Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Zwirner

Criteri d'unicità per un problema di valori al contorno per equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie d'ordine qualunque

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 13 (1942), p. 9-25

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1942__13__9_0>

CRITERI D'UNICITÀ PER UN PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO PER EQUAZIONI E SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE D'ORDINE QUALUNQUE.

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER *a Padova*.

Recentemente, diversi Autori hanno dato, sotto ipotesi molto generali, delle condizioni sufficienti che assicurano l'esistenza di almeno una soluzione del problema al contorno

$$\text{I)}\qquad \begin{aligned} &y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),\\ &y(x_1) = c_1,\ y(x_2) = c_2, \ldots\ y(x_n) = c_n \text{ [1]}. \end{aligned}$$

Questi teoremi sono stati poi estesi anche al problema più generale

[1] R. CACCIOPPOLI: *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi ai limiti* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 6ª, vol. XII (1931), pp. 498-502]; S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali d'ordine n* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. IX (1940) pp. 61-77]; G. ZWIRNER: *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie d'ordine n* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, vol. XII (1941), pp 114-122]; *Un criterio d'esistenza relativo a un problema al contorno per un'equazione differenziale ordinaria d'ordine n* [Atti della R. Accademia d'Italia, Rendiconti di Scienze fis. mat. e nat., vol. III (1942), pp. 217-222]; G. SCORZA DRAGONI: *Un'osservazione su un problema al contorno per le equazioni differenziali ordinarie* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Tomo CI, Parte II (1941-42), pp. 203-212].

$$\text{II)}\quad \begin{aligned} & y_i^{(n_i)} = f_i(x, y_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_p, \ldots, y_p^{(n_p-1)}), \\ & y_i(x_{i,k}) = l_{i,k,0},\ y_i'(x_{i,k,1}) = l_{i,k,1}, \ldots, y^{(\nu_{i,k}-1)}(x_{i,k}) = l_{i,k,\nu_{i,k}-1}, \\ & (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, s_i;\ \nu_{i,1} + \nu_{i,2} + \ldots + \nu_{i,s_i} = n_i)\ (^2) \end{aligned}$$

D'altra parte il De La Vallée Poussin ([3]) ha dato invece un criterio d'unicità per le eventuali soluzioni del problema I) nell'ipotesi che la $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sia continua, rispetto a tutti i suoi argomenti, in un dominio del tipo:

$$a \leq x \leq b, \quad |\, y^{(i)} - \bar{y}^{(i)} \,| \leq M, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ y^{(0)} = y),$$

e soddisfaccia ivi, per ogni coppia di punti distinti $(x, y_1, y_1', \ldots \ldots, y_1^{(n-1)})$, $(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)})$ alla condizione di Lipschtz:

$$|\, f(x, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, \ldots, y_2^{(n-1)}) \leq L_0 \,|\, y_1 - y_2 \,| + \\ + L_1 \,|\, y_1' - y_2' \,| + \ldots + L_{n-1} \,|\, y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)} \,|,$$

con

$$\sum_0^{n-1}{}_i\, L_i \frac{(b-a)^{n-i}}{(n-i)\,!} < 1\,, \quad (L_i = \text{cost.} \geq 0)\,.$$

Nella presente Nota indico altri due teoremi di unicità relativi al problema I); il primo di questi si ispira ad un criterio di Tonelli, esteso successivamente da Scorza Dragoni ([4]), mentre il secondo costituisce una generalizzazione di quello di De La Vallée Poussin. Quest'ultimo viene poi esteso al problema II) ed in un certo senso è questo il risultato centrale della Nota presente.

([2]) R. Caccioppoli loc. cit. per primo in ([1]); S. Cinquini: *Sopra il problema di* Nicoletti *per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. X (1941). pp. 127–138]; G. Zwirner: *Problemi di valori al contorno per sistemi di equazioni differenziali ordinarie d'ordine qualunque* [In corso di stampa negli Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ad Arti].

([3]) C. De La Vallée Poussin: *Sur l'equation différentielle linéaire du seconde ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équation d'ordre n.* [Journal de Mathématiques, tome VIII, fasc. II (1929), pp. 125-144].

([4]) L. Tonelli: *Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria* [Rendiconti dei Lincei, serie VI, vol. I (1° semestre 1925), pp. 272-277]; G. Scorza Dragoni: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equazione differenziale* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. LIV (1930), pp. 430-448].

§ 1.

