

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LINA TIBALDO

Sulla differenziabilità quasi regolare delle funzioni di tre variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 13 (1942), p. 78-88

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1942__13__78_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA DIFFERENZIABILITÀ QUASI REGOLARE DELLE FUNZIONI DI TRE VARIABILI

Nota di LINA TIBALDO (Padova)

Una funzione continua $f(x, y)$, dotata di derivate parziali prime in quasi tutti i punti di un insieme piano aperto H , è asintoticamente differenziabile in modo regolare in quasi tutti i punti di H . Ciò significa che per quasi tutti i punti (x_0, y_0) di H si possono trovare due costanti a, b tali che:

$$\lim_{\frac{1}{PP_0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)] = 0,$$

se P tende a P_0 senza abbandonare un conveniente insieme di densità 1 in P_0 e costituito dal contorno di tanti quadrati aventi il centro in P_0 e i lati paralleli agli assi.

Questo risultato è stato stabilito indipendentemente e quasi contemporaneamente da RADÒ, CACCIOPOLI e SCORZA DRAGONI ⁽¹⁾.

In questo lavoro ⁽²⁾ mi propongo di vedere che cosa si può

⁽¹⁾ T. RADÒ, *On the derivative of the Lebesgue area of continuous surfaces* [Fundamenta Mathematicae, vol. XXX (1938) pagg. 34-39]; *On absolutely continuous transformations in the plane* [Duke Mathematical Journal, vol. IV (1938) pagg. 189-221].

R. CACCIOPOLI e G. SCORZA DRAGONI, *Necessità della condizione di Weierstrass per la semicontinuità di un integrale doppio sopra una data superficie* [R. Accademia d'Italia, Memorie della classe di Scienze fis., mat., nat. vol. IV (1938) pag. 251-268].

⁽²⁾ Che rappresenta un rifacimento della mia Tesi di Laurea, discussa a Padova nel febbraio scorso.

dire circa le funzioni di tre variabili. Usando dei metodi degli Autori citati sono riuscita a stabilire che :

Se $f(x, y, z)$, continua in un insieme aperto H dell' S_3 euclideo, vi è quasi ovunque dotata di derivate parziali prime, essa è anche dotata in quasi tutti i punti di H di un differenziale asintotico quasi regolare.

Intendo con ciò, che per quasi tutti i punti (x_0, y_0, z_0) di H si possono trovare tre costanti (a, b, c) tali che sia :

$$\lim_{PP_0} \frac{1}{PP_0} [f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0) - c(z-z_0)] = 0,$$

se P tende a P_0 senza abbandonare un insieme Σ di densità volumetrica 1 in P_0 e costituito dai contorni di tanti quadrati contenuti in piani paralleli agli assi e con i centri sulle parallele agli assi per P_0 .

Altre proprietà di struttura che possono essere imposte all'insieme Σ sono elencate nel § 3. I coefficienti (a, b, c) del differenziale asintotico quasi regolare coincidono quasi ovunque con le derivate parziali di $f(x, y, z)$.

§ 1.

1. - In questo paragrafo premettiamo alcuni lemmi, che ci saranno utili nello studio della differenziabilità asintotica quasi regolare delle funzioni di tre variabili.

2. Lemma. I. *Se $G(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu)$ è continua per (x_1, x_2, \dots, x_n) variabile in un insieme aperto e limitato E e per $\mu \neq 0$ variabile in un intorno dello zero, e se esiste quasi ovunque in E il limite finito*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \mu) = g(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

si può trovare una porzione chiusa di E avente misura arbitrariamente prossima a quella di E e sulla quale la convergenza di G a g riesca uniforme.

Questo teorema si dimostra con lo stesso ragionamento usato da CACCIOPOLI e SCORZA DRAGONI in loc. cit. (1) n. 5.

3. - Le proposizioni che seguono riguardano alcune proprietà facili a stabilirsi e relative alla densità degli insiemi misurabili.

