GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Un' osservazione sulle radici di un sistema di equazioni non lineari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 15 (1946), p. 135-138

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__135_0>

UN' OSSERVAZIONE SULLE RADICI DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI NON LINEARI

Nota di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Padova*)

In queste righe dò una dimostrazione del seguente noto

TEOREMA A) - *Il sistema*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

ammette soluzioni, se le funzioni reali $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ *sono continue nell' ipercubo*

$$C: -1 \leq x_1 \leq 1, \ldots, -1 \leq x_n \leq 1,$$

dello spazio reale euclideo $S_n \equiv [x_1, \ldots, x_n]$, *e soddisfanno alle*

$$\begin{aligned} &f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq 0, \\ &f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

sulle facce [proprie, cioè $(n-1)$ *- dimensionali] di* C (¹).

La dimostrazione si basa su un teorema di KRONECKER e su un altro di POINCARÉ-BOHL; essa quindi coincide nella sua sostanza con quella data, pel teorema A), da ZWIRNER nella Nota *Sulle radici dei sistemi di equazioni non lineari* (²).

Questa e quella non sono poi essenzialmente distinte da un' altra dimostrazione del teorema A), implicitamente data da

(¹) Per le indicazioni bibliografiche rimando alle note (²⁷) e (³⁰) ed al n. 23 della mia Memoria *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie* [questi « Rendiconti », questo volume].

(²) Questi « Rendiconti », questo volume.

Brouwer nella Nota *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl* [3]; il che sarà chiarito meglio in seguito.

Dimostrazione. - Se le $f_i(x_1, \dots, x_n)$ si annullano simultaneamente in un punto della frontiera c di C, non v'è bisogno d'altro.

Nel caso contrario, tenuto conto delle (2), si riconosce che il segmento avente un estremo nel punto corrente $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ di c e l'altro nel punto $(f_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, f_n(\xi_1, \dots, \xi_n))$ di S_n, non contiene mai l'origine O delle coordinate. Epperò, su un ciclo $(n - 1)$ - dimensionale σ, avente c per sostegno [4], il sistema di funzioni $\{f_1, \dots, f_n\}$ ha [5] la stessa caratteristica [6], o indice di Kronecker, del sistema di funzioni $\{x_1, \dots, x_n\}$. Ma per quest'ultimo quella caratteristica vale 1; quindi [7] il sistema (1) ammette soluzioni.

(3) «Mathematische Annalen», vol. 70 (1911), pagg. 161-165; § 1.

(4) Un ciclo quale σ si può ottenere, per esempio, considerando un simplesso orientato n — dimensionale X, contenente nell'interno l'origine O di S_n, e riportando su c, mediante proiezione da O, la decomposizione della frontiera di X in simplessi $(n - 1)$ – dimensionali orientati coerentemente; cfr. P. Alexandroff e H. Hopf, *Topologie* [Springer, Berlino (1935)], vol. I, cap. XII, § 1, n. 3, pag. 461; un altro modo per ottenere σ è indicato implicitamente nell'Oss. I (in entrambi i casi σ è *berandungsfähig* anche se $n = 1$; cfr. la *Topologie* ora citata, cap. IV, § 4, n. 7, pagg. 179-180). In sostanza, per dirla con altre parole, si tratta di orientare c.

(5) Pel teorema di Poincaré - Bohl. Cfr. loc. cit. (4), cap. XII, § 1, n. 2, pag. 459; si veda anche: Poincaré, *Sur le courbes definies par les équations differentielles* [«Journal de Mathématique», serie 4, tomo 2 (1886)], p. 177; Bohl, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», t. 127 (1904).

(6) Per questa nozione, cfr. loc. cit. (4), cap. XII, § 2, n. 3, pag. 469.

(7) Pel teorema di Kronecker. Cfr. loc. cit. (4), cap. XII, § 2, n. 2, pag. 468 (oppure n. 3, pag. 470); si veda anche, oltre agli studi di Kronecker nei «Monatsberichte der Akademie der Wissenschaft zu Berlin» (1869), il *Traité d'Analyse* di Picard [Gauthier-Villars, Parigi (1901), tomo 1, 2a ed., cap. IV, § 7], da cui è desunta la citazione precedente; la *Note sur quelques applications de l'indice de* Kronecker, che Hadamard ha pubblicato in appendice alla *Introduction à la théorie des fonctions* del Tannery [Hermann, Parigi (1910), tomo II, 2a ed., pagg. 436-477; se ne vedano specialmente le pag. 465-468; da questa Nota ho desunto le ultime due citazioni di (5)]; e, infine, loc. cit. (4), cap. XII, § 1, n. 7, pagg. 465-467.