1. - Teorema I°. *Sia*

$$f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n-1)})$$

una funzione reale delle variabili reali $x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n-1)}$ *definita nel dominio*

$$R:\ a\leq x\leq b,\ |y^{(i)}-\overline{y}^{(i)}|\leq M,\qquad (i=0,\ 1,\dots,\ n-1\,;\ y^{(0)}=y),$$

e si consideri il problema

$$(1)\qquad \begin{aligned} &y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n-1)}),\\ &y(x_1)=c_1,\ y(x_2)=c_2,\dots,\ y(x_n)=c_n, \end{aligned}$$

dove $c_1,\ c_2,\dots,\ c_n$ *sono* n *numeri reali soddisfacenti alla limitazione* $|c_j-\overline{y}^{(0)}|\leq M (j=1,\ 2,\dots,\ n)$ *e* $x_1<x_2<\dots<x_n$ n *punti dell'intervallo* $a\leq x\leq b$. *Sieno inoltre*

$$y_1(x),\quad y_2(x),$$

quasi ovunque in $a\leq x\leq b$, *due soluzioni del problema* (1) *assolutamente continue insieme con le loro prime* $n-1$ *derivate.*

Per ogni coppia di punti $(x,\ y_1(x),\ y_1'(x),\dots,\ y_1^{(n-1)}(x))$, $(x,\ y_2(x),\ y_2'(x),\dots,\ y_2^{(n-1)}(x))$, *con* $y_1^{(n-1)}(x)>y_2^{(n-1)}(x)$, *supponiamo verificata la diseguaglianza*

$$(2)\qquad \begin{aligned} &|f(x,y_1(x),y_1'(x),\dots,y_1^{(n-1)}(x))-f(x,y_2(x),y_2'(x),\dots,y_2^{(n-1)}(x))|\leq\\ &\leq\alpha(x)\,\varphi(y_1^{(n-1)}(x)-y_2^{(n-1)}(x))+\varphi_1(y_1^{(n-1)}(x)-y_2^{(n-1)}(x))\cdot\\ &\cdot[\omega_0(y_1(x)-y_2(x))\,|y_1'(x)-y_2'(x)|+\dots\dots+\\ &+\omega_{n-2}(y_1^{(n-2)}(x)-y_2^{(n-2)}(x))\,|y_1^{(n-1)}(x)-y_2^{(n-1)}(x)|+\beta(x)], \end{aligned}$$

dove $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\omega_j(u)$ *e* $\varphi_1(u)$ *sono funzioni non negative di cui le prime due sono sommabili in* $a\leq x\leq b$, *le* $\omega_j(u)$ *sull'intervallo* $-2M\leq u\leq 2M$, $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ *sono continue in* $0<u\leq 2M$ *con* $\varphi(u)>0$, *e tali che esista un numero* $K>0$

per il quale si abbia

$$\varphi_1(u) \leq K\varphi(u). \tag{3}$$

Supponiamo inoltre che, fissato a piacere un numero positivo h, si possa determinare un numero positivo $\delta^* < h$ in modo d'aversi, per ogni $\delta > 0$ e $< \delta^*$,

$$\int_\delta^h \frac{du}{\varphi(u)} > K\left\{\int_{-2M}^{2M} [(n-1)\,\omega_0(u) + (n-2)\,\omega_1(u) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \omega_{n-2}(u)]\,du + \int_a^b \beta(x)\,dx\right\} + \int_a^b \alpha(x)\,dx. \tag{4}$$

Allora:

In tali ipotesi riesce, in tutto $a \leq x \leq b$,

$$y_1(x) = y_2(x).$$

Per dimostrare il teorema enunciato basterà, evidentemente, far vedere che prefissato un numero positivo ε arbitrariamente piccolo, riesce, in tutto $a \leq x \leq b$,

$$|y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

A tale scopo osserviamo innanzi tutto che annullandosi la funzione $y_1(x) - y_2(x)$ negli n punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, esisterà almeno un punto x_0, interno all'intervallo $a \leq x \leq b$, dove risulta

$$y_1^{(n-1)}(x_0) - y_2^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Facciamo allora dapprima vedere che nell'intervallo $x_0 \leq x \leq b$ è sempre verificata la (5). Infatti, supponiamo, se possibile, che in un certo punto ξ $(x_0 < \xi \leq b)$ si abbia $|y_1^{(n-1)}(\xi) - y_2^{(n-1)}(\xi)| = \varepsilon$ e poniamo $\xi_0 = x_0$ se nell'intervallo semiaperto $x_0 < x \leq \xi$ la $y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x)$ non si annulla mai; in caso contrario indichiamo con ξ_0 il massimo punto, certamente esistente, dell'intervallo $x_0 \leq x \leq \xi$ dove $y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x)$ si annulla.

Fissato ora un numero positivo $\delta < \varepsilon$ in modo d'aversi

$$
(6) \qquad \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{du}{\varphi(u)} > K \left\{ \int_{-2M}^{2M} [(n-1)\,\omega_0(u) + (n-2)\,\omega_1(u) + \dots \right.
$$

$$
\left. \dots + \omega_{n-2}(u)]\,du + \int_a^b \beta(x)\,dx \right\} + \int_a^b \alpha(x)\,dx ,
$$

indichiamo con ξ_1 un punto dell'intervallo $\xi_0 \leq x \leq \xi$ dove risulti $y_1^{(n-1)}(\xi_1) - y_2^{(n-1)}(\xi_1) = \delta$.