Per i nostri scopi è sufficiente definire la densità di un insieme misurabile E dell' S_n reale, euclideo in un punto P_0 come uguale al limite, se esiste,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(E \cdot I)}{mI},$$

dove I è un cubo ad n dimensioni di centro P_0 e lato a .

Come è noto la densità di E vale 1 in quasi tutti i punti di E e zero in quasi tutti i punti del complementare di E . Inoltre è evidente che se E è di densità 1 in P_0 , il complementare di E è di densità zero in P_0 e viceversa.

4. - A proposito della nozione di densità, ci sarà utile sapere che:

Se α è un insieme misurabile di S_3 , quasi tutti i suoi punti sono di densità lineare (superficiale) 1 per le sezioni di α con le parallele agli assi (coi piani paralleli ai piani) coordinati passanti per i punti stessi.

La dimostrazione si costruisce facilmente tenendo conto di quanto è detto in S. SAKS, *Theory of the Integral* [Monografie Matematyczne, Varsavia 2^a ed., 1937], pag. 298.

5. - Lemma II. *L'intersezione di due (e quindi di un numero finito) insiemi misurabili dell' S_n di densità 1 in un punto P , è ancora di densità 1 in questo punto.*

Siano E_1, E_2 i due insiemi dell'enunciato. I complementari di E_1 e di E_2 , e quindi la loro somma, sono di densità zero in P . Ne segue che il complementare di questa somma, cioè $E_1 \cdot E_2$, è di densità 1 in P .

6. - Lemma III. *Dato un insieme misurabile Δ di S_2 di densità superficiale 1 nell'origine O delle coordinate, Δ contiene*

un insieme misurabile, di densità 1 in O , simmetrico rispetto agli assi ed all'origine e mutato in sè da una rotazione di S_2 di un angolo retto intorno ad O .

Poniamo $\Delta_1 = \Delta$ e indichiamo con Δ_2 il simmetrico di Δ_1 rispetto all'asse delle y , con Δ_3 il simmetrico di Δ_1 rispetto all'origine, con Δ_4 il simmetrico di Δ_1 rispetto all'asse delle x ; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sono evidentemente misurabili ed hanno densità 1 in O ; quindi (Lemma II) lo stesso vale anche per la loro intersezione $\bar{\Delta}$.

Dimostriamo ora che $\bar{\Delta}$ è simmetrico rispetto agli assi ed all'origine.

Consideriamo un punto Q_1 dell'insieme $\bar{\Delta}$; vogliamo dimostrare che i punti Q_2 , simmetrico di Q_1 rispetto all'asse delle y , Q_3 , simmetrico di Q_1 rispetto all'origine, Q_4 , simmetrico di Q_1 rispetto all'asse delle x , appartengono a $\bar{\Delta}$.

Infatti Q_1 appartiene a Δ_1 ed a Δ_4 , quindi Q_4 appartiene a Δ_4 e Δ_1 ; Q_1 appartiene a Δ_1 e Δ_2 quindi Q_2 appartiene a Δ_2 e Δ_1 . Poichè Q_4 appartiene a Δ_1 , Q_3 appartiene a Δ_2 ; poichè Q_2 appartiene a Δ_1 , Q_3 è di Δ_4 .

D'altra parte Q_3 appartiene a Δ_3 e Δ_1 , perchè Q_1 è di Δ_1 e Δ_3 ; indi Q_3 è di $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Ne segue che Q_4 appartiene anche a Δ_2 ; e che Q_2 è di $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4$ anch'esso.

Dopo di che Q_4 e Q_2 saranno anche di Δ_3 .

E con ciò l'affermazione fatta è dimostrata.

