettuare, a causa della non accessibilità di gran parte del materiale delle pubbliche biblioteche, poichè esso è stato rimosso dalla collocazione normale, per sottrarlo alle eventuali offese aeree, durante il periodo bellico, e trovasi tutt'ora accatastato.

Le formule da me incontrate, in qualche raccolta, sono espresse, per lo più, separatamente, con aspetto diverso a seconda del segno della costante strutturale e sempre: o in funzione della coordinata radiale (non misura, ma numero puro, quale semplice elemento di lunghezza) o di una distanza esterna alla metrica, oltre a quella che dà il raggio di curvatura. Ha invece interesse per me, e può averne in generale, esprimere le grandezze in questione: sia comprensivamente, in modo che ciascuna formula racchiuda i tre casi possibili per la costante strutturale ($+1$; 0; -1), sia in funzione di una distanza misurata sulla metrica con scala rigida. È appunto tale aspetto delle espressioni considerate (e limitatamente a quattro di esse) ciò che costituisce il fine della presente nota. Esso viene raggiunto con l' uso di opportune notazioni comprensive, per le funzioni circolari ed iperboliche e per alcuni rapporti con l' argomento, ad esse relativi. Vengono così dedotte, per tali quattro grandezze geometriche, pertinenti alle metriche tridimensionali a simmetria sferica, le formule generali in funzione della desiderata distanza misurabile e di detti rapporti, i quali includono il raggio di curvatura e la costante strutturale dello spazio.

1. - *Notazioni e relazioni comprensive.* Introduco le notazioni indicate nel quadro seguente:

(1)

simboli \ k	$+1$	0	-1
$senk\ x$	$sen\ x$	x	$senh\ x$
$cosk\ x$	$cos\ x$	1	$cosh\ x$
$tank\ x$	$tan\ x$	x	$tanh\ x$
$arg.\ tank\ x$	$arc.\ tan\ x$	x	$an.\ tanh\ x$

Ricordando gli sviluppi, in serie di potenze dell' argomento, delle funzioni circolari ed iperboliche e delle loro inverse, ottengo, per i tre casi, comprensivamente, le relazioni seguenti:

$$senk\ x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n x^{2n+1}/(2n+1)! \tag{2}$$

$$cosk\ x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n x^{2n}/(2n)! \tag{3}$$

$$arg.\ tank\ x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n x^{2n+1}/(2n+1) \tag{4}$$

Sempre per tutti tre i casi valgono, come può facilmente verificarsi, le relazioni:

$$cosk^2\ x + k\ senk^2\ x = 1 \tag{5}$$

$$tank\ x = senk\ x/cosk\ x \tag{6}$$

$$(7) \qquad 1 + k\, tank^2\, x = cosk^{-2}\, x$$

$$(8) \qquad senk\ 2x = 2\, senk\ x \cdot cosk\ x$$

$$(9) \qquad cosk\ 2x = cosk^2\, x - k\, senk^2\, x$$

$$(10) \qquad cosk^2 \frac{x}{2} = (1 + cosk\ x)/2$$

$$(11) \qquad k\, senk^2 \frac{x}{2} = (1 - cosk\ x)/2$$

$$(12) \qquad d\ senk\ x = cosk\ x\ dx$$

$$(13) \qquad d\ cosk\ x = -k\ senk\ x\ dx$$

$$(14) \qquad d\ tank\, x = (1 + k\, tank^2\, x)\, dx = cosk^{-2}\, x\, dx$$

$$(15) \qquad d\ arg.\ tank\ x = [1 + kx^2]^{-1}\, dx$$

oltre molte altre, che non interessano ai fini della presente ricerca.

Ponendo:

$$(16) \qquad \rho\, senk\ x = (senk\ x)/x$$

si ha, per la (2):

$$(17) \qquad \rho\, senk\ x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n\, x^{2n}/(2n+1)!$$

Le (16) o, ciò che è lo stesso, le (17), sono funzioni simmetriche della variabile reale e per $x = 0$ valgono, nei tre casi, l' unità. In particolare, per $k = 0$, la funzione si riduce a tale valore costante. Per $k = -1$, si ottiene: $(senh\ x)/x$, funzione positiva, che, nell' intervallo $0 < x < \infty$, è sempre crescente coll' argomento e tende all' infinito con esso. Infine per $k = 1$, si ha: $(sen\ x)/x$, funzione di segno alterno, oscillante periodicamente (periodo 2π), con oscillazione rapidamente decrescente e assintoticamente smorzata coll' aumentare dell' argomento in valore assoluto. Interessa specialmente, in quest' ultimo caso, il comportamento nell' intervallo $0 < x \leq \pi$ entro il quale la funzione, sempre decrescente, cala da uno (per $x = 0$) a zero.