Nell'intervallo $\xi_1 \leq x \leq \xi$ sarà sempre o $y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x) > 0$ oppure $y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x) < 0$: supponiamo, tanto per fissare le idee, verificata la prima alternativa, cioè sia

$$
y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x) > 0 . \quad (\xi_1 \leq x \leq \xi).
$$

Si avrà allora, per la (2) e (3), quasi ovunque in $\xi_1 \leq x \leq \xi$,

$$
\frac{y_1^{(n)}(x) - y_2^{(n)}(x)}{\varphi(y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x))} \leq \alpha(x) + K[\omega_0(y_1(x) - y_2(x))\,|y_1'(x) - y_2'(x)| + \dots
$$

$$
\dots + \omega_{n-2}(y_1^{(n-2)}(x) - y_2^{(n-2)}(x))\,|y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x)| + \beta(x)] .
$$

Da qui, integrando fra ξ_1 e ξ, osservando che la funzione $y_1^{(n-i)}(x) - y_2^{(n-i)}(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ y_1^{(0)}(x) - y_2^{(0)}(x) = y_1(x) - - y_2(x))$ cambia di segno, al più, $i-1$ volte, si ha, in virtù di un noto teorema di cambiamento di variabili sotto il segno d'integrale [5]

$$
\int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{du}{\varphi(u)} \leq K \left\{ \int_{-2M}^{2M} [(n-1)\,\omega_0(u) + (n-2)\,\omega_1(u) + \dots + \omega_{n-2}(u)]\,du + \right.
$$

$$
\left. + \int_a^b \beta(x)\,dx \right\} + \int_a^b \alpha(x)\,dx ,
$$

il che contraddice la (6).

[5] Cfr. L. Tonelli: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. I, n. 63, b).

In modo analogo si prova che sussiste la (5) anche nell'intervallo $a \leq x \leq x_0$. Basta infatti osservare che dalla (2) si deduce

$$f(x, y_1(x), \ldots, y_1^{(n-1)}(x)) - f(x, y_2(x), \ldots, y_2^{(n-1)}(x)) \geq -$$
$$- \alpha(x)\varphi(y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x)) - [\omega_0(y_1(x) - y_2(x)) \,|\, y_1'(x) - y_2'(x) \,| + \ldots$$
$$\ldots + \omega_{n-2}(y_1^{(n-2)}(x) - y_2^{(n-2)}(x)) \,|\, y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x) \,| +$$
$$+ \beta(x)]\,\varphi_1(y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x)),$$

e poi ragionare come nel caso precedente.

2. - Teorema II. *La funzione reale* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *di variabili reali* $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, *sia definita nel dominio*

$$R_1:\; x_1 \leq x \leq x_n,\; |\, y^{(i)} - \overline{y}^{(i)} \,| \leq M, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\; y^{(0)} = y),$$

e soddisfaccia ivi alla diseguaglianza

$$|\, f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \,| \leq \varphi(x), \tag{7}$$

con $\varphi(x) \geq 0$ *sommabile in* $x_1 \leq x \leq x_n$.

Per ogni coppia di punti distinti $(x, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)})$, $(x, y_2, \ldots, y_2^{(n-1)})$ *di* R_1 *supponiamo inoltre verificata la diseguaglianza*

$$\begin{aligned} &|\, f(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}) \,| \leq \\ &\leq \sum_{0}^{n-1}{}_i\, \alpha_i(x)\,\gamma_i\{\,|\, y_1 - y_2 \,|,\; |\, y_1' - y_2' \,|, \ldots,\; |\, y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)} \,|\,\}\; |\, y_1^{(i)} - y_2^{(i)} \,|, \end{aligned} \tag{8}$$

dove le $\alpha_i(x)$ *sono funzioni non negative e sommabili in* $x_1 \leq x \leq x_n$, *le* $\gamma_i(\,|\, u_0 \,|, \,|\, u_1 \,|, \ldots, \,|\, u_{n-1} \,|\,)$ *sono non negative e non decrescenti per ogni valore delle variabili* $|\, u_0 \,|$, $|\, u_1 \,|, \ldots$ $\ldots, |\, u_{n-1} \,|$, *e tali che posto*

$$N_i = \frac{(x_n - x_1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_{x_1}^{x_n} 2\,\varphi(x)\,dx, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

risulti

$$(9) \qquad \sum_{0}^{n-1} {}_i \gamma_i (N_0, N_1, \dots, N_{n-1}) \frac{(x_n - x_1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_{x_1}^{x_n} \alpha_i(x)\, dx < 1 .$$

Allora:

Il problema (1) *ammette al più una soluzione* $y(x)$ *assolutamente continua con le sue prime* $n-1$ *derivate in* $x_1 \leq \leq x \leq x_n$.

