GIUSEPPE ZWIRNER

Sull'equazione $y' = \lambda f(x, y)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 15 (1946), p. 33-39

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__33_0>

SULL' EQUAZIONE $y' = \lambda f(x, y)$

Nota di Giuseppe Zwirner *(a Padova)*

È stato dimostrato che il problema

$$\text{I)} \qquad \begin{aligned} & y'(x) = \lambda f(x, y(x)), \\ & y(a) = \alpha, \ y(b) = \beta, \end{aligned}$$

nelle incognite λ (numero reale) e $y(x)$ (funzione reale della variabile reale x), ammette una ed una sola soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$ se

1) $f(x, y)$ è continua, mai nulla e lipschitziana rispetto a y nel rettangolo

$$R: \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d \qquad (a < b, \ c < d)$$

e se

2) risulta

$$|\alpha - \beta| \leq (d - c)\, m M^{-1}, \ |\alpha - \beta|\, N (1 + M m^{-1}) (2\, m)^{-1} < 1,$$

dove m, M ed N indicano rispettivamente il minimo, il massimo e la costante di Lipschitz della funzione $|f(x, y)|$ in R (1).

Mi sono allora proposto di far vedere come il problema considerato sia risolubile, anche quando si sopprimano le condizioni 2) e ci si metta per la funzione $f(x, y)$ nelle ipotesi dei classici teoremi di esistenza di Carathéodory (2).

(1) K. Zawischa: *Über die Differentialgleichung $y' = k f(x, y)$ deren Lösungkurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen soll* [Monatsh. für Math. und Phys., 37 (1930), pp. 103–124]; vedi anche G. Sansone: *Equazioni differenziali nel campo reale* [Zanichelli, Bologna (1941)], Parte II, cap. VIII, § 4.

(2) C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen* [Teubner, Lipsia, 1a. ed. (1918)], §§ 576-582.

Nella presente Nota espongo i risultati a cui sono pervenuto. Nel numero 1 indico delle condizioni sufficienti perchè il problema I) ammetta almeno una soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$. Nel numero 2 indico un criterio perchè il problema I) sia risolubile per uno ed un sol valore λ_0 di λ. Naturalmente, se sono soddisfatte le ipotesi di quest' ultimo criterio, il problema I) ammetterà una ed una sola soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, se sono univocamente determinate le soluzioni della

$$y(x) = \alpha + \lambda_0 \int_a^x f(t, y(t))\, dt, \qquad (a \leq x \leq b)$$

oppure della

$$y(x) = \beta + \lambda_0 \int_b^x f(t, y(t))\, dt, \qquad (a \leq x \leq b).$$

1. - TEOREMA I. - *Sia $f(x, y)$ una funzione ovunque finita e non negativa* [3] *nel rettangolo*:

$$R: \ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

ivi misurabile rispetto a x e continua rispetto a y.

Supponiamo inoltre che esistano due funzioni non negative $p(x)$ e $q(x)$ $[p(x) \leq q(x)]$ sommabili in $a \leq x \leq b$ con

$$\int_a^b p(x)\, dx > 0,$$

tali che in tutto R sia

$$p(x) \leq f(x, y) \leq q(x). \tag{1}$$

Allora detti α e β due punti dell' intervallo $c \leq y \leq d$, esiste almeno un valore λ_0 del parametro λ, per il quale il problema

(3) Anche nella introduzione avremmo potuto supporre $f(x, y)$ sempre positiva, previo il cambiamento di λ in $-\lambda$.

$$(2) \qquad y'(x) = \lambda f(x, y(x)), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

ammette almeno una soluzione, $y_0(x)$, *assolutamente continua in*

$$i: \; a \leq x \leq b.$$

Naturalmente la prima delle (2) sarà soddisfatta quasi ovunque in i; mentre $\lambda_0 = \dfrac{\beta - \alpha}{\int_a^b f(t, y_0(t))\,dt}$; sicchè le (2) si potranno compendiare nell' unica relazione funzionale

$$y(x) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{\int_a^x f(t, y(t))\,dt}{\int_a^b f(t, y(t))\,dt}.$$

Indichiamo con Σ lo spazio metrico costituito dalle funzioni $y(x)$ continue in tutto i e soddisfacenti ivi alle $c \leq y(x) \leq d$, quando si assuma come distanza di due funzioni siffatte il massimo, in i, del modulo della loro differenza.