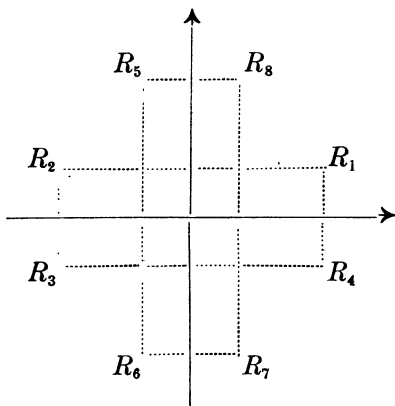
Facciamo ora ruotare $\bar{\Delta}$ di un angolo retto, per es. nel verso positivo, intorno all'origine, sia $\bar{\Delta}'$ l'insieme così ottenuto e si ponga:

$$\Delta^* = \bar{\Delta} \cdot \bar{\Delta}'.$$

Allora Δ^* è simmetrico rispetto agli assi ed all'origine perchè tali sono $\bar{\Delta}$ e $\bar{\Delta}'$.

Sia ora R_1 un punto di Δ^* ; i punti R_1, R_2, R_3, R_4 (v. figura a pag. seg.) sono sia di $\bar{\Delta}$ che di $\bar{\Delta}'$; perciò i punti R_5, R_6, R_7, R_8 appartengono sia a $\bar{\Delta}$ perchè mutati in R_3, R_4, R_1, R_2 da quella rotazione; sia a $\bar{\Delta}'$ perchè provengono da R_1, R_2, R_3, R_4 per effetto di quella rotazione.

Cioè Δ^* è mutato in sè da quella rotazione. E di qui si conclude facilmente nel modo voluto.



Osservazione: Se le sezioni di Δ con gli assi coordinati erano misurabili ed avevano densità (lineare) 1 in O , l'insieme Δ^* costruito precedentemente gode anch'esso delle stesse proprietà.

7. - Riprendiamo in considerazione l'insieme Δ , e supponiamo di avere sugli assi x , y due insiemi i , j di densità 1 nell'origine, mutati l'uno nell'altro da una rotazione di un angolo retto e tali che le parallele all'asse y (o x) per i punti P di i (o di j) taglino Δ secondo un insieme di densità 1 in P .

Allora la costruzione precedente porta ad un insieme Δ^* che gode delle stesse proprietà.

8. - Lemmi IV, V, VI. Applicando il lemma II si riconosce facilmente che:

IV) Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono n insiemi misurabili di piani $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, di densità 1 nelle rispettive origini, α_i contiene un insieme β_i che gode delle stesse proprietà, e tale che β_i si muti in β_j se si sovrappone π_i a π_j , facendo coincidere gli assi delle ascisse e delle ordinate dell'un piano rispettivamente con gli assi delle ascisse e delle ordinate dell'altro.

Tenuto conto del Lemma II e dell'osservazione relativa si riconosce facilmente che:

V) L'insieme β_i si può inoltre supporre simmetrico rispetto agli assi ed all'origine O_i di π_i e mutato in sè da una rotazione di π_i di un angolo retto intorno ad O_i , e che:

VI) Se le sezioni di α_i con gli assi avevano densità (lineare) 1 nell'origine, la stessa proprietà si può supporre soddisfatta da β_i , insieme con le precedenti.

9. – Lemma VII. Sia Γ un insieme dell' S_2 costituito dai contorni di tanti quadrati aventi il centro in O e i lati diretti come gli assi coordinati.

Detto γ l'insieme lineare costituito dalle semidimensioni di questi quadrati, se γ è misurabile e di densità (lineare) 1 nel punto zero, Γ è misurabile e di densità (superficiale) 1 nel punto O .

La misurabilità di Γ è evidente. Inoltre il complementare Γ_c di Γ è contenuto nell'insieme (misurabile) costituito dai contorni dei quadrati che hanno il centro in O e le semidimensioni appartenenti al complementare γ_c di γ . Ma γ_c è di densità lineare nulla nel punto zero.

Di qui è facile dedurre che Γ_c è di densità superficiale zero in O , donde la conclusione.