Facendo uso della (2), considero ora il seguente altro rapporto, limitandone la trattazione ai due casi per cui è $k = \pm 1$:

$$k\,(x - \mathrm{senk}\;x)/x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^{n+1}\,x^{2n-2}/(2n+1)\,! =$$

$$= 1/3\,! + \sum_{n=2}^{\infty} (-k)^{n+1}\,x^{2(n-1)}/(2n+1)\,!$$

Indicando detto rapporto con $\rho\,\delta\,\mathrm{senk}\;x$, e considerando ora anche $k = 0$, pongo per i tre casi di $k\,(+1\,;\,0\,;\,-1)$:

$$\rho\,\delta\,\mathrm{senk}\;x = 1/3\,! + \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n\,x^{2n}/(2n+3)\,! \tag{18}$$

ove ho variato opportunamente l' indice corrente di sommatoria.

Le (18) sono funzioni simmetriche positive della x e per $x = 0$ assumono, tutte tre, il valore $1/6$. In particolare per $k = 0$ ci si riduce a tale valore costante. Per $k = -1$, e per x positivo, si ha una funzione sempre crescente, che tende all' infinito coll' argomento. Infine per $k = +1$, come risulta dallo studio della: $(x - \mathrm{sen}\;x)/x^3$, si ha una funzione, che, partendo dal valore $1/6$ (massimo relativo ed assoluto), sempre decresce, nei due sensi, tendendo a zero al crescere indefinito di $|x|$. Interessa il comportamento nell' intervallo $0 \leq x \leq \pi$ ove essa scende da $1/6$ ad $1/\pi^2$.

2. - *Metrica fondamentale*, per uno spazio tridimensionale a curvatura costante, in coordinate polari r $(0 \div \infty)$, φ $(0 \div 2\pi)$ e θ $(0 \div \pi)$ è notoriamente l' espressione:

$$ds^2 = R^2\,[dr^2 + (r\,d\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\theta\,d\varphi)^2] \times (1 + k\,r^2/4)^{-2} \tag{19}$$

ove R è il raggio di curvatura, $k\,(+1\,;\,0\,;\,-1)$ la costante strutturale ed s l' arco, misurato nella stessa unità di R, e di cui considererò sempre il valore assoluto.

3. - *Coordinata radiale e distanza misurabile.* Se nella (19) considero $\theta = cost.$ e $\varphi = cost.$, l'arco s diviene relativo ad una delle ∞^2 linee geodetiche costituenti la stella con centro nell'origine. Per distinguere questo caso particolare, da quello generale, indico tale arco, misurabile nella metrica, con l; allora dalla (19), essendo $d\theta = 0 = d\varphi$:

$$dl = R\,|1 + k\,r^2/4|^{-1}dr \tag{20}$$

da cui:

$$l = R\int_0^r |1 + k\,r^2/4|^{-1}\,dr \tag{21}$$

ritenendo l'arco limitato tra l'origine ed un punto generico della linea considerata, al quale punto competa il valore r della coordinata radiale.

Dalla (21), per la (15), integrando ricavo:

$$l = 2R\;arg.\,tank\,\frac{r}{2} \tag{22}$$

Rilevando, che per $k = 0$ la (22) dà $l = Rr$ e ricordando il comportamento della tangente iperbolica, concludo che, per $k = 0$ e $k = -1$, l assume, al variare di r, qualunque valore reale positivo. Per $k = +1$ si può invece limitare la variazione di l all'intervallo $0 \div \pi R$ ed anzi πR rappresenta la massima misurabile distanza dall'origine, che indico con l_{max}.