Osservazione I. - Supponiamo che le f_i non si annullino mai simultaneamente su c [in particolare, che le (2) siano soddisfatte in senso forte] e che il sistema (2) ammetta un numero finito di soluzioni. Consideriamo una decomposizione simpliciale Σ di C, tale che ogni soluzione delle (1) sia interna a un simplesso n - dimensionale di Σ. Orientiamo i simplessi di Σ in modo coerente. Otteniamo così da Σ un complesso orientato, la cui frontiera è un ciclo quale il ciclo σ considerato nella dimostrazione precedente. Epperò, in virtù di teoremi noti [8], la dimostrazione svolta ci dice pure che:

In queste ipotesi ulteriori, la somma delle molteplicità [9] *delle soluzioni del sistema* (1) *è dispari* [10].

Osservazione II. - Per dimostrare il teorema A), si può anche procedere nel modo seguente [11]:

1) supporre, al solito, che il sistema (1) non abbia soluzioni su c;

2) osservare che allora la trasformazione continua t, definita dalle formule $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ e pensata come trasformazione di C in un insieme Γ dello stesso $S_n \equiv [x_1, \ldots, x_n]$, muta le facce di C appartenenti, rispettivamente, agli iperpiani $x_i = -1$ e $x_i = +1$ $(i = 1, \ldots, n)$ in insiemi (chiusi) contenuti, rispettivamente, nei semispazi $x_i \leq 0$ e $x_i \geq 0$ e non passanti per O (e aventi da O una distanza positiva);

3) dimostrare che l'origine O di S_n appartiene a Γ con lo stesso ragionamento, di cui Brouwer si serve nella Nota citata in [3] per riconoscere che *l'origine O sarebbe interna a* Γ, *se t*

[8] Cfr. loc. cit. [4], cap. XII, § 2, n. 5, pag. 472.

[9] Per questa nozione, cfr. loc. cit. [4], cap. XII, § 2, n. 4, pag. 470.

[10] Un'osservazione analoga è stata fatta anche da L. Brusotti, in *Dimostrazione di un lemma algebrico utile in questioni di analisi* [«Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa», serie II, vol. XI (1942), pagg. 211-215; se ne veda specialmente la pag. 215], nel caso che le f_i siano polinomi, le (2) siano soddisfatte nel senso forte, le soluzioni del sistema (1) contenute in C siano in numero finito e semplici.

[11] Cfr. la nota [27] della mia Memoria citata in [1].

nel deformare C spostasse ogni punto di C di una quantità minore di uno.

La dimostrazione già data e questa non sono essenzialmente diverse. A conti fatti, nel punto 3) si finisce collo stabilire quel tanto dei teoremi di POINCARÉ-BOHL e KRONECKER che bastano per dimostrare il teorema *A*).

Tant' è vero che il lemma di BROUWER ora ricordato è un corollario di un teorema di ROUCHÉ ([12]) (e quindi del teorema di POINCARÉ-BOHL) sull' indice di un punto rispetto ad un ciclo, cosa che ho avuto occasione di rilevare implicitamente anche altrove ([13]).

Ma si può anche osservare che le considerazioni svolte si possono invertire, nel senso che una volta dimostrato il teorema *A*) è facile dedurre che O è interno all' insieme Γ, se le (2) sono soddisfatte in senso forte ([14]).

([12]) Cfr. loc. ([4]), cap. XII, § 1, n. 2, pag. 459.

([13]) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema d' esistenza per gli elementi uniti di una trasformazione funzionale* [questi «Rendiconti», questo volume] n. 3.

([14]) Ma non è nemmeno difficile il dedurre, sempre dal teorema *A*), che il punto O è interno a Γ, se sono verificate le (2) e se le f_i non si annullano mai simultaneamente sul contorno di C.

(*Pervenuto in Redazione il 7 febbraio 1946*)