10. – Lemma VIII. Con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che:

Se Ω è un insieme di S_3 costituito dal contorno di tanti quadrati paralleli al piano $x=0$ e col centro sull'asse delle x e se la sezione ω di Ω col piano $x=0$ è misurabile e di densità (superficiale) 1 nell'origine, Ω è misurabile e di densità (volumetrica) 1 nell'origine.

§ 2.

11. – Sia A un insieme misurabile di S_3 . Sia B l'insieme dei punti P di A tali che le sezioni di A con le parallele agli assi coordinati passanti per P abbiano densità lineare 1 in P e che le sezioni di A con i piani paralleli ai piani coordinati passanti per P abbiano densità superficiale 1 nel punto P .

Riesce $m(B) = m(A)$.

Sia C l'insieme dei punti di B che godono rispetto a B delle stesse proprietà di cui i punti di B godono rispetto ad A .

12. – Sia P_0 un punto di C . Non è restrittivo supporre che P_0 sia l'origine del sistema di coordinate cartesiane (ortogonali) cui è riferito S_3 .

Indichiamo con I_1, J_1, K_1 rispettivamente le sezioni di A con i piani $x=0, y=0, z=0$; I_1, J_1, K_1 hanno densità superficiale 1 sul punto P_0 , che in quanto punto di C appartiene anche a B e ad A ; inoltre avranno densità lineare 1 in P_0 le sezioni i_1, j_1 e k_1 di B rispettivamente con gli assi x, y, z .

Dai lemmi dei n. 6, 7, 8 risulta che dagli insiemi $I_1, J_1, K_1, i_1, j_1, k_1$ si possono estrarre gli insiemi I, J, K, i, j, k in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni.

1) I, J, K sono misurabili ed hanno densità superficiale 1 in P_0 ;

2) I, J, K sono simmetrici rispetto a P_0 ed agli assi;

3) I è mutato in sè da una rotazione del piano $x=0$ di un angolo retto intorno a P_0 ; analogamente per J e K ;

4) I si sovrappone a J se si fa ruotare il piano $x=0$ di un angolo retto intorno all'asse z ; analogamente per J, K e K, I ;

5) i, j, k sono misurabili ed hanno densità lineare 1 in P_0 ;

6) i, j, k sono simmetrici rispetto all'origine, e si mutano l'uno negli altri se si sovrappone uno degli assi x, y, z agli altri due, tenendo fermo P_0 .

Inoltre, tenuto conto anche di quanto è detto al n. 7, si riconosce facilmente che si può supporre pure che:

7) le sezioni di I, J, K con le parallele agli assi passanti per i punti di i, j, k abbiano densità lineare 1 in questi punti.

13. - Se $\rho > 0$ è l'ascissa di un punto di i , allora e solo allora $X_\rho \equiv (\rho, 0, 0)$ ed $X_{-\rho} \equiv (-\rho, 0, 0)$ appartengono ad i , $Y_\rho \equiv (0, \rho, 0)$ ed $Y_{-\rho} \equiv (0, -\rho, 0)$ appartengono a j , $Z_\rho \equiv (0, 0, \rho)$ e $Z_{-\rho} \equiv (0, 0, -\rho)$ appartengono a k .

Nel piano $z=0$ consideriamo i quadrati con i lati paralleli all'asse delle y passanti per i punti di i e conseguentemente quelli paralleli all'asse x passanti per i punti di j . I contorni di questi quadrati formano un insieme σ'_k misurabile e di densità superficiale 1 in P_0 (Lemma VIII).

Con la stessa costruzione per i piani $y=0$ ed $x=0$ otterremo rispettivamente gli insiemi σ'_j e σ'_i .

14. - Poniamo $\sigma_I = I \cdot \sigma'_I$, $\sigma_J = J \cdot \sigma'_J$ e $\sigma_K = K \cdot \sigma'_K$. Gli insiemi σ_I , σ_J , σ_K godono evidentemente di proprietà analoghe alle 1), 2), 3), 4), 7).

Consideriamo i quadrati con i centri sull'asse y e con i lati paralleli agli assi z ed x , i lati paralleli all'asse z passando per punti di σ_K e quindi quelli paralleli all'asse x passando per punti di σ_I .