Per dimostrare il teorema enunciato supponiamo, se possibile, che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sieno due soluzioni distinte del problema (1), assolutamente continue insieme con le loro prime $n-1$ derivate in $x_1 \leq x \leq x_n$. Dalla (7) si ha allora, quasi ovunque in $x_1 \leq x \leq x_n$,

$$(10) \qquad \begin{aligned} | y_1^{(n)}(x) - y_2^{(n)}(x) | = | f(x, y_1(x), y_1'(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x)) - \\ - f(x, y_2(x), y_2'(x), \dots y_2^{(n-1)}(x)) | \leq 2\varphi(x) . \end{aligned}$$

Inoltre, annullandosi la funzione $y_1(x) - y_2(x)$ negli n punti $x_1, x_2, \dots, x_n$, si avrà, in tutto $x_1 \leq x \leq x_n$,

$$(11) \quad | y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x) | \leq \frac{(x_n - x_1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_{x_1}^{x_n} | y_1^{(n)}(x) - y_2^{(n)}(x) | \, dx,$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1) \; (^6),$$

e quindi, per la (10),

$$(12) \qquad | y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x) | \leq \frac{(x_n - x_1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_{x_1}^{x_n} 2\varphi(x)\, dx = N_i .$$

Premesso ciò, dalla (8), tenute presenti le (11) e (12) e le ipotesi fatte sulle γ_i, si ha, quasi ovunque in $x_1 \leq x \leq x_n$,

[6] Cfr. loc. cit. per terzo in [1], n. 1.

$$|y_1^{(n)}(x) - y_2^{(n)}(x)| \leq$$
$$\leq \sum_0^{n-1}{}_i\, \alpha_i(x)\, \gamma_i(N_0, N_1, \dots, N_{n-1}) \frac{(x_n - x_1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_{x_1}^{x_n} |y_1^{(n)}(x) - y_2^{(n)}(x)|\, dx.$$

Integrando ora tale diseguaglianza fra x_1 e x_n e dividendone poi ambo i membri per $\int_{x_1}^{x_n} |y_1^{(n)}(x) - y_2^{(n)}(x)|\, dx$, diverso da zero (perchè altrimenti sarebbe identicamente $y_1(x) = y_2(x)$), si ottiene

$$1 \leq \sum_0^{n-1}{}_i\, \gamma_i(N_0, N_1, \dots, N_{n-1}) \frac{(x_n - x_1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \int_{x_1}^{x_n} \alpha_i(x)\, dx,$$

il che contraddice la (9).

L'assurdo trovato prova quindi il teorema enunciato.

3. – Ferme restando tutte le altre ipotesi, supponiamo si possa soddisfare alla (8) con

$$\alpha_0(x) = \alpha_1(x) = \dots = \alpha_{n-1}(x) = 1;$$

supponiamo cioè verificata, in tutto R_1, la relazione

$$(13) \quad \begin{aligned} &|f(x, y_1, \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, \dots, y_2^{(n-1)})| \leq \\ &\leq \sum_0^{n-1}{}_i\, \gamma_i(|y_1 - y_2|, \dots, |y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}|)\, |y_1^{(i)} - y_2^{(i)}|. \end{aligned}$$

Allora:

In queste nuove ipotesi il problema (1) *ammette, al più, una soluzione $y(x)$ assolutamente continua insieme con le sue prime $n-1$ derivate in $x_1 \leq x \leq x_n$ anche quando alla* (9) *si sostituisce la:*

$$(14) \qquad \sum_0^{n-1}{}_i\, \gamma_i(N_0, N_1, \dots, N_{n-1}) \frac{(x_n - x_1)^{n-i}}{(n-i)!} < 1.$$

Infatti, diciamo ancora, se possibile, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni distinte del problema (1), assolutamente continue insieme con le loro prime $n-1$ derivate in $x_1 \leq x \leq x_n$ e ricordiamo, innanzi tutto, che De La Vallée Poussin ha dimostrato, nel lavoro citato (7), che la funzione $y_1(x) - y_2(x)$, annullantesi negli n punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, verifica le relazioni

$$(15) \qquad \int_{x_1}^{x_n} | y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x) | \, dx \leq \frac{(x_n - x_1)^{n-i}}{(n-i)\,!} \cdot \mu, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2),$$

dove μ indica il massimo valore assunto da $| y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x) |$ in $x_1 \leq x \leq x_n$.

Diciamo ancora η_1 e η due punti dell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_n$ dove la funzione $| y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x) |$ assume rispettivamente il valore 0 e μ.

Dalla (13), tenendo presenti le (12), si ha, quasi ovunque in $x_1 \leq x \leq x_n$,

$$| y_1^{(n)}(x) - y_2^{(n)}(x) | \leq \sum_0^{n-1}{}_i \, \gamma_i (N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}) \, | y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x) | ,$$

che integrata da η_1 a η, tenute presenti le (15), dà facilmente

$$\mu \leq \sum_0^{n-1}{}_i \, \gamma_i (N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}) \frac{(x_n - x_1)^{n-i}}{(n-i)\,!} \cdot \mu .$$

Dividendo ora ambo i membri per μ si ottiene una relazione che contraddice alla (14), il che prova il nostro asserto.