Dalla (22) segue tosto:

$$r = 2\,tank\,(l/2R) \tag{23}$$

4. - *Linee di frontiera* dico ognuna di quelle linee (appartenenti ad una superficie geodetica passante per l'origine) tale che tutti i punti della linea stessa abbiano uguale coordinata radiale r e quindi anche la stessa distanza l dall'origine. Senza ledere la generalità posso scegliere le coordinate angolari in modo che per detta superficie, e quindi anche per tutti i punti della linea considerata su di essa, sia $\theta = cost. = \pi/2$ mentre φ varia 0 a 2π. Pertanto dalla (19) si ha per l' elemento lineare lungo detta linea:

$$ds = Rr\,|1 + k\,r^2/4|^{-1}\,d\varphi \tag{24}$$

da cui;

$$s\,(\varphi, r) = \int_0^\varphi ds = \varphi\,Rr\,|1 + k\,r^2/4|^{-1} \tag{25}$$

Volendo, com'è il fine perseguito nella presente nota, esprimere s_φ in funzione di l, anzichè di r, basterà valersi della (23). Si ha ricordando le formule (6), (7) ed (8):

$$\begin{aligned} r\,|1 + kr^2/4|^{-1} &= \{2\,tank\,(l/2R)\}\,\{1 + k\,tank^2\,(l/2R)\}^{-1} = \\ &= senk\,(l/R) \end{aligned} \tag{26}$$

per cui la (25) diviene:

$$s\,(\varphi, l) = \varphi \cdot R\,senk\,(l/R) \tag{27}$$

alla quale si può dare la forma:

$$s\,(\varphi, l) = \varphi \cdot l \cdot \{sen\,(l/R)\}/(l/R)\} \tag{28}$$

e per la (16):

$$s\,(\varphi, l) = \varphi \cdot l \cdot \rho\,senk\,(l/R) \tag{29}$$

In particolare:

$$c\,(l) = s\,(2\pi, l) = 2\pi\,l\,\rho\,senk\,(l/R) \tag{30}$$

Per controllo esamino nei vari casi la espressione ora dedotta.

Per $k = -1$, essendo $\rho\,senk$ funzione indefinitamente crescente coll' argomento positivo, lo stesso avviene della lunghezza $c_- = 2\pi\,l\,\{senh\,(l/R)\} : (l/R)$.

Per $k = 0$ è $\rho\,sen_0 = 1$ e si ha $c_0 = 2\pi l$, cioè, come si sa, si ottiene la lunghezza della circonferenza di un cerchio di raggio rettilineo l, la quale, dato il campo di variabilità di l, può assumere, come è noto, qualunque valore reale positivo, come nel caso precedente.

Per $k = +1$, la c_+ diviene la lunghezza di un circolo, generalmente minore, sopra una sfera di raggio R, espressa mediante la lunghezza costante di un arco di cerchio massimo, che da ogni punto del circolo va ad uno dei suoi due centri (antipodi uno dell' altro), sulla sfera. Com' è noto, così conferma la (30), tenuto conto del comportamento di $(sen\, l/R) : (l/R)$, al variare di l da zero a $R\pi/r$ ad $R\pi$, c_+ cresce da zero al suo valor massimo $2\pi R$ (cerchio massimo) e ridiscende a zero.

5. - *Aree locali* chiamo quelle porzioni di superficie geodetica contenenti l' origine e limitate da una linea di frontiera. Potendosi porre, come per questa, $\theta = cost. = \pi/2$, gli elementi, lineari sono: Adr lungo le geodetiche radiali divergenti dall' origine ed $Ar\, d\varphi$, con $0 \leq \varphi < 2\pi$, normalmente ad esse, ove, come si rileva dalla (21) è:

$$A = R\,|1 + kr^2/4|^{-1} \tag{31}$$

Indicando quindi con $d\sigma$ l' elemento areolare si ha:

$$d\sigma = R^2\, d\varphi \cdot r\,(1 + kr^2/4)^{-2}\, dr \tag{32}$$

per cui il settore di area locale definito dai limiti angolari zero e φ, ha l' area:

$$\sigma\,(\varphi, r) = \varphi\, R^2 \int_0^r r\,(1 + kr^2/4)^{-2}\, dr$$

da cui integrando:

$$\sigma\,(\varphi, r) = \varphi\, R^2\, 2\,(r^2/4) \cdot |1 + kr^2/4|^{-1} \tag{33}$$