Indichiamo con Σ_J l'insieme dei punti dei contorni di questi quadrati; Σ_J ha densità volumetrica 1 in P_0 .

In maniera analoga costruiamo Σ_I e Σ_K a partire dagli insiemi σ_J , σ_K e σ_I , σ_J .

La somma $\Sigma = \Sigma_I + \Sigma_J + \Sigma_K$ di tali insiemi avrà anch'essa densità volumetrica 1 nel punto P_0 .

15. - Nel piano $z = 0$ la sezione di σ_K con una retta parallela all'asse x e passante per un punto Y di j ha densità 1 in questo punto. Ne segue che i quadrati di Σ_J aventi il centro in Y hanno densità 1 in Y .

Analogamente avranno densità 1 in un punto Z di k le sezioni di σ_J con una parallela all'asse x per Z e avranno densità superficiale 1 in Z i quadrati di Σ_K col centro in Z ; avranno densità 1 in un punto X di i la sezioni di σ_I con una retta parallela all'asse y per X e densità superficiale 1 in X i quadrati di Σ_I con il centro in X .

16. - Consideriamo ora la superficie cubica C_ρ di spigolo 2ρ , centro P_0 e facce dirette come i piani coordinati (dove ρ ha lo stesso significato che al n. 3).

Al variare di ρ avremo un insieme di cubi di centro P_0 e contenenti Σ .

Tale insieme di cubi ha densità volumetrica 1 nel punto P_0 . L'insieme dei punti Σ contenuti in ciascuna faccia dei singoli cubi C_ρ ha densità superficiale 1 nel centro di questa faccia, ed è costituito dal contorno di tanti quadrati coi lati paralleli a quelli della faccia che si considera.

§ 3.

17. - Sia $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ un punto dell'insieme aperto H . Se $f(x, y, z)$ è continua nell'insieme H , diremo che $f(x, y, z)$ è dotata in M_0 di un *differenziale asintotico quasi regolare*, o che $f(x, y, z)$ è *asintoticamente differenziabile in modo quasi regolare* nel punto M_0 , se esistono tre costanti a, b, c tali che:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{1}{MM_0} [f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0) - c(z - z_0)] = 0,$$

$M \equiv (x, y, z)$, essendo un punto di H che tende ad M_0 senza abbandonare un conveniente insieme di densità volumetrica 1 in M_0 costituito dal contorno di tanti quadrati contenuti in piani paralleli ai piani coordinati e con i centri sulle parallele agli assi per M_0 .

18. - Ciò premesso dimostriamo che:

Se $f(x, y, z)$, continua nell'insieme aperto H , vi è quasi ovunque parzialmente derivabile, essa è dotata in quasi tutti i punti di H di un differenziale asintotico quasi regolare.

Sia A una porzione chiusa di H , tale che la misura di A differisca da quella di H per meno di un numero prefissato ϵ ; la frontiera di H abbia distanza positiva d da A , se (x, y, z) è un punto variabile di A ; i rapporti incrementali, definiti per $|h| < d$,

$$\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}, \quad \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h},$$

$$\frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h},$$

tendano uniformemente ai propri limiti $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ ed $r(x, y, z)$ per $h \rightarrow 0$ (ved. n. 2).

Le derivate parziali della $f(x, y, z)$ saranno quindi finite e continue su A .

Sia B l'insieme dei punti P di A tali che le sezioni di A con le parallele agli assi coordinati passanti per P abbiano densità 1 in P e che le sezioni di A con i piani paralleli ai piani coordinati passanti per P abbiano densità superficiale 1 nel punto P . Sia C l'insieme dei punti di B che godono rispetto a B delle stesse proprietà di cui i punti di B godono rispetto ad A .

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ un punto di C .

I punti che soddisfano a queste condizioni sono quasi tutti i punti di A (n. 4).

