Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Ettore L. Martin

Su alcuni cronotopi nella teoria dell'universo in espansione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 15 (1946), p. 40-48

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__40_0>

SU ALCUNI CRONOTOPI NELLA TEORIA DELL' UNIVERSO IN ESPANSIONE

Nota di Ettore L. Martin (*a Padova*)

Riprendo a considerare alcune relazioni fondamentali della teoria dell' universo in espansione, come seguito a quanto ho fatto in altra mia nota [1]. In questa, senza rimandare a quella precedente, richiamo concisamente, per comodità del lettore, tali relazioni e quindi, in connessione con esse, esamino i cronotopi, che possono chiamarsi esponenziali (dalla espressione che per essi assume il raggio dell' universo) traendo, anche per essi, come per quelli studiati nella nota citata, le caratteristiche conseguenti.

Di poi considero brevemente il cronotopo di de Sitter, che risulta un caso particolarissimo di quelli esponenziali e richiamo sommariamente la soluzione di Lemaître.

1. - *Relazioni fondamentali.* Considero la nota metrica (in coordinate spaziali polari r; θ; φ e temporale t):

$$(1) \qquad ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2} \frac{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r\,sen\,\theta\, d\varphi)^2}{\left(1 + k\dfrac{r^2}{4}\right)^2}$$

dove c è la velocità della luce, R il raggio variabile dell' universo e k (-1; 0; $+1$) la costante dello spazio appartenente

[1] E. L. Martin - *Sulla espressione del Raggio nella teoria dell' universo in espansione.* - Atti dell' Istituto Veneto di S. L. ed A. 1942-43; Tomo CII - Parte II - Cl. di sc. m. e n. - pag. 455.

al cronotopo, costante che ne caratterizza la struttura (iperbolica, euclidea, ellittica).

Nellà teoria della espansione di un cronotopo dinamico di metrica (1) vengono formulate alcune espressioni fondamentali; di esse un gruppo è costituito dalle seguenti due:

$$\left.\begin{array}{ll} (2) \qquad & \delta = \dfrac{R_0}{R} - 1 \\[2ex] (3) \qquad & \delta = -c\,(t - t_0)\,s \end{array}\right\} \mathrm{I}^{\mathrm{o}}$$

ove t_0 è il tempo attuale ed R_0 il relativo valore del raggio dell'universo, t un tempo generico ed $R = R(t)$ il raggio corrispondente, $\delta = \delta\lambda/\lambda$ lo spostamento delle righe spettrali (positivo verso il rosso), pertinente a una radiazione di lunghezza λ, $s = d\delta/dl$ detto spostamento (sperimentalmente costante) per unità di distanza e cs lo spostamento (costante) per unità di tempo (luce). La (2) consegue teoricamente dalla (1) applicando a due coppie di eventi: partenza ed arrivo della luce in fasi identiche, immediatamente successive, l'equazione delle geodetiche nulle ($ds = 0$); la (3) invece viene dedotta dalle osservazioni, interpretando lo spostamento spettrale delle righe delle nebulose come fenomeno Döppler.

Un secondo gruppo, dedotto unicamente dalla (1), attraverso le equazioni relativistiche, è il seguente:

$$\left.\begin{array}{ll} (4) \qquad & 8\pi\gamma p = \Lambda - \left(\dfrac{\dot R}{R}\right)^2 - 2\,\dfrac{\ddot R}{R} - k\,\dfrac{c^2}{R^2} \\[2ex] (5) \qquad & 8\pi\gamma\rho = -\Lambda + 3\left(\dfrac{\dot R}{R}\right)^2 + 3k\,\dfrac{c^2}{R^2} \end{array}\right\} \mathrm{II}^{\mathrm{o}}$$

in cui $\dot R$, $\ddot R$ rappresentano, come di consueto, le derivate prima e seconda di R rispetto al tempo e ove, oltre le già considerate costanti c e k, compaiono quella gravitazionale γ e la incognita, ma piccola, costante cosmica Λ, mentre p e ρ rappresentano la pressione e la densità. Derivando la (5) rispetto al tempo e dividendo membro a membro il risultato ottenuto per la somma della (4) con la (5), si ottiene la nota formula:

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{R}}{R} \tag{6}$$

da cui, l'altro suo aspetto:

$$d(\rho R^3) + p dR^3 = 0 \tag{7}$$

Dalla (2) si ha:

$$R = R_0 [1 - cs(t - t_0)]^{-1} = R_0 [1 + \delta]^{-1} \tag{8}$$

e quindi, tenendo conto della (3):

$$\dot{R}/R = cs[1 + \delta]^{-1} > 0 \tag{9}$$

$$\ddot{R}/R = 2c^2 s^2 [1 + \delta]^{-2} > 0 \tag{10}$$

La (8), che dà una espansione accelerata (in contrasto con ricerche di altri autori), introdotta, colle (9) e (10), nel gruppo II°, porta ai risultati discutibili esposti nella nota citata. Come allora richiamai (esponendone la procedura), a partire dalla (2) può dedursi successivamente la relazione:

$$\frac{d\delta}{dl} = \frac{1}{c}\frac{\dot{R}R_0}{R^2} \tag{11}$$

della quale rilevai l'equivalenza con la (2) essendo: $d\delta/dl = s$.

2. - *I cronotopi esponenziali.* Identificando, in prima approssimazione, R ed R_0 tra loro, è possibile dedurre una valutazione del rapporto $\dot{R}/R$ (velocità di espansione) al tempo t_0 (epoca attuale [2]. A parte ciò mi propongo qui di esaminare i crono-

[2] G. C. Mc Vittie *Cosmological Theory - Methuen's Monographs on Phisical Subjects* - London 1937 - pag. 52.

topi risultanti da tale semplificazione. Essa corrisponde evidentemente a sostituire la (11) e quindi la sua equivalente (2) con la:

$$(12) \qquad s = \frac{1}{c}\,\frac{\dot R}{R}$$

dalla quale, per la (3):

$$(13) \qquad \frac{R_0}{R} = e^{cs(t_0-t)} = e^{\delta}$$

Dal confronto della (13) con la (2), risulta che l' approssimazione introdotta equivale a sostituire il binomio: $1 + \delta$ coll' esponenziale:

$$e^{\delta} = 1 + \delta + \delta^2/2! + \delta^3/3! + \ldots\ldots + \delta^n/n! + \ldots.$$

Dalla (13):

$$(14) \qquad R = R_0\, e^{-\delta} = R_0\, e^{cs(t-t_0)}$$

e quindi:

$$(15) \qquad \dot R/R = cs > 0$$

$$(16) \qquad \ddot R/R = c^2 s^2 > 0$$

Dal confronto della (15) con la (9) e della (16) con la (10), risulta che il cronotopo caratterizzato dalla espressione (14) di R, comporta, rispetto a quello per cui R è dato dalla (8), una espansione più veloce e, a partire da un tempo remoto in poi, e precisamente per $t > t_0 - (\sqrt{2} - 1)/cs$, meno accelerata. Tale accelerazione è però, anche in questo caso, positiva, in contrasto col valore negativo di essa, da altri conseguito (vedi nota citata n. 4).

Facendo uso delle (14), (15) e (16), si ha dalle (4) e (5):

$$(17) \qquad 8\pi\gamma p = \Lambda - 3\,c^2 s^2 - k\,c^2 R^{-2}$$

$$(18) \qquad 8\pi\gamma \rho = -\Lambda + 3\,c^2 s^2 + 3\,k c^2 R^{-2}$$

Da tali relazioni segue inoltre, tenuta presente la (15):

(19) $$\dot{p} = k\,c^3 s/4\,\pi\gamma R^2$$

(20) $$\dot{\rho} = -\,3\,k c^3 s/4\,\pi\gamma R^2$$

In ciascuna delle espressioni (17) e (18) è variabile soltanto il terzo termine, che ha carattere esponenziale, essendo tale quello del fattore variabile:

(21) $$R^{-2} = R_0^{-2}\, e^{2\,cs\,(t_0 - t)}$$

Pertanto i valori assoluti di detti termini (che per $t = t_0$ divengono, rispettivamente, c^2/R_0^2 e $3c^2/R_0^2$) mentre t cresce da $-\infty$ a $+\infty$, decrescono da $+\infty$ assintoticamente a zero. Se si ammette, indipendentemente dal segno di k, che debba esistere un intervallo di tempo (al quale verranno limitate le considerazioni seguenti) durante il quale sia valida la posizione:

