Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Zwirner

Sulle radici dei sistemi di equazioni non lineari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 15 (1946), p. 132-134

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__132_0>

SULLE RADICI DEI SISTEMI DI EQUAZIONI NON LINEARI

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER *(a Padova)*

In questa Nota mi propongo di dimostrare che:

Il sistema

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

ammette almeno una soluzione se le f_i *sono* (*reali e*) *continue nell' ipercubo* (*dell'* S_n *reale euclideo*)

$$C: \qquad |x_i| \leq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e soddisfanno alle

$$\begin{aligned} &f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq 0, \\ &f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq 0. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

Questo teorema è stato riconosciuto da MIRANDA (¹) equivalente al teorema di BROUWER sull' esistenza di punti uniti nelle trasformazioni continue dell' elemento a n dimensioni in sue parti.

Lo stesso teorema è stato dimostrato da BRUSOTTI (²) nell' ipotesi che le funzioni f_i sieno razionali intere e che le (2) sieno

(¹) C. MIRANDA: *Un' osservazione su un teorema di* BROUWER [Boll. Unione Matematica Italiana serie II, vol. 3 (1940-41), pp. 5-7].

(²) L. BRUSOTTI: *Dimostrazione di un lemma algebrico utile in questioni di analisi* [Annali della R. Scuola Normale di Pisa, vol. XI, pp. 211-215].

soddisfatte in senso forte. Di qui si deduce subito, come è stato osservato da CINQUINI [3], che il teorema è vero anche se le f_i sono continue e se le (2) sono soddisfatte in senso forte.

Quest' ultima condizione poi si elimina facilmente secondo un' osservazione sfruttata anche da MIRANDA.

Infine rimando alla memoria *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali* di SCORZA DRAGONI, per altri dati bibliografici relativi a dimostrazioni di quel teorema o date in lavori di BROUWER o presumibilmente deducibili da proposizioni di BROUWER e LEBESGUE o di BIRKHOFF-KELLOGG [4].

In questa Nota dò un' altra dimostrazione di quel teorema seguendo un suggerimento di SCORZA DRAGONI [5].

Essa si basa essenzialmente sulla nozione di indice di KRONECKER [6] e sul teorema POINCARÉ-BOHL [7]. Ciò ed il fatto che anche il teorema di BROUWER si può dedurre da queste nozioni con notevole rapidità, costituiscono un' altra riprova di quella identità sostanziale già riconosciuta in modo immediato da MIRANDA.

1. – Le funzioni $f_i + \varepsilon x_i$, per ogni $\varepsilon > 0$, verificano le (2) in senso forte. Questa osservazione di MIRANDA permette appunto di limitarsi a considerare il caso che le (2) valgono nel senso forte, come anche noi faremo.

(3) S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie* [Rend. del Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. XIV (1940), pp. 157-170], nota (12).

(4) G. SCORZA DRAGONI: *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie* [Questi «Rendiconti», questo volume], note (27) e (30), n. 23.

(5) Loc. cit. (4), nota (30).

(6) Nella mia Nota: *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali del quarto ordine* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, vol. IX (1938), pp. 150-155], sfruttando la nozione di indice di KRONECKER, avevo già dimostrato, implicitamente, il teorema attuale, nel caso $n = 2$ e nelle ipotesi che le (2) fossero soddisfatte in senso forte.

(7) Si veda J. HADAMARD: *Note sur quelques applications de l' indice de* KRONECKER pubblicata in appendice in J. TANNERY: *Introduction a la théorie des fonctions d' une variable* [Hermann, Parigi (1910), vol. 2], n. 35.

Scegliamo il numero positivo δ, minore di 1, in modo tale da aversi $f_i(x_1, \ldots, x_n) < 0$, $f_i(x_1, \ldots, x_n) > 0$ a seconda che per il punto $P \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ risulti $x_i + 1 < \delta$ o $1 - x_i < \delta$.

Definiamo ora le funzioni $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ponendo in C:

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_i + 1 - \delta}{\delta} \qquad \text{se } -1 \leq x_i < -1 + \delta,$$

$$\varphi_i(x_i, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{se } -1 + \delta \leq x_i \leq 1 - \delta,$$

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_i + \delta - 1}{\delta} \qquad \text{se } 1 - \delta < x_i \leq 1.$$

Le φ_i non sono mai simultaneamente nulle sulle faccie di C; se è $\varphi_i \neq 0$ in un punto di una di queste faccie, f_i ha ivi lo stesso segno di φ_i. Quindi $\sum_1^n{}_i f_i \varphi_i > 0$ sulla frontiera di C.

Epperò nello spazio $\Sigma_n \equiv (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ l'indice dell'origine Ω rispetto alla trasformata T della frontiera (orientata) F di C mediante le $\xi_i = f_i$ è uguale all'indice ρ rispetto alla trasformata θ della F mediante le $\xi_i = \varphi_i$ [8]. Se $\rho \neq 0$ il sistema (1) ammette quindi soluzioni [9]. Per dimostrare la $\rho \neq 0$ si potrebbe ricorrere all'integrale di Kronecker. Ma basta anche osservare che il luogo riempito da θ è la frontiera del cubo $|\xi_i| \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, per giungere alla conclusione.

[8] Cfr. loc. cit. [7] (si veda in particolar modo la pag. 469).
[9] Cfr. loc. cit. [7] n. 33-34.

(*Pervenuto in Redazione il 5 febbraio 1946*)