

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RITA GAMBARANA

**Sopra le condizioni di Love per un' onda
elettromagnetica in un mezzo anisotropo**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 13 (1942), p. 5-8

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1942__13__5_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOPRA LE CONDIZIONI DI LOVE PER UN'ONDA ELETTROMAGNETICA IN UN MEZZO ANISOTROPO

Nota di RITA GAMBARANA (a Parma)

1. - Quando un'onda elettromagnetica si propaga nello spazio, può accadere che il bordo dell'onda costituisca una superficie di discontinuità del campo elettromagnetico stesso e non solo, come avviene in generale, delle derivate del campo. Però in questo caso la discontinuità non può essere arbitraria, ma deve soddisfare due relazioni vettoriali, dette condizioni di LOVE:

$$(1) \quad c[\mathbf{D}] - [\mathbf{H}] \wedge \mathbf{n} = 0$$

$$(2) \quad c[\mathbf{B}] + [\mathbf{F}] \wedge \mathbf{n} = 0,$$

dove $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$, $[\mathbf{F}]$, $[\mathbf{H}]$ sono le discontinuità sulla superficie d'onda rispettivamente dell'induzione, del vettore spostamento, del campo elettrico e del campo magnetico, c la velocità di propagazione dell'onda, \mathbf{n} un vettore unitario ad essa normale.

Queste relazioni sono state dimostrate in diversi modi: dal LOVE stesso ⁽¹⁾, da L. SONA ⁽²⁾, da E. LAURA ⁽³⁾, da H. BATEMAN ⁽⁴⁾

⁽¹⁾ A. H. LOVE, *Wave-motions with discontinuities in wave front*. Proc. of the London Math. Soc., Ser. II, vol. I (1903-04), p. 55 e segg.

⁽²⁾ L. SONA, *La propagazione delle onde elettromagnetiche*. Rend. Sem. Mat. Padova, 1931.

⁽³⁾ E. LAURA, *Sopra una classe di soluzioni dell'equazioni di MAXWELL-HERTZ*, Scritti matematici offerti a L. Berzolari (1936), p. 145.

⁽⁴⁾ H. BATEMAN, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Cambridge University Press (1932), p. 195.

e da D. GRAFFI ⁽⁵⁾ che, a differenza dei precedenti le ha estese anche ai mezzi conduttori. Tutte queste ricerche suppongono però che il mezzo sia isotropo. Solo recentemente C. AGOSTINELLI ⁽⁶⁾, seguendo il metodo del LAURA, ha esteso le condizioni di LOVE ai mezzi anisotropi.

In questa nota mi propongo di mostrare come queste condizioni possano ottenersi con un opportuno artificio, per mezzi anisotropi, anche se conduttori, seguendo il metodo e appoggiandosi ai risultati del GRAFFI.

2. - Il GRAFFI infatti, facendo uso delle equazioni di MAXWELL sotto forma integrale, trova, qualunque sia il mezzo, le seguenti relazioni:

$$(3) \quad [H] \times a = cn \wedge [D] \times a$$

$$(4) \quad [F] \times a = -cn \wedge [B] \times a,$$

dove a è un vettore qualsiasi tangente alla superficie d'onda σ e gli altri simboli hanno il significato già noto.

Alle relazioni (3) e (4) s'aggiungono:

$$(4) \quad [D] \times n = 0 \quad [B] \times n = 0$$

che esprimono la continuità delle componenti normali di D e di B . Dalle relazioni (5), sapendo che è

$$D = \epsilon F \quad e \quad B = \mu H$$

e che in un mezzo isotropo ϵ e μ sono omotetie, si deduce subito anche

$$[F] \times n = 0 \quad e \quad [H] \times n = 0;$$

dalle quali si vede che le relazioni (3) e (4) valgono non solo

⁽⁵⁾ D. GRAFFI *Sopra le condizioni di LOVE per un'onda elettromagnetica*. Rend. Sem. Mat. Padova, 10 (1939), p. 1.

⁽⁶⁾ C. AGOSTINELLI, *Sulla propagazione elettromagnetica simmetrica rispetto ad un asse*. Annali di Matematica pura e applicata, Serie IV, 17, (1938), p. 255.

per un vettore \mathbf{a} tangente alla superficie σ ma anche per un vettore $\mathbf{a} = \mathbf{n}$, normale alla stessa, in complesso quindi per un vettore qualsiasi. Allora si può sopprimere in (3) e in (4) il prodotto scalare ottenendo immediatamente, dopo aver calcolato il valore di c , le condizioni di LOVE.

Nel caso che il mezzo sia anisotropo, ϵ e μ non sono più omotetie, bensì omografie vettoriali, dipendenti dalle proprietà dielettriche e magnetiche del mezzo. Non si può quindi dedurre dalla (5) la continuità delle componenti normali di \mathbf{F} e di \mathbf{H} , nè ottenere come immediata conseguenza dalle (3) e (4) le condizioni di LOVE.

3. — Per risolvere la questione procedo nel modo seguente: Considero la superficie σ ed il vettore unitario \mathbf{n} normale ad essa, considero inoltre un vettore \mathbf{b} unitario tangente a σ ; anche il prodotto $\mathbf{b} \wedge \mathbf{n}$ è un vettore normale ad \mathbf{n} e quindi tangente a σ .

Nell'equazione (3) sostituisco ad \mathbf{a} il vettore $\mathbf{b} \wedge \mathbf{n}$ ed ottengo, con semplici passaggi:

$$- [\mathbf{H}] \wedge \mathbf{n} \times \mathbf{b} = c \{ \mathbf{n} \wedge [\mathbf{D}] \} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{n}.$$

Svolgendo il doppio prodotto vettoriale e ricordando che il prodotto scalare tra \mathbf{n} e \mathbf{b} , che sono due vettori ortogonali, è nullo, e che \mathbf{n} è un vettore unitario, ottengo:

$$(6) \quad [\mathbf{H}] \wedge \mathbf{n} \times \mathbf{b} = c [\mathbf{D}] \times \mathbf{b}.$$

Quest'equazione vale per ogni vettore \mathbf{b} tangente a σ , ma inoltre anche per \mathbf{b} normale a σ . Infatti, se \mathbf{b} fosse parallelo ad \mathbf{n} , cioè normale a σ , il primo membro della (6) sarebbe nullo, come il secondo, essendo $[\mathbf{D}] \times \mathbf{n} = 0$. La (6) è valida quindi per qualunque direzione del vettore \mathbf{b} ; allora posso sopprimere \mathbf{b} ottenendo:

$$[\mathbf{H}] \wedge \mathbf{n} = c [\mathbf{D}],$$

da cui:

$$(7) \quad c [\mathbf{D}] - [\mathbf{H}] \wedge \mathbf{n} = 0,$$

che è la prima condizione di LOVE.

Sostituendo invece $\mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{n}$ nella (4) ottengo, ripetendo lo stesso procedimento :

$$(8) \quad c[\mathbf{B}] + [\mathbf{F}] \wedge \mathbf{n} = 0,$$

che è la seconda condizione di LOVE.

Le due condizioni di LOVE risultano quindi dimostrate per altra via ed estese ad un mezzo anisotropo conduttore.

(Pervenuto in Redazione il 13 Febbraio 1942-XX)