(22) $$\rho > 0$$

bisogna imporre la condizione:

(23) $$\Lambda < 3\,c^2 s^2$$

Se è $k < 0$, anche con la (23), la (18), per la (22), non è valida per tutti i tempi anteriori ad un istante determinabile, dopo il quale, mentre l'universo andrebbe espandendosi, la densità, partendo dallo zero, aumenterebbe ($\dot{\rho} > 0$ dalla (20)), tendendo per $t \to +\infty$ assintoticamente al valore:

(24) $$v = \frac{3\,c^2 s^2 - \Lambda}{8\,\pi\gamma}$$

Per tale istante, ponendo nella (18) $\rho = 0$ si ha: $3\,c^2 R^{-2} = 3\,c^2 s^2 - \Lambda$ e quindi dalla (17), indicando con $\bar{p}$ il valore della pressione a detto istante:

(25) $$\bar{p} = -\,\frac{3\,c^2 s^2 - \Lambda}{12} < 0$$

mentre dalla (19) segue: $\dot{p} < 0$. Quindi al variare di ρ, nel modo sopra esposto, la pressione, sempre negativa, scenderebbe dal valore $\bar{p}$ (formula (25)), per $t \to +\infty$, assintoticamente al valore $-v$ (form. (24)).

Per $k > 0$, e sempre con la (23), risulta, per qualunque tempo, valida la (22). Dalla (20): $\dot{\rho} < 0$, per cui, durante la espansione, a partire da un generico tempo passato e dalla corrispondente densità positiva, questa andrebbe diminuendo, tendendo, al crescere indefinito di t, assintoticamente al valore v. Contemporaneamente, e per qualunque tempo, risulta dalle (17) e dalle (19), rispettivamente, $p < 0$ e $\dot{p} > 0$, cioè durante la espansione, la pressione si manterrebbe costantemente negativa, diminuendo in valore assoluto e tendendo, al crescere indefinito di t, assintoticamente al valore $-v$.

Osservo ancora che, indipendentemente dal segno di k, dalle (17) e (18) consegue subito:

$$(26) \qquad 3p + \rho = -\frac{3c^2 s^2 - \Lambda}{4\pi\gamma} = -2v = cost. < 0$$

$$(27) \qquad 3\dot{p} + \dot{\rho} = 0$$

relazioni, che opportunamente considerate, portano direttamente ad alcune delle conclusioni sopraesposte.

Nel caso infine di $k = 0$, dalle (17) e (18) si ha:

$$(28) \qquad \rho = -p = \frac{3c^2 s^2 - \Lambda}{8\pi\gamma} = v = cost.$$

per cui la espansione non avrebbe alcun effetto sulla densità nè sulla pressione, la quale, come precedentemente, risulterebbe ancora negativa.

3. - *Il cronotopo di de Sitter.* Nonostante i risultati discutibili degli universi considerati e segnatamente dell' ultimo, rientra proprio in questo, come caso particolare, un cronotopo noto, proposto da uno dei più valenti cultori di questi studi: il DE

Sitter (3). Ritengo quindi opportuno, a questo punto, richiamarne brevemente le caratteristiche note, ammesse e dedotte, precisarne, colla dipendenza dalla (28), la particolarizzazione e fissarne infine la controversa natura. Si assume in esso $t_0 = 0$ ed $R_0 = 1$ (convenzioni lecite), ma si suppone inoltre, in partenza, $k = 0$, per cui lo spazio appartenente al cronotopo sarebbe piatto, cioè euclideo. Infine si ammette:

$$R = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t} \tag{29}$$

che pone il cronotopo tra quelli esponenziali del tipo (14).

Ovviamente dalla (29): $\dot{R}/R = \sqrt{\Lambda/3}$; $\ddot{R}/R = \Lambda/3$ per cui le (4) e (5) dànno: $p = 0$; $\rho = 0$. La particolarizzazione di tale universo, rispetto a quelli considerati alla fine del numero precedente ($k = 0$), risulta precisata dal confronto della (29) con la (14), tenuto conto delle convenzioni $t_0 = 0$ ed $R_0 = 1$, per cui si impone la:

$$\Lambda = 3\,c^2 s^2 > 0 \tag{30}$$

per la quale la (28) dà $v = 0$ e quindi $\rho = p = 0$.