Il criterio enunciato da De La Vallée Poussin, nel lavoro citato, si deduce dal precedente supponendo la $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ continua in R_1, rispetto a tutti gli argomenti, e ponendo

$$\gamma_i (| u_0 |, \; | u_1 |, \ldots, | u_{n-1} |) = K_i$$

(7) Cfr. loc. cit. in (3), pag. 137.

con K_i costanti non negative e soddisfacenti alla relazione

$$\sum_{0}^{n-1} {}_i K_i \frac{(x_n - x_1)^{n-i}}{(n-i)!} < 1 .$$

§ 2.

4. - Prima di estendere i teoremi enunciati nei n. 2 e 3 ai sistemi di equazioni differenziali ordinarie d'ordine qualunque, premettiamo il seguente lemma:

Se $c_{r,s}$ $(r, s = 1, 2, \dots, p)$ *sono numeri non negativi, allora il sistema di diseguaglianze*

$$\text{(16)} \quad \begin{array}{l} (c_{1,1} - 1)\xi_1 + c_{1,2}\xi_2 + \dots + c_{1,p}\xi_p \geq 0 , \\ c_{2,1}\xi_1 + (c_{2,2} - 1)\xi_2 + \dots + c_{2,p}\xi_p \geq 0 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{p,1}\xi_1 + c_{p,2}\xi_2 + \dots + (c_{p,p} - 1)\xi_p \geq 0 , \end{array}$$

nelle variabili reali $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, *ammette soltanto soluzioni non positive se risulta:*

$$\text{(17)} \quad D_k = (-1)^k \begin{vmatrix} c_{1,1} - 1 & c_{1,2} \dots c_{1,k} \\ c_{2,1} & c_{2,2} - 1 \dots c_{2,k} \\ \dots & \dots\dots \\ \dots & \dots\dots \\ c_{k,1} & c_{k,2} \dots c_{k,k} - 1 \end{vmatrix} > 0, \qquad (k = 1, 2, \dots p) \text{ [8]}.$$

Supponiamo infatti verificate le (17) e dimostriamo che il sistema (16) non può avere soluzioni positive.

Il teorema è evidente per $p = 1$. Supponiamolo allora verificato per $p - 1$ e dimostriamolo per p.

Le (16), tenendo presente la prima delle (17), cioè la $c_{1,1} - 1 < 0$, equivalgono alle

[8] Per il ragionamento svolto in questo numero cfr. anche loc. cit. per secondo e terzo in [2].

$$(18)\quad \begin{cases} \xi_1 \leq \dfrac{c_{1,2}}{1-c_{1,1}}\xi_2 + \dfrac{c_{1,3}}{1-c_{1,1}}\xi_3 + \ldots\ldots + \dfrac{c_{1,p}}{1-c_{1,1}}\xi_p\,, \\ c_{2,1}\xi_1 \geq -(c_{2,2}-1)\xi_2 - c_{2,3}\xi_3 - \ldots\ldots - c_{2,p}\xi_p\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{p,1}\xi_1 \geq -c_{p,2}\xi_2 - c_{p,3}\xi_3 - \ldots\ldots - (c_{p,p}-1)\xi_p\,, \end{cases}$$

e quindi $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_p$ dovranno soddisfare al seguente sistema di diseguaglianze:

$$(19)\quad \begin{cases} [(c_{2,2}-1)(1-c_{1,1}) + c_{1,2}c_{2,1}]\,\xi_2 + [c_{2,3}(1-c_{1,1}) + c_{1,3}c_{2,1}]\,\xi_3 + \ldots \\ \qquad \ldots + [c_{2,p}(1-c_{1,1}) + c_{1,p}c_{2,1}]\,\xi_p \geq 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [c_{p,2}(1-c_{1,1}) + c_{1,2}c_{p,1}]\,\xi_2 + [c_{p,3}(1-c_{1,1}) + c_{1,3}c_{p,1}]\,\xi_3 + \ldots \\ \qquad \ldots + [(c_{p,p}-1)(1-c_{1,1}) + c_{1,p}c_{p,1}]\,\xi_p \geq 0\,, \end{cases}$$

analogo al (16), come si vede facilmente, ma contenente soltanto $p-1$ diseguaglianze con $p-1$ incognite.

Si ponga

$$(-1)^{h-1}\overline{D}_h = \begin{vmatrix} (c_{2,2}-1)(1-c_{1,1}) + c_{1,2}c_{2,1} & \ldots & c_{2,h}(1-c_{1,1}) + c_{1,h}c_{2,1} \\ c_{3,2}(1-c_{1,1}) + c_{1,2}c_{3,1} & \ldots & c_{3,h}(1-c_{1,1}) + c_{1,h}c_{3,1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ c_{h,2}(1-c_{1,1}) + c_{1,2}c_{h,1} & \ldots & (c_{h,h}-1)(1-c_{1,1}) + c_{1,h}c_{h,1} \end{vmatrix}.$$

