Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Scorza Dragoni

Un teorema d'esistenza per gli elementi uniti di una trasformazione funzionale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 15 (1946), p. 25-32

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__25_0>

UN TEOREMA D' ESISTENZA PER GLI ELEMENTI UNITI DI UNA TRASFORMAZIONE FUNZIONALE

Nota di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Padova*)

In questa Nota mi propongo di dare un teorema di esistenza per gli elementi uniti di una trasformazione funzionale di certi spazi topologici. Esso risulta dalla fusione di due enunciati, uno di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI, l' altro di CACCIOPPOLI.

Il teorema è formulato nel n. 2 e dimostrato nel n. 4, con grande semplicità. La presunzione ch' esso fosse valido mi è stata suggerita dal fatto che quella fusione l' avevo già riconosciuta possibile per alcune conseguenze delle proposizioni di quegli AA.; mi è stata confermata dal fatto che, per gli spazi euclidei, esso è una conseguenza immediata di un teorema di ROUCHÉ sull' ordine di un punto rispetto ad un ciclo. Tutto ciò è chiarito nei nn. 1, 2 e 3.

1. - Ecco di che si tratta.

Sia Σ lo spazio lineare metrico, costituito dalle funzioni $\varphi(x)$, continue nell' intervallo I: $-1 \leq x \leq 1$ insieme con le prime r (eventualmente $r=0$) derivate, quando come distanza di due punti $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ di Σ si assuma la somma $\max|\varphi(x)-\psi(x)|+$ $+\max|\varphi'(x)-\psi'(x)|+\ldots+\max|\varphi^{(r)}(x)-\psi^{(r)}(x)|$.

Allora :

I) *La trasformazione funzionale*

$$\chi(x) = S[\varphi(x)]$$

continua in Σ, *è dotata almeno di un elemento unito, se muta una porzione* Σ' *di* Σ, *ottenuta imponendo un confine supe-*

riore (costante) ai moduli di $\varphi(x)$, $\varphi'(x), \ldots, \varphi^{(r)}(x)$, *in un insieme compatto (rispetto a* Σ'*) di* Σ'.

Più generalmente si può supporre che Σ' *sia così costituita da ammettere, al pari di* Σ, *come modelli topologici approssimanti, campi n dimensionali* ($n = 0, 1, \ldots$) *semplicemente connessi* (1).

Da questo primo teorema segue, p. es., secondo CACCIOPPOLI, che:

α) *Il problema al contorno*

$$y''(x) = p(x, y(x), y'(x)), \quad y(-1) = a, \quad y(1) = b$$

ammette almeno una soluzione, se $p(x, u, v)$, *continua per* $|x| \leq 1, |u| < +\infty, |v| < +\infty$ *insieme colle derivate rispetto ad u e a v, è infinita d'ordine minore di* 1 *rispetto ad u e v, uniformemente rispetto ad x* (2),

cioè è tale da aversi $\dfrac{1}{|u| + |v|} p(x,u,v) \rightarrow 0$ per $|u| + |v| \rightarrow +\infty$, uniformamente rispetto ad x.

D'altra parte, CACCIOPPOLI ha anche dimostrato che:

II) *La trasformazione*

$$\psi(x) = T[\varphi(x)]$$

di Σ *in una sua parte ammette un elemento (anzi un solo elemento) unito, se la*

$$\omega(x) = \varphi(x) - T[\varphi(x)]$$

è continua e localmente invertibile e trasforma in successioni convergenti soltanto successioni compatte rispetto a Σ (3);

(1) R. CACCIOPPOLI *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti.* [«Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», serie 6, vol. XIII (1931), pagg. 498-502], pag. 500. Si veggano anche i lavori di BIRKHOFF, KELLOGG e SCHAUDER ivi citati.

(2) loc. cit. nota (1), pag. 501.

(3) CACCIOPPOLI, *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicità ed alcune sue applicazioni* [«Rendiconti del Seminario matematico di Padova, vol. III (1932), pagg. 1-15], n. 6.

ed ha raggiunto il suo scopo, facendo vedere che allora la $\omega = \varphi - T[\varphi]$ è una trasformazione biunivoca (e bicontinua) di Σ in se stesso (e non in una sua parte propria), di guisa che vi è un punto φ che è portato nell'origine dalla $\omega = \varphi - T(\varphi)$.