Tenendo conto della (23) la precedente diviene:

$$\sigma\,(\varphi, l) = \varphi\, R^2\,(1 - cosk\; l/R) = 2\,\varphi\, R^2\, senk^2\,(l/2R) \tag{34}$$

che si può scrivere:

$$\sigma(\varphi, l) = \frac{1}{2} \varphi l \{(senk \frac{l}{2R}) : (l/2R)\}^2 \tag{35}$$

e per la (16):

$$\sigma(\varphi, l) = \frac{1}{2} \varphi l^2 (\rho\, senk \frac{l}{2R})^2 \tag{36}$$

In particolare:

$$\sigma(2\pi, l) = \pi l^2 (\rho\, senk \frac{l}{2R})^2 \tag{37}$$

Per $k = -1$, $\sigma(\varphi, l)$ è indefinitamente crescente con l; per $k = 0$ e $\varphi = 2\pi$ essa si riduce, come dev' essere, a πl^2, area piana del cerchio di raggio l; per $k = +1$ si ha una funzione crescente, che assume il valore $8l^2/\pi = 2R^2$ per $l = R\pi/2$ ed il massimo $4l^2/\pi = 4\pi R^2$ per $l = \pi R$, in conformità di quanto è noto dalla geometria elementare della sfera. In particolare per $k = +1$, $\varphi = 2\pi$ ed l qualunque, dalla prima forma della (34) si ha:

$$\sigma(2\pi, l) = 2\pi R \cdot R(1 - cos\ l/R) = 2\pi R \cdot h \tag{38}$$

che è la nota espressione della superficie di una zona o calotta sferica di altezza h.

6. - *Superfici di frontiera* dico ogni superficie per tutti i punti della quale sia costante la coordinata radiale. Su tale superficie gli elementi coordinati sono: $A r\, d\theta$ ed $A r\, sen\theta\, d\varphi$, con le variazioni indicate al n. 2, ed ove A è data dalla (31). Quindi l' elemento areolare è dato da:

$$d\Sigma = R^2 r^2 (1 + k r^2/4)^{-2} d\varphi\, sen\theta\, d\theta \tag{39}$$

Perciò si ha la seguente espressione per la porzione della superficie Σ, definita dai limiti zero e φ, zero e θ, per le coordinate angolari:

$$(40)\qquad \Sigma(\varphi, \theta, r) = R^2 r^2 (1 + k r^2/4)^{-2} \int_0^{\varphi} d\varphi \int_0^{\theta} sen\,\theta\, d\theta =$$

$$= \varphi(1 - cos\,\theta) R^2 r^2 (1 + k r^2/4)^{-2} = 2\varphi\, sen^2(\theta/2) R^2 r^2 (1 + k r^2/4)^{-2}$$

Ma per la (3), tenendo conto della (6), della (5) e della (8) si ha:

$$(41)\qquad r^2 (1 + k r^2/4)^{-2} = (senk \frac{l}{R})^2$$

Pertanto la (40) diviene:

$$(42)\qquad \Sigma(\varphi, \theta, l) = 2\varphi\, sen^2(\theta/2) R^2 senk^2 (l/R)$$

che si può scrivere:

$$(43)\qquad \Sigma(\varphi, \theta, l) = 2\varphi\, sen^2(\theta/2)\, l^2 \{(senk \frac{l}{R}) : l/R\}^2$$

Per la (16) e per la posizione:

$$(44)\qquad \omega = 2\varphi\, sen^2(\theta/2)$$

ove ω è l'angolo solido definito da φ e θ, si ha:

$$(45)\qquad \Sigma(\varphi, \theta, l) = \Sigma(\omega, l) = \omega\, l^2 (\rho\, senk \frac{l}{R})^2$$

Ponendo $\varphi = 2\pi$ e $\theta = \pi$ si ha dalla (44):

$$(46)\qquad \omega_{max} = 4\pi$$

per cui:

$$(47)\qquad \Sigma(4\pi, l) = 4\pi\, l^2 (\rho\, senk \frac{l}{R})^2$$

Mentre per $k = -1$ e $k = 0$, detta Σ è indefinitamente crescente con l e per $k = 0$, la sua espressione si riduce alla $4\pi l^2$ che è quella nota, in uno spazio euclideo, della superficie di una sfera di raggio l, per $k = +1$ il suo comportamento risponde alle caratteristiche di uno spazio finito illimitato. Si ha precisamente per $l = R\pi/2 = l_{max}/2$, un massimo che è $\Sigma_{max}(l) = 16\, l^2/\pi = 4\pi R^2$, dopo che, al crescere di l, il valore discende e si riduce a zero per il massimo valore della distanza misurabile $l_{max} = \pi R$.