Dalle (17), tenuto conto che

$$\overline{D}_h = (-1)^{h-1}\left\{ (1-c_{1,1})^{h-1} \begin{vmatrix} c_{2,2}-1 & c_{2,3} & \dots & c_{2,h} \\ c_{3,2} & c_{3,3}-1 & \dots & c_{3,h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{h,2} & c_{h,3} & \dots & c_{h,h}-1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$+\, c_{1,2}(1-c_{1,1})^{h-2} \begin{vmatrix} c_{2,1} & c_{2,3} & \dots & c_{2,h} \\ c_{3,1} & c_{3,3}-1 & \dots & c_{3,h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{h,1} & c_{h,2} & \dots & c_{h,h}-1 \end{vmatrix} + \dots + $$

$$\left. +\, c_{1,h}(1-c_{1,1})^{h-2} \begin{vmatrix} c_{2,2}-1 & c_{2,3} & \dots & c_{2,1} \\ c_{3,2} & c_{3,3}-1 & \dots & c_{3,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{h,2} & c_{h,3} & \dots & c_{h,h}-1 \end{vmatrix} \right\} = (1-c_{1,1})^{h-2} \cdot D_h\,,$$

segue

$$\overline{D}_h > 0\,,$$

e quindi per l'ipotesi a base del processo d'induzione, il sistema (19) ammette soltanto soluzioni non positive e tali risulteranno allora anche i valori che si devono attribuire a ξ_1 per soddisfare le (18), e con ciò resta dimostrato il lemma enunciato.

Osservazione. Dal lemma precedente possiamo dedurre i seguenti corollari:

a) *Le condizioni* (17) *sono certamente verificate, se è*

$$c_{i,1} + c_{i,2} + \dots + c_{i,p} < 1, \quad (i = 1, 2, \dots, p). \tag{20}$$

b) *Nell'enunciato a*) *alle* (20) *possiamo sostituire le*

$$c_{1,j} + c_{2,j} + \dots + c_{p,j} < 1\,, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$ [9].

[9] Cfr. loc. cit. per terzo in [2].

§ 3.

5. – Teorema. *Sieno:* $\nu_{i,1}, \nu_{i,2}, \ldots, \nu_{i,s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *un gruppo di numeri interi e positivi e indichiamo con* n_i *la somma* $\nu_{i,1} + \nu_{i,2} + \ldots + \nu_{i,s_i}$; $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *un gruppo di punti dell'intervallo* $a \leq x \leq b$; $f_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_p, y_p', \ldots, y_p^{(n_p-1)})$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ p *funzioni reali delle variabili reali* $x, y_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_p, \ldots \ldots, y_p^{(n_p-1)}$ *definite nel dominio:*

$$T: a \leq x \leq b, \quad |y_i^{(j_i)} - \overline{y}_i^{(j_i)}| \leq M,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p\,;\, j_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1\,:\, y_i^{(0)} = y_i)$$

e soddisfacenti ivi alle relazioni

$$|f_i| \leq \varphi_i(x), \tag{21}$$

con $\varphi_i(x)$ *non negativa e sommabile in* $a \leq x \leq b$.

Supponiamo inoltre che per ogni coppia di punti distinti del dominio T, $(x, y_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_p, \ldots, y_p^{(n_p-1)})$, $(x, Y_1, \ldots \ldots, Y_1^{(n_1-1)}, \ldots, Y_p, \ldots, Y_p^{(n_p-1)})$, *risultino verificate le relazioni:*

$$\begin{aligned} &|f_i(x, y_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_p, \ldots, y_p^{(n_p-1)}) - \\ &- f_i(x, Y_1, \ldots, Y_1^{(n_1-1)}, \ldots, Y_p, \ldots, Y_p^{(n_p-1)})| \leq \\ &\leq \sum_{1}^{p}{}_{r} \sum_{0}^{n_r-1}{}_{j_r} \beta_{i,r,j_r}(x)\, \psi_{i,r,j_r}(|y_1 - Y_1|, \ldots, |y_1^{(n_1-1)} - Y_1^{(n_1-1)}|, \ldots \\ &\ldots, |y_p^{(n_p-1)} - Y_p^{(n_p-1)}|)\, |y_r^{(j_r)} - Y_r^{(j_r)}|, \end{aligned} \tag{22}$$

dove le $\beta_{i,r,j_r}(x)$ *sono funzioni non negative e sommabili in* $a \leq x \leq b$ *e le* $\psi_{i,r,j_r}(|u_1|, \ldots, |u_1^{(n_1-1)}|, \ldots, |u_p|, \ldots, |u_p^{(n_p-1)}|)$ *sono non negative e non decrescenti per ogni valore di* $|u_1|, \ldots \ldots, |u_p^{(n_p-1)}|$ *e tali che, posto*

$$N_r^{(j_r)} = \frac{(b-a)^{n_r-j_r-1}}{(n_r-j_r-1)!}\int_a^b 2\varphi_r(x)dx,\ (r=1,2,\ldots,p;\, j_r=0,1,\ldots,n_r-1),$$