Da questo suo teorema, CACCIOPPOLI ha dedotto che:

β) *Il problema al contorno*

$$y''(x) = q(x, y(x)),\ y(-1) = a,\ y(1) = b$$

ammette una (ed una sola) soluzione, se $q(x,u)$ *è continua e* $q'_u(x,u)$ *è continua e non negativa* $\{|x| \leq 1,\ |u| < +\infty\}$ (4).

2. - Orbene, io ho dimostrato (5) che:

γ) *Il problema al contorno*

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)),\ y(-1) = a,\ y(1) = b$$

ammette almeno una soluzione, se riesce
$f(x,u,v) = p(x,u,v) + q(x,u)$ $\{|x| < 1, |u| < +\infty, |v| < +\infty\}$, *con* p, p'_u, p'_v, q *e* q'_u *continue*, p *infinita d' ordine minore di* 1 *rispetto ad* u *e* v, *uniformemente rispetto ad* x (6), *e* q *non*

(4) loc. cit. nota (3), n. 4.

(5) G. SCORZA DRAGONI, *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali del secondo ordine* [«Rendiconti del Seminario matematico della Università di Roma», serie IV, vol. 2 (1938), pagg. 177-254], § 3.

(6) Non sarà male fare qui qualche precisazione, irrilevante agli scopi del testo.

Intanto, la formulazione originale del teorema β) è più ampia di quella riportata. CACCIOPPOLI [loc. cit. (3) n. 4] ha enunciato il teorema β), deducendolo sempre dal teorema II), in modo ch' esso coincide con quello che si ottiene da γ), supponendovi la p addirittura limitata.

Nell' enunciare il teorema α), CACCIOPPOLI non ha fatto (e non aveva bisogno di fare) alcuna ipotesi sulle derivate della p. Peraltro, anch' io, in loc. cit. nella nota (5), invece della continuità delle derivate suppongo soltanto soddisfatta una condizione di LIPSCHITZ.

Del resto, anche il teorema γ) continua a sussistere, se si sopprimono le ipotesi relative a p'_u, p'_v e q'_u, senza sostituirle con altre. Si veda: SCORZA DRAGONI, *Elementi uniti di trasformazioni funzio-*

decrescente rispetto ad u [7].

È quindi spontaneo il domandarsi, se la circostanza che si presenta per le conseguenze α) e β) non valga per avventura anche per i teoremi I) e II). Una domanda così ampia va forse respinta (con ciò non intendo formulare una presunzione). Ma ci si può chiedere se quella circostanza non si presenti, quando si sostituisca il teorema I) con quello che si ottiene supponendo che la $\chi(x) = S[\varphi(x)]$ muti tutto Σ in un insieme compatto rispetto a Σ [8]; se cioè non valga il teorema:

nali e problemi di valori ai limiti [«Rendiconti del Seminario matematico della Università di Roma», serie IV, vol. 2 (1938), pagg. 255-275], n. 4; L. TONELLI, *Sull' equazione differenziale* $y' = f(x, y, y)$ [«Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa», serie II, vol. VIII (1939), pagg. 75-88], n. 1.

(7) Veramente, questo è soltanto il teorema che ho enunciato esplicitamente in loc. cit. (5). Quello che ivi ho dimostrato è più ampio, perchè le ipotesi sulla f sono state sfruttate soltanto tramite alcune loro conseguenze [loc. cit. nota (5), nn. 9 e 10]. Sicchè il teorema che io ho di fatto stabilito risulta essere il seguente:

ε) *Il problema al contorno*

$$y'' = f(x, y(x), y'(x)), \quad y(-1) = a, \quad y(1) = b$$

ammette almeno una soluzione, se

$$f(x, u, v),$$

continua per $|x| < 1$, $|u| < +\infty$, $|v| < +\infty$ *insieme con* f'_u, f'_v, *soddisfa alle seguenti condizioni:*

