RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

A proposito di una interpretazione geometrica del lemma fondamentale del calcolo integrale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 15 (1946), p. 139-143

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__139_0>

A PROPOSITO DI UNA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER (*a Padova*)

Il lemma fondamentale del calcolo integrale è stato esteso da CACCIOPPOLI e da PETROVSKY nel modo seguente: [1]

Se una funzione continua $\varphi(t)$ *ha rispetto ad un' altra* $\psi(t)$, *definita nel medesimo intervallo*, *derivata sempre nulla, essa è costante in tutto l' intervallo.*

Il risultato era già noto se $\psi(t)$ è a variazione limitata e, nel caso generale, è stato dedotto dal seguente fatto geometrico stabilito dal CACCIOPPOLI [2]

Se una linea del piano xy, *immagine continua di un segmento di retta*, *è a tangente sempre orizzontale*, *tutti i suoi punti hanno una medesima ordinata.*

Se si guardano le cose da un punto di vista geometrico si scorgono subito delle estensioni.

Si è infatti condotti naturalmente *a domandarsi se una curva continua C dello spazio*, *che abbia in ogni suo punto tutte le sue tangenti parallele al piano* xy, *giace su un piano parallelo a questo.*

In questa Nota *darò una risposta affermativa a questa*

(1) R. CACCIOPPOLI: *Sul lemma fondamentale del calcolo integrale* [Atti e Memorie della R. Acc. di Scienze Lettere ed Arti di Padova, vol. 50 (1933-34), pp. 93-98]; J. PETROVSKY: *Sur l' unicité de la fonction primitive par rapport á une fonction continue arbitrarie* [Rec. Math. Soc. Math. Moscon, *41*, 48-58 (1934)]

(2) Cfr. loc. cit per prima in (1).

questione nell'ipotesi che la curva C_1, proiezione ortogonale di C sul piano $x\,y$, sia rettificabile (3).

Arrivo a questo risultato utilizzando, del teorema di CACCIOPPOLI e PETROVSKY, il risultato parziale relativo al caso che $\psi(t)$ sia a variazione limitata.

Le ipotesi di carattere infinitesimale relative alla curva C sono sempre soddisfatte, se si sa a priori che per la curva C passa una superficie a piano tangente variabile con continuità in ogni punto della superficie e orizzontale in quelli che cadono sulla C.

Quindi, se sono soddisfatte queste condizioni la curva C giace in un piano orizzontale se è rettificabile la sua proiezione ortogonale sul piano $x\,y$ (4).

In questo secondo caso dò un'altra dimostrazione del teorema stesso che si basa sul teorema elementare della derivazione delle funzioni composte e su proprietà elementari delle funzioni a variazioni limitata.

1. – Indichiamo con

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \qquad\qquad (t_0 \leq t \leq t_1), \\ z = f(t) \end{cases}$$

le equazioni parametriche della curva continua C (5).

(3) Se $P = P(t)$ è il punto corrente della C, riferito a un parametro t, retta tangente alla C nel punto $P_0 = P(t_0)$ è ogni retta che possa pensarsi come limite di una successione di secanti passanti tutte per il punto $P(t_0)$ e per una successione di punti $P(t_1)$, $P(t_2), \ldots$, con $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$.

Sicchè l'ipotesi posta implica che $P(t)$ non può essere mai costante in nessun intervallo. Non sarebbe difficile formulare il risultato in modo da non dover far ricorso a questa ipotesi.

(4) Mi è stato comunicato verbalmente che tale questione era stata proposta da E. SCHMIDT.

(5) Per quanto abbiamo detto in (3), le funzioni $\varphi(t)$, $\psi(t)$ e $f(t)$ non risulteranno mai simultaneamente costanti in nessun intervallo e quindi, per l'ipotesi fatta sulle tangenti alla curva C, non risulteranno simultaneamente costanti in nessun intervallo nemmeno le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$.