$$L_{i,r,j_r} = \int_a^b \beta_{i,r,j_r}(x)\,dx\,,$$

$$(23)\qquad \begin{gathered} c_{i,r} = \sum_{j_r=1}^{n_r-1} L_{i,r,j_r}\,\psi_{i,r,j_r}(N_1,\ldots,N_1^{(n_1-1)},\ldots \\ \ldots, N_p,\ldots, N_p^{(n_p-1)})\,\frac{(b-a)^{n_r-j_r-1}}{(n_r-j_r-1)!}, \end{gathered}$$

risulti

$$(24)\qquad D_k = (-1)^k \begin{vmatrix} c_{1,1}-1 & c_{1,2} & \ldots & c_{1,k} \\ c_{2,1} & c_{2,2}-1 & \ldots & c_{2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k,1} & c_{k,2} & \ldots & c_{k,k}-1 \end{vmatrix} > 0,\quad (k=1,2,\ldots,p).$$

Allora:

In queste ipotesi il problema

$$(25)\qquad \begin{gathered} y_i^{(n_i)} = f_i(x, y_1,\ldots, y_1^{(n_1-1)},\ldots, y_p,\ldots, y_p^{(n_p-1)}), \\ y_i(x_{i,t}) = l_{i,t,0},\ y_i'(x_{i,t}) = l_{i,t,1},\ldots,\ y_i^{(\nu_{i,t}-1)}(x_{i,t}) = l_{i,t,\nu_{i,t}-1}, \\ (i=1,2,\ldots,p;\ t=1,2,\ldots,s_i), \end{gathered}$$

dove $l_{i,t,0}, l_{i,t,1},\ldots, l_{i,t,\nu_{i,t}-1}$ *sono numeri reali soddisfacenti alle limitazioni* $|l_{i,t,j_{i,t}} - \overline{y}_i^{(j_{i,t})}| \leq M$ $(j_{i,t}=0, 1,\ldots, \nu_{i,t}-1)$, *ammette, al più, un sistema di integrali* $y = y_i(x)$ $(i=1, 2,\ldots$ $\ldots, p)$, *con* $y_i(x)$ *assolutamente continua insieme con le sue prime* $n_i - 1$ *derivate in* $a \leq x \leq b$.

Sieno, se possibile, $y = y_i(x)$, $y = Y_i(x)$ $(i = 1, 2,\ldots, p)$ due curve integrali distinte del problema (25), con $y_i(x)$ e $Y_i(x)$ assolutamente continue insieme con le loro prime $n_i - 1$ derivate in $a \leq x \leq b$ e ricordiamo che per la funzione $y_i(x) - Y_i(x)$ valgono, in tutto $a \leq x \leq b$, le relazioni

$$|y_i^{(j_i)}(x)-Y_i^{(j_i)}(x)|\leq\frac{(b-a)^{n_i-j_i-1}}{(n_i-j_i-1)!}\int_a^{\cdot}|y_i^{(n_i)}(x)-Y_i^{(n_i)}(x)|\,dx,$$

$$(i=1,2,\ldots,p\,;\,j_i=0,1,\ldots,n_i-1)\ ({}^{10}).$$

Avendosi inoltre, dalle (21), quasi ovunque in $a\leq x\leq b$,

$$|y_i^{(n_i)}(x)-Y_i^{(n_i)}(x)|\leq 2\varphi_i(x),$$

si avrà:

$$(26)\qquad |y_i^{(j_i)}(x)-Y_i^{(j_i)}(x)|\leq\frac{(b-a)^{n_i-j_i-1}}{(n_i-j_i-1)!}\int_a^b 2\varphi_i(x)\,dx=N_i^{(j_i)}.$$

Valgono inoltre, in tutto $a\leq x\leq b$, le relazioni

$$(27)\qquad |y_i^{(j_i)}(x)-Y_i^{(j_i)}(x)|\leq\frac{(b-a)^{n_i-j_i-1}}{(n_i-j_i-1)!}\mu_i,$$

$$(i=1,2,\ldots,p\,;\,j_i=0,1,\ldots,n_i-1),$$

dove μ_i indica il massimo valore di $|y_i^{(n_i-1)}(x)-Y_i^{(n_i-1)}(x)|$ in $a\leq x\leq b$ (11).

Dalla (22), tenendo presente la non decrescenza delle ψ_{i,r,j_r}, le (26) e le (27), si avrà, quasi ovunque in $a\leq x\leq b$,

$$(28)\qquad |y_i^{(n_i)}(x)-Y_i^{(n_i)}(x)|\leq$$

$$\leq\sum_1^p{}_r\sum_0^{n_r-1}{}_{j_r}\beta_{i,r,j_r}(x)\,\psi_{i,r,j_r}(N_1,\ldots,N_1^{(n_1-1)},\ldots,N_p^{(n_p-1)})\frac{(b-a)^{n_r-j_r-1}}{(n_r-j_r-1)!}\mu_r.$$

Detti allora λ_i e $\overline{\lambda}_i$ due punti dell'intervallo $a\leq x\leq b$, certamente esistenti, dove la funzione $|y_i^{(n_i-1)}(x)-Y_i^{(n_i-1)}(x)|$ assume rispettivamente i valori 0 e μ_i, dalla (28), integrando fra λ_i e $\overline{\lambda}_i$, si avrà facilmente:

(10) Cfr. loc. cit. per terzo in (1), pag. 117.