Un tale universo, in cui il volume dello spazio è infinito, offre l' inconveniente della *vacuità*, indicando concisamente con ciò l' assenza teorica in esso non soltanto della pressione, ma bensì della materia e della radiazione. Chi sostiene tale caratteristica la considera come una condizione limite, dovuta al fatto che, a causa della notevole, già avvenuta, espansione, gli effetti della materia e della radiazione possono ritenersi trascurabili, interpretazione questa, naturalmente, non generalmente accetta, poichè offre il fianco a serie obbiezioni.

4. - *La soluzione di Lemaître.* Come si è visto nella citata nota precedente e nei passati numeri di questa, i tentativi di adattare il I° gruppo di formule, e per esso le conseguenti espressioni di $R = R(t)$, rigorosa od approssimata, al II° gruppo,

(3) W. de Sitter - *Monthly Notices* - Vol. 93 - 1933 - pag. 628.

porta a disarmonie od almeno a risultati discutibili, perchè di non ovvia interpretazione, stando alle nozioni fisiche comunemente ammesse. Con posizioni analoghe a quelle via via avanzate non diverso deve ritenersi a priori l' esito, esaminando il II° gruppo, in confronto col I° od almeno a sè stante. Uno studio in proposito è stato fatto da tempo [4] ed esso ha interesse, oltre che teorico, storico, poichè è la prima indagine fatta in relazione allo spostamento delle righe spettrali, interpretato come fenomeno di recessione delle nebule extragalattiche. Oltre che essere stato tradotto [5], per interessamento dell' *Eddington*, ed opportunamente diffuso e studiato, esso, con altri, è stato oggetto di discussioni in occasione di congressi astronomici internazionali. Ritengo perciò non inutile (anche per indurre il lettore ad una ponderata considerazione dei risultati singolari relativi ai cronotopi esponenziali esaminati al numero due di questa nota) richiamarne sommariamente gli elementi, schematizzando concisamente una breve esposizione nota [6], e la sconcertante conclusione.

Si assume in partenza $k = 1$, per cui lo spazio appartenente al cronotopo sarebbe sferico, e $p = 0$ donde, per la (7) $\rho R^3 = cost.$ Introdotte le costanti ρ_i ed R_i, densità e raggio all' inizio della espansione, e le posizioni $\dot{R}_i = 0$ ed $\ddot{R}_i = 0$ si ricava dalla (4): $\Lambda = c^2/R_i^2$ e quindi dalla (5): $8\pi\gamma\rho_i = 2\Lambda = 2c^2/R_i^2$ per cui: $8\pi\gamma\rho = 2c^2R_i/R^3$. Allora la (5) dà in generale, cioè per un tempo generico, dopo alcune trasformazioni, $\dot{R}^2$ in termini del rapporto R/R_i. Una tale equazione può essere integrata, dando una espressione esplicita del tempo t in funzione di detto rapporto. Da tale espressione, per $R = R_i$ si ricava $t = -\infty$. Ciò si interpreta dicendo che l' Universo partirebbe da una configurazione statica ed impiegherebbe un tempo infinitamente grande per raggiungere un raggio sensibilmente maggiore di quello di partenza. A tale infinità non si concede generalmente alcun significato fisico, tuttavia non manca chi, sia pure con opportune

(4) G. Lemaitre – *Annales Soc. Scient.* Bruxelles - 47 A - 1927 – pag. 49.

(5) G. Lemaitre – *Monthly Notices* – Vol. 91 – 1931 – pag. 483.

(6) G. C. Mc. Vittie – l. c. pag. 65.

avvertenze, come l' *Eddington*, considera favorevolmente la soluzione *Lemaître*.

Voglio infine applicare detta conclusione al I° gruppo di formule. Anche restringendo la estensione teorica del risultante intervallo infinito di tempo ($t_0 - t = +\infty$) ad un valore finito, essendo R_0/R_i dell' ordine dell' unità, ne viene il contrasto che, mentre la (2) darebbe un δ_i piccolo, la (3) porterebbe, per lo stesso δ_i ad un valore grandissimo.

(Pervenuto in Redazione il 7 novembre 1945)