Se riusciremo a dimostrare che P_0 è un punto di differenziabilità asintotica regolare per $f(x, y, z)$ avremo stabilito il teorema, vista l'arbitrarietà di ϵ .

Previo un cambiamento di coordinate, possiamo supporre che P_0 sia l'origine.

Introduciamo nuovamente gli insiemi $\Sigma_I, \Sigma_J, \Sigma_K$, considerati nel § precedente, a partire dagli attuali insiemi A, B, C .

Indichiamo con l un numero positivo, abbastanza piccolo perchè il cubo $C_l: |x| \leq l, |y| \leq l, |z| \leq l$ sia interno ad H . L'intersezione di C_l con $\Sigma_I, \Sigma_J, \Sigma_K$ ha ancora densità 1 in P_0 .

Dimostriamo ora che:

$$(1) \quad \lim_{\frac{1}{PP_0}} [f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - f(0, 0, 0) - p(0, 0, 0)\bar{x} - \\ - q(0, 0, 0)\bar{y} - r(0, 0, 0)\bar{z}] = 0,$$

se $P \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tende a P_0 mantenendosi in $\Sigma_K \cdot C_l$.

Consideriamo un quadrato di Σ_K , contenuto in C_l . Esso ha per vertici punti del tipo

$$(\xi, \eta, \zeta), \quad (-\xi, \eta, \zeta), \quad (-\xi, -\eta, \zeta), \quad (\xi, -\eta, \zeta);$$

inoltre il punto $(0, 0, \zeta)$, è un punto di B ed i punti $(\xi, 0, \zeta)$, $(-\xi, 0, \zeta)$ appartengono ad A , al pari dei punti $(0, \eta, \zeta)$, $(0, -\eta, \zeta)$.

Quindi se $P \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tende a P_0 mantenendosi in $\Sigma_K \cdot C_l$, il punto $(0, 0, \bar{z})$ appartiene a B e quindi ad A ; ed appartiene anche ad A o il punto $(0, \bar{y}, \bar{z})$ o il punto $(\bar{x}, 0, \bar{z})$.

Esaminiamo soltanto la prima alternativa.

Fissato arbitrariamente il numero positivo τ si può scegliere il numero positivo δ ($< l$) in modo tale che per $|\bar{x}| < \delta$, $|\bar{y}| < \delta$, $|\bar{z}| < \delta$ sia:

$$|f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - f(0, \bar{y}, \bar{z}) - p(0, \bar{y}, \bar{z})\bar{x}| \leq \tau |\bar{x}|,$$

ed anche:

$$|f(0, \bar{y}, \bar{z}) - f(0, 0, \bar{z}) - q(0, 0, \bar{z})\bar{y}| \leq \tau |\bar{y}|,$$

ed inoltre

$$|f(0, 0, \bar{z}) - f(0, 0, 0) - r(0, 0, 0)\bar{z}| \leq \tau |\bar{z}|;$$

nonchè:

$$|p(0, \bar{y}, \bar{z}) - p(0, 0, 0)| \leq \tau,$$

e

$$|q(0, 0, \bar{z}) - q(0, 0, 0)| \leq \tau.$$

Infatti $(0, \bar{y}, \bar{z})$ e $(0, 0, \bar{z})$ appartengono ad A , sul quale sappiamo essere uniforme la convergenza dei rapporti incrementali di $f(x, y, z)$ e sul quale le derivate parziali sono continue.

Da queste disequazioni si ottiene, come volevasi:

$$\frac{1}{PP_0} [f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - f(0, 0, 0) - p(0, 0, 0)\bar{x} - q(0, 0, 0)\bar{y} - r(0, 0, 0)\bar{z}] \leq 5\tau.$$

In modo analogo si esaurisce la seconda alternativa; e con lo stesso ragionamento si dimostra pure che la (1) vale anche se P tende a P_0 mantenendosi in $\Sigma_r \cdot C_l$ o in $\Sigma_j \cdot C_l$. E ciò basta al nostro scopo.