A) *preso ad arbitrio un* $k > 0$, *si può trovare una costante h tale da aversi*

$$|f(x, u, v)| \leq |v| + h, \text{ se } |u| \leq k;$$

B) *preso ad arbitrio un* $\sigma > 0$ *e un* y_0, *si può trovare una costante positiva d e un numero positivo L, tali che sia*

$$f(x, u, v) \geq -\sigma\{|u| + |v|\} - d, \text{ se } u \geq y_0, \ |u| + |v| \geq L,$$

$$f(x, u, v) \leq \sigma\{|u| + |v|\} + d, \text{ se } u \leq y_0, \ |u| + |v| \geq L.$$

Tutto ciò sia detto per inciso, dato che qui non intendo insistere oltre sull' argomento. Per lo stesso motivo non mi soffermo a far rilevare che quel mio ragionamento si sarebbe potuto adattare facilmente a dimostrare un teorema ancora più ampio, risultandone anzi molto semplificato.

(8) Si veggano i lavori citati nella nota (1); si veda anche CAC-

III) *La trasformazione funzionale*

$$\pi(x) = F[\varphi(x)]$$

di Σ *in una sua parte, ammette almeno un elemento unito, se*

$$F[\varphi(x)] = S[\varphi(x)] + T[\varphi(x)],$$

ove la trasformazione

$$\chi(x) = S[\varphi(x)]$$

muta con continuità Σ *in una porzione compatta rispetto a* Σ, *e la trasformazione*

$$\omega(x) = \varphi(x) - T[\varphi(x)]$$

è continua, localmente invertibile e muta in successioni convergenti soltanto successioni compatte rispetto a Σ.

Nel fatto, le cose stanno così (n. 4). Vedremo anche (n. 4, Oss. 1) che il teorema si può estendere notevolmente.

3. - Prima di passare alla dimostrazione, voglio far vedere che l'analogo del teorema III) per gli S_n euclidei è un'interpretazione immediata di un teorema di ROUCHÉ sull'ordine di di un punto rispetto ad un ciclo [9].

Per gli spazi euclidei, il teorema III) diventa:

IV) *Una trasformazione continua*

$$P^* = G(P)$$

dell' S_n *reale, euclideo ammette almeno un elemento unito, se*

$$G(P) = M(P) + N(P) \quad [10],$$

CIOPPOLI, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale* («Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», serie 6, vol. XI (930), pagg. 794-799].

(9) Cfr. P. ALEXANDROFF e H. HOPF, *Topologie*, I [Springer, Berlino, 1935] pag. 459.

(10) A chiarimento dell'enunciato, avverto che l' S_n va interpretato come uno spazio vettoriale descritto da un vettore applicato nell' origine ed avente l' altro estremo nel punto corrente di S_n. Sicchè

dove la trasformazione

$$Q = M(P)$$

muta con continuità l' S_r in una sua porzione limitata, mentre la trasformazione

$$R = P - N(P)$$

muta l' S_n in se stesso con biunivocità ([11]) *(e continuità).*

Infatti, in queste ipotesi esiste un punto P_0, portato dalla $R = P - N(P)$ nell' origine O di S_n. Si consideri allora un' ipersuperficie sferica V_{n-1} di S_n, col centro in P_0, e ne sia W_{n-1} l' immagine in S_n mediante la $R = P - N(P)$. L' ordine di O rispetto a W_{n-1} è diverso da zero ([12]), la distanza di W_{n-1} da O tende all' infinito col raggio di V_{n-1}.

In particolare possiamo supporre V_{n-1} tale, che la distanza di ogni punto di W_{n-1} dall' origine di O superi il massimo della distanza di $Q = M(P)$, per P qualunque in S_n, dall' origine O di S_n.

La trasformazione

$$R' = P - N(P) + M(P)$$

muta V_{n-1} in una W'_{n-1}, tale che, se R ed R' sono due punti di W_{n-1} e W'_{n-1} provenienti dallo stesso punto di V_{n-1}, la distanza fra R, R' è sempre minore della distanza fra R ed O. Ma allora, pel teorema di ROUCHÉ ricordato, l' ordine di O ri-

la somma (differenza) di due punti di S_n è quel punto che ha come coordinate le somme (differenze) delle coordinate omonime dei punti dati.