Allora il problema si trasforma in quello di determinare un elemento unito nella trasformazione funzionale

$$z(x) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{\int_a^x f(t, y(t))\,dt}{\int_a^b f(t, y(t))\,dt}.$$

A tale scopo basterà procedere in modo analogo a quanto ho fatto in un lavoro recente [4].

Indichiamo con Σ' l' insieme degli elementi $g(x)$ di Σ, che

[4] G. ZWIRNER: *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie di ordine n.* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, vol. XII (1941), pp. 114-122].

risultino assolutamente continui in i e verifichino la $g(a) = \alpha$ e, quasi ovunque in i, la

$$|g'(x)| \leq \frac{|\beta - \alpha|}{\int_a^b p(x)\, dx} q(x).$$

Le $g(x)$ risultano evidentemente equicontinue ed equilimitate in i e perciò Σ' è compatto rispetto a Σ.

Fissato il numero naturale p, dividiamo l' intervallo $a \leq \leq x \leq b$ in 2^p parti eguali mediante i punti

$$\xi_1 = a < \xi_2 < \ldots\ldots < \xi_{2^p} < \xi_{2^p+1} = b$$

e poi consideriamo l' insieme delle funzioni $\varphi_p[g(x)\,|\,x]$ soddisfacenti alle condizioni:

1) la funzione $\varphi_p[g(x)\,|\,x]$ è continua in i e lineare in ognuno degli intervalli della suddivisione considerata;

2) risulta $\varphi_p[g(x)\,|\,\xi_j] = g(\xi_j)$ per $j = 1, 2, \ldots, 2^p + 1$; di guisa che $\varphi_p[g(x)\,|\,a] = \alpha$, $c \leq \varphi_p[g(x)\,|\,x] \leq d$.

Giunti a questo punto, non si incontra nessuna difficoltà a riprendere il ragionamento svolto nel n. 2 del mio lavoro citato in ([4]).

2. - Teorema II. - *Sia $f(x, y)$ una funzione misurabile rispetto a x ed uniformemente continua rispetto a y in*
R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

Supponiamo inoltre che esista un numero positivo σ e una funzione $q(x)$ (positiva e) sommabile in i tale che in R sia

$$\sigma \leq f(x, y) \leq q(x). \tag{3}$$

Esiste allora uno ed un solo valore λ_0 del parametro λ, in corrispondenza del quale il problema (2) *ammette almeno una soluzione assolutamente continua in i.*

L' esistenza di almeno un valore λ_0 segue dal n. 1.

Quindi per dimostrare il nostro teorema basta evidentemente dimostrare che se i numeri reali l e L e le funzioni $\bar{y}(x)$ e $\bar{Y}(x)$ verificano in tutto $\bar{i}: a \leq x \leq \bar{b}$ $(a < \bar{b} \leq b)$ le relazioni

$$
(4) \qquad \left|\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \alpha + l\int_a^x f(t, \bar{y}(t))\, dt, \\ \bar{Y}(x) &= \alpha + L\int_a^x f(t, \bar{Y}(t))\, dt, \end{aligned}\right.
$$

nel che è implicito $c \leq \bar{y}(x) \leq d$, $c \leq \bar{Y}(x) \leq d$ in $a \leq x \leq \bar{b}$, allora dà $l < L$ segue

$$
\bar{y}(x) < \bar{Y}(x) \qquad (a < x \leq \bar{b}).
$$

Ragionando per assurdo, supponiamo intanto che ξ sia un punto di $\bar{i}$ in cui risulti $\bar{y}(\xi) > \bar{Y}(\xi)$ e che $a_1 \leq x \leq b_1$ sia il massimo intervallo, contenente ξ e contenuto in $\bar{i}$, nel cui interno risulti sempre

$$
(5) \qquad \bar{y}(x) - \bar{Y}(x) > 0.
$$

Riesce allora

$$
(6) \qquad \bar{y}(a_1) = \bar{Y}(a_1) \quad , \quad \bar{y}(b_1) \geq \bar{Y}(b_1).
$$