7. – *Spazi locali* indico quelli contenenti l' origine e limitati da una superficie di frontiera. Gli elementi lineari, conformemente alla (19), sono allora: $A\, dr$, $Ar\, d\theta$, $Ar\, sen\theta\, d\varphi$ ove A è dato dalla (31). Quindi l' elemento di volume è:

$$dV = A^3 r^2\, dr\, d\varphi\, sen\theta\, d\theta \tag{48}$$

Pertanto la porzione di spazio locale definito dai limiti 0, φ; 0, θ; 0, r è data da:

$$V(\varphi, \theta, r) = R^3 \int_0^{\varphi} d\varphi \int_0^{\theta} sen\theta\, d\theta \int_0^{r} r^2\, |1 + k\, r^2/4|^{-3}\, dr \tag{49}$$

e cioè ponendo:

$$I(r) = \int_0^{r} r^9\, |1 + k\, r^2/4|^{-3}\, dr \tag{50}$$

e facendo uso della (44):

$$V(\omega, r) = \omega\, R^3\, I(r) \tag{51}$$

Per il calcolo di $I(r)$ opero subito la sostituzione (23). Tenendo conto delle (14), (6), (5) ed (8) si ha:

$$I(r) = I(l) = \int_0^{l} senk^2\, (l/R)\, d\,(l/R) \tag{52}$$

che per $k = 0$ da:

$$I_0(l) = \frac{1}{3}\,(l/R)^3 \tag{53}$$

Per $k = \pm 1$, tenendo conto della (11), si ha:

$$I_{\pm}(l) = \frac{k}{4} \cdot (2\,l/R - \operatorname{senk} 2\,l/R) \tag{54}$$

Sostituendo nella (51) ottengo:

$$\begin{aligned} V(\varphi, \theta, r) &= V(\omega, l) = \omega R^3 k/4 \cdot (2\,l/R - \operatorname{senk} 2\,l/R) = \\ &= 2\,\omega\, l^3 \{k\,(2\,l/R - \operatorname{senk} 2\,l/R)/(2\,l/R)^3\} \end{aligned} \tag{55}$$

e per la (18):

$$\begin{aligned} V(\omega, l) &= 2\,\omega\, l^3 \rho\, \delta \operatorname{senk}(2\,l/R) = \frac{1}{3}\,\omega\, l^3 + \\ &+ 2\,\omega\, l^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n \frac{(2\,l/R)^n}{(2n+3)!} \end{aligned} \tag{56}$$

che vale anche per $k = 0$, com'è facile verificare sostituendo nella (49) la (53) e tenendo conto della (18).

Per $\varphi = 2\pi$ e $\theta = \pi$ si ha la (46) e quindi:

$$V(4\pi, l) = \frac{4}{3}\,\pi\, l^3 \{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-k)^n\, (2\,l/R)^n/(2n+3)\,!\} \tag{57}$$

Per $k = 0$, la (57) si riduce a $(4/3)\,\pi\, l^3$ che è la notissima espressione del volume di una sfera di raggio l, nello spazio euclideo, crescente indefinitamente con l positivo, ciò che avviene pure per $V(4\,\pi, l)$ quando è $k = -1$. Per $k = 1$ tale volume, nei riguardi di l positivo, variabile nell' intervallo $0 \div \pi R = l_{max}$, è funzione che cresce: lentamente all' inizio ed alla fine del detto intervallo, più rapidamente per $R\,\pi/4 < l < 3\,R\,\pi/4$.

Per $l_{max} = \pi R$ si ha $V_{max} = 2\, l^3_{max}/\pi = 2\,\pi^2 R^3$ e per $l_m = R\,\pi/2 = l_{max}/2$ si ha $V_m = 8\, l^3_m/\pi = \pi^2 R^3 = V_{max}/2$, mentre per valori di l simmetrici rispetto al valore medio l_m si hanno valori di V simmetrici rispetto al soprascritto valore medio V_m.

(Pervenuto in Redazione il 7 novembre 1945)