(11) Cfr. F. Severi e G. Scorza Dragoni: *Lezioni di Analisi* [Zanichelli, Bologna], II_1, n. 58.

$$\mu_i \leq c_{i,1}\mu_1 + c_{i,2}\mu_2 + \dots + c_{i,p}\mu_p, \qquad (i = 1, 2, \dots, p),$$

ossia

$$\begin{aligned}
&(c_{1,1} - 1)\mu_1 + c_{1,2}\mu_2 + \dots + c_{2,p}\mu_p \geq 0\,,\\
&c_{2,1}\mu_1 + (c_{2,2} - 1)\mu_2 + \dots + c_{2,p}\mu_p \geq 0\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&c_{p,1}\mu_1 + c_{p,2}\mu_2 + \dots + (c_{p,p} - 1)\mu_p \geq 0,
\end{aligned}$$

il che è assurdo in base alle (24) ed al lemma dimostrato, dato che almeno una delle μ_i deve essere positiva.

Casi particolari del teorema precedente.

In base alle osservazioni *a*) e *b*) del n. 4, il teorema del numero precedente continua ad essere ancora valido se alle condizioni (24) si sostituiscono le

$$\sum_1^p{}_r \sum_1^{n_r-1}{}_{j_r} L_{i,r,j_r} \psi_{i,r,j_r}(N_1, \dots, N_1^{(n_1-1)}, \dots, N_p, \dots, N_p^{(n_p-1)}) \frac{(b-a)^{n_r-j_r-1}}{(n_r-j_r-1)!} \quad 1,$$

$$(i = 1, 2, \dots, p),$$

oppure le seguenti

$$\sum_1^p{}_i \sum_1^{n_r-1}{}_{j_r} L_{i,r,j_r} \psi_{i,r,j_r}(N_1, \dots, N_1^{(n_1-1)}, \dots, N_p, \dots, N_p^{(n_p-1)}) \frac{(b-a)^{n_r-j_r-1}}{(n_r-j_r-1)!} \quad 1,$$

$$(r = 1, 2, \dots, p).$$

6. - Se, ferme restando tutte le altre ipotesi, si può soddisfare alle (22) con

$$\beta_{i,r,j_r}(x) = 1\,,$$

allora il teorema del numero precedente continua ancora a sussistere anche quando si sostituiscono le (23) con le

$$c^*_{i,r} = \sum_0^{n_r-1}{}_{j_r} \psi_{i,r,j_r}(N_1, \dots, N_1^{(n_1-1)}, \dots, N_p, \dots, N_p^{(n_p-1)}) \frac{(b-a)^{n_r-j_r}}{(n_r-j_r)!}$$

e le (24) con le

$$D_k^* = (-1)^k \begin{vmatrix} c_{1,1}^* - 1 & c_{1,2}^* & \dots & c_{1,k}^* \\ c_{2,1}^* & c_{2,2}^* - 1 & \dots & c_{2,k}^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k,1}^* & c_{k,2}^* & \dots & c_{k,k}^* - 1 \end{vmatrix} > 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Mantenendo alle notazioni che adopereremo il significato dato nel numero precedente, osserviamo che la funzione $y_i(x) - Y_i(x)$ soddisfa, in $a \leq x \leq b$, alle relazioni, analoghe alle (15),

$$(29) \qquad \int_a^b |y_i^{(j_i)}(x) - Y_i^{(j_i)}(x)| \, dx \leq \frac{(b-a)^{n_i - j_i}}{(n_i - j_i)!} \mu_i,$$

$$(i = 1, 2, \dots, p; j_i = 0, 1, \dots, n_i - 1),$$

dove μ_i indica il massimo valore di $|y_i^{(n_i - 1)}(x) - Y_i^{(n_i - 1)}(x)|$ in $a \leq x \leq b$, e che dalle (22), ove si ponga $\beta_{i,r,j_r}(x) = 1$, si ottiene, quasi ovunque in $a \leq x \leq b$,

$$|y_i^{(n_i)}(x) - Y_i^{(n_i)}(x)| \leq$$

$$\leq \sum_1^p {}_r \sum_0^{n_r - 1} {}_{j_r} \psi_{i,r,j_r}(N_1, \dots, N_1^{(n_1 - 1)}, \dots, N_p, \dots, N_p^{(n_p - 1)}) \, |y_r^{(j_r)}(x) - Y_r^{(j_r)}(x)|.$$

Integrando ora tale relazione fra λ_i e $\overline{\lambda}_i$, tenute presenti le (29) e ragionando come alla fine del teorema precedente, si viene subito a provare quanto abbiamo affermato.

(Pervenuto in Redazione il 14 Febbraio 1942-XX)