

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GUIDO ZAPPA

**Caratterizzazione delle curve di diramazione delle
rigate e spezzamento di queste in sistemi di piani**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 13 (1942), p. 41-56

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1942__13__41_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CARATTERIZZAZIONE DELLE CURVE DI DIRAMAZIONE DELLE RIGATE E SPEZZAMENTO DI QUESTE IN SISTEMI DI PIANI

Nota di GUIDO ZAPPA (a Roma).

In una mia recente Memoria ⁽¹⁾, ho dimostrato che, data una rigata algebrica a moduli generali, è possibile trovarne un'altra, birazionalmente equivalente ad essa, suscettibile di tendere con continuità ad una rigata spezzata in quadriche distinte, in modo che su ciascuna quadrica non cadano mai più di tre rette di connessione, ossia mai più di tre quadriche passino pel medesimo punto. Ho invece lasciato in sospenso la questione, se fra le rigate birazionalmente equivalenti ad una data, ve ne siano di quelle che si possano far tendere con continuità a rigate spezzate in piani distinti, in modo che mai più di quattro piani passino pel medesimo punto, non senza avere osservato che, se il genere della rigata è maggiore di 1, non si può esigere per la rigata limite schema di connessione più semplice di questo.

Allo scopo di rispondere a questa domanda, nelle sue lezioni di Seminario presso il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, l'Ecc. SEVERI ha suggerito di studiare la natura della curva di diramazione di una rigata, e di dedurre la possibilità di far degenerare una rigata in piani distinti nel modo

⁽¹⁾ *Sulla degenerazione delle superficie algebriche in sistemi di piani distinti, con applicazione allo studio delle rigate.* Memorie della Reale Accademia d'Italia.

da noi voluto mediante spezzamento della curva di diramazione in rette ⁽²⁾.

Ho visto a tal proposito che il problema di caratterizzare la curva di diramazione di una rigata (non sviluppabile) ⁽³⁾ si riduce per dualità a quello di studiare la sezione piana di una rigata (non sviluppabile), cosa che faccio nel § 1 di questo lavoro. Dimostro che la sezione piana d'una rigata di S_3 è proiezione di una curva appartenente ad una quadrica di S_5 da un S_2 giacente sulla quadrica stessa, e viceversa. Dò poi a questa condizione necessaria e sufficiente un altro aspetto; e precisamente provo che una curva piana d'ordine n è sezione piana di una rigata algebrica allora e soltanto allora che su di essa c'è una serie algebrica d'ordine n , contenente la serie delle sezioni rettilinee, e godente di alcune particolari proprietà (nu. 5, 6). Deduco inoltre che ogni curva priva di cuspidi, d'ordine n e genere p , è sezione piana d'una rigata (non sviluppabile) di S_3 , d'ordine n e genere p .

Nel § 2 si trasformano per dualità i precedenti risultati, sboccando così nella caratterizzazione proiettiva della curva di diramazione di una rigata, e dimostrando che se $n \geq 3p + 2$, una curva piana di classe n e genere p priva di flessi è certamente curva di diramazione di una rigata algebrica d'ordine n e genere p .

Infine, nel § 3 si rivolge l'attenzione al problema dello spezzamento di una rigata in piani, e, applicando i risultati ottenuti sulle curve di diramazione, si dimostra che tra le rigate birazionalmente equivalenti ad una data, ve ne sono di quelle che ammettono forme limiti spezzate in piani, in modo che due piani (distinti o coincidenti) si connettano secondo una retta, e

⁽²⁾ Cfr. la questione n. 116, nella rubrica « Problemi, risultati e discussioni » dei « Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni », Serie 6, vol. 3, (1942), pag. 64. Ringrazio vivamente l' Ecc. SEVERI per i preziosi consigli che mi ha fornito nello svolgimento di questo studio.

⁽³⁾ Come ha fatto notare SEVERI nel porre la questione (cfr. loc. cit. in ⁽²⁾), « per una sviluppabile, che non sia un cono, la curva di diramazione è la proiezione dello spigolo di regresso. Viceversa è chiaro che ogni curva piana irriducibile di classe n , non normale, è curva di diramazione di un piano n -plo proiezione di una sviluppabile di classe n ».

che mai su di un piano vengano a cadere più di tre rette di connessione (passanti necessariamente, come risulta dalla mia Memoria citata, per un medesimo punto). Di conseguenza, mai più di quattro piani della forma limite vengono a passare pel medesimo punto, di modo che otteniamo lo spezzamento della rigata in piani connessi tra loro nel modo più semplice possibile.

Si potrebbe probabilmente dimostrare senza difficoltà (p. es. considerando la rigata di S_3 come proiezione di una rigata di S_4) che è possibile far sì che i piani costituenti la forma limite siano tutti distinti tra loro. Ma non ci siamo occupati di questo, poichè il principale scopo dello studio dello spezzamento delle superficie in piani è quello di determinare un tipo maneggevole di riemanniana, scopo cioè di natura topologica; e, dal punto di vista topologico, le forme limiti