Per la continuità uniforme della funzione $f(x, y)$ rispetto a y e per la prima delle (6), fissato un numero positivo $\varepsilon < (L - l)\,\sigma$, si può determinare in corrispondenza un intorno destro, $a_1 \leq \leq x \leq a_1 + \delta$, del punto a_1, in modo che ivi risulti:

$$
|f(x, \bar{Y}(x)) - f(x, \bar{y}(x))| < \varepsilon \cdot |l^{-1}|.
$$

Di qui e dalle (3) segue

$$
\begin{aligned}
& L\, f(x, \bar{Y}(x)) - l\, f(x, \bar{y}(x)) \geq \\
& \geq L\, f(x, \bar{Y}(x)) - l\, f(x, \bar{Y}(x)) - \varepsilon \geq \\
& \geq (L - l)\,\sigma - \varepsilon > 0, \qquad (a_1 \leq x \leq a_1 + \delta).
\end{aligned}
$$

Donde, per la prima delle (6),

$$\overline{Y}(x) - \overline{y}(x) = \int_{a_1}^{x} [L f(t, \overline{Y}(t)) - l f(t, \overline{y}(t))] \, dt \geq$$

$$\geq [(L - l)\, \sigma - \varepsilon]\, (x - a_1) > 0 \,, \; (a_1 < x \leq a_1 + \delta),$$

il che contraddice la (5).

Sicchè abbiamo intanto che in $\overline{i}$ è sempre $\overline{y}(x) \leq \overline{Y}(x)$.

Per completare la dimostrazione del teorema bisognerà far vedere ora che nell'intervallo semi-aperto a sinistra $a < x \leq \overline{b}$ le funzioni $\overline{y}(x)$ e $\overline{Y}(x)$ non possono mai essere eguali.

Infatti, se per un dato $\overline{x}$ $(a < \overline{x} \leq \overline{b})$ fosse

$$\overline{y}(\overline{x}) = \overline{Y}(\overline{x}), \tag{7}$$

ripetendo il ragionamento fatto si potrebbe determinare un intorno sinistro del punto $\overline{x}$, tale da aversi ivi

$$\overline{y}(x) - \overline{Y}(x) \leq 0$$

e

$$L f(x, \overline{Y}(x)) - l f(x, \overline{y}(x)) > 0 \,,$$

relazioni contraddittorie in virtù della (7) e delle (4).

3. - Osservazione 1. - Il teorema II dà anche un criterio di confronto in funzione di λ per le soluzioni del problema (2).

Osservazione 2. - Il problema (2) ammette una ed una sola soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, se sono soddisfatte le ipotesi del teorema II e se $f(x, y)$ è non crescente o non decrescente rispetto a y. Ciò segue da noti teoremi di unicità per il problema dei valori iniziali, relativo all' equazione differenziale $y' = f(x, y)$ [5], da quanto si è detto alla fine dell' introduzione.

[5] L. TONELLI: *Sull' unicità di una soluzione di una equazione differenziale ordinaria* [Rend. Accademia Nazionale dei Lincei, serie VI, vol. 1, (1925), pp. 272-277], n. 1 e 2.

Un' ampia bibliografia sui criteri di unicità per il problema dei valori iniziali relativo all' equazione differenziale ordinaria di forma normale e del primo ordine trovasi in G. SANSONE loc. cit. [1], parte seconda, Cap. VIII, § 9. Ogni criterio siffatto permette di enunciarne un altro relativo al problema (2) tutte le volte che sono verificate anche le ipotesi del teorema II, in conformità di quanto è stato già detto alla fine della introduzione.

(*Pervenuto in Redazione il 12 ottobre 1945*)