Detti P e Q due punti della curva C, corrispondenti rispettivamente ai valori t, $t+\Delta t$ del parametro, si ha:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2 + \Delta f^2}} = 0,$$

ossia:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{\Delta f}{\sqrt{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2}}}{\sqrt{1 + \dfrac{\Delta f^2}{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2}}} = 0,$$

da cui

$$(1) \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2}} = 0.$$

Indicata con $s(t)$ la lunghezza dell' arco di C_1 corrispondente ai valori t_0 e t del parametro, dalla (1) e da $\left| \dfrac{\Delta s}{\sqrt{\Delta \varphi^2 + \Delta \psi^2}} \right| \geq 1$, segue

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = 0,$$

per ogni valore di t dell' intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Cioè la derivata di $f(t)$ rispetto alla funzione $s(t)$ è nulla, epperò la $f(t)$ è costante, come volevamo dimostrare.

2. - Dimostriamo ora che:

Se $F(x, y)$ è continua insieme colle derivate parziali prime nell' insieme aperto D, se $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sono continue e a variazione limitata e se la curva γ di equazioni $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ è contenuta in D e se $F'_x(\varphi(t), \psi(t)) = F'_y(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, allora la funzione $F(\varphi(t), \psi(t))$ è costante in tutto $t_0 \leq t \leq t_1$.

A tale scopo approssimiamo (uniformemente) la curva γ mediante una successione di poligonali

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots\ldots$$

inscritte nella curva e diciamo

$$x = \lambda_n(t),\ y = \mu_n(t) \qquad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

le equazioni di γ_n, scegliendo $\lambda_n(t)$ e $\mu_n(t)$ in modo da aversi, uniformemente, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(t) = \varphi(t)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(t) = \psi(t)$.

Poichè γ è interna a D, essa ha una distanza positiva 2ρ dalla frontiera di D; quindi $F'_x(x, y)$ e $F'_y(x, y)$ sono equicontinue nell'insieme D_1 dei punti di D aventi da γ una distanza non superiore a ρ. Pertanto, dato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare un numero intero e positivo m in modo che per ogni $n > m$ si abbia, in tutto $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$|F'_x(\lambda_n(t), \mu_n(t))| = |F'_x(\lambda_n(t), \mu_n(t)) - F'_x(\varphi(t), \psi(t))| < \varepsilon,$$

$$|F'_y(\lambda_n(t), \mu_n(t))| = |F'_y(\lambda_n(t), \mu_n(t)) - F'_y(\varphi(t), \psi(t))| < \varepsilon.$$

Esclusi un numero finito di punti dell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$ la funzione $F(\lambda_n(t), \mu_n(t))$ risulta derivabile con derivata ivi continua; quindi è

$$|F(\lambda_n(t), \mu_n(t)) - F(\lambda_n(t_0), \mu(t_0))| = \left|\int_{t_0}^{t} F'(\lambda_n(t), \mu_n(t))\, dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |F'(\lambda_n(t), \mu_n(t))|\, dt = \int_{t_1}^{t} |F'_x(\lambda_n(t), \mu_n(t))\, \lambda'_n(t) +$$

$$+ F'_y(\lambda_n(t), \mu_n(t))\, \mu'_n(t)|\, dt \leq \varepsilon \left(\int_{t_0}^{t} (|\lambda'_n(t)| + |\mu'_n(t)|)\, dt \right) \leq 2\varepsilon \times$$

$\times$ lunghezza di $\gamma_n \leq 2\varepsilon \times$ lunghezza di γ (6).

(6) Cfr. L. TONELLI: *Calcolo delle variazioni* [Bologna, Zanichelli, vol. 1, pag. 44 e pag. 171].

Da qui, data l' arbitrarietà del numero ε e dato che

$$\lim_{n \to \infty} [F(\lambda_n(t), \mu_n(t)) - F(\lambda_n(t_0), \mu_n(t_0))] =$$

$$= F(\varphi(t), \psi(t)) - F(\varphi(t_0), \psi(t_0)),$$

segue che la funzione $F(\varphi(t), \psi(t))$ è costante in tutto $t_0 \leq t \leq t_1$, come volevamo dimostrare.

(*Pervenuto in Redazione il 5 aprile 1946*)