([11]) Si rammenti che le ipotesi fatte sulla $\omega(x) = \varphi(x) - T[\varphi(x)]$ portano alla sua completa ed univoca risolubilità, e furono sfruttate solo attraverso questa conseguenza. Del resto, se si vuole, si possono fare sulla $R = P - N(P)$ le ipotesi analoghe a quelle fatte sulla $\omega(x) = \varphi(x) - T[\varphi(x)]$. Dopo di che la $R = P - N(P)$ risulterà un omeomorfismo dell' S_n in sè (in virtù di un teorema di HADAMARD, che è appunto quello da cui CACCIOPPOLI ha preso le mosse in loc. cit. nota ([3]); a questo lavoro rimando per l' indicazione bibliografica).

([12]) loc. cit. ([9]), pag. 474, teorema VI.

spetto a W'_{n-1} è anch'esso diverso da zero. Indi, pel teorema di KRONECKER ([13]), esiste un punto P_1 interno a V_{n-1}, che è portato nell'origine dalla $R' = P - N(P) + M(P)$, per il quale cioè riesce $P_1 = M(P_1) + N(P_1)$, come volevasi ([14]).

4. – Dopo di ciò, dimostriamo il teorema del n. 2, oggetto precipuo di questa Nota.

Nelle ipotesi del quale teorema, sia $\varphi(x) = K(\omega(x))$ la trasformazione inversa della $\omega(x) = \varphi(x) - T[\varphi(x)]$, e si consideri la trasformazione $\rho(x) = S[K(\omega(x))]$. Questa ammette almeno un elemento unito $\omega_0(x)$, perchè $\omega(x)$ descrive tutto Σ, mentre la K è continua e la S muta Σ in una porzione compatta rispetto a Σ, di guisa che si possono applicare i risultati citati in ([8]); e, posto $\varphi_0(x) = K(\omega_0(x))$, risulta $\varphi_0(x) - T[\varphi_0(x)] = \omega_0(x) = S[K(\omega_0(x))] = S[\varphi_0(x)]$; cioè $\varphi_0(x)$, è, come volevasi, unito nella $\pi(x) = F[\varphi(x)]$.

OSSERVAZIONI – 1) Nel teorema del n. 2, le ipotesi sulla $\omega(x) = \varphi(x) - T[\varphi(x)]$ sono sfruttate soltanto attraverso il fatto che allora la trasformazione scritta è un omeormorfismo; quelle sulla $S[\varphi(x)]$ han servito soltanto ad assicurare che la $S[K(\omega(x))]$ ammette un elemento unito.

Quest' ultima circostanza si presenta certo, anche se $S[\varphi(x)]$ soddisfa alle ipotesi più generali del teorema I), purchè allora la trasformazione $\omega(x) = \varphi(x) - T[\varphi(x)]$ muti Σ' in un insieme Σ'', dello stesso tipo di Σ' e contenente Σ'. In queste ipotesi infatti, la $\chi(x) = S[K(\omega(x))]$ muta Σ'' in una porzione di Σ'', compatta rispetto a Σ'', e quindi ammette un elemento unito; ecc. Tutto ciò suggerisce un' estensione del teorema III), sulla quale è inutile insistere oltre.

([13]) loc. cit. ([9]), pag. 468, teorema Ia.

([14]) Il ragionamento esposto nel testo permette, volendo, di dimostrare un lemma di BROUWER, che questi ha utilizzato per stabilire il teorema dell'invarianza delle dimensioni; cfr. la sua Nota: *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl* [«Mathematische Annalen», vol. 70 (1911), pagg. 161-165] il lemma è quello ivi enunciato alla fine del § 1. [Nota aggiunta sulle bozze di stampa].

2) Come è naturale, la dimostrazione del n. 4 si applica anche al caso del n. 3 [soltanto che allora, per stabilire l' esistenza di un elemento unito nella trasformazione composta mediante la $Q = M(P)$ e l' inversa della $R = P - N(P)$, si deve far ricorso al teorema di Brouwer sull' esistenza di punti uniti in una trasformazione continua dell' elemento a n dimensioni in una sua parte ([15])]. Anzi la dimostrazione del teorema IV), che così si ottiene, riesce anche più breve di quella esposta nel n. 3.

([15]) loc. cit. ([9]) pagg. 337 e 480.

(Pervenuto in Redazione il 26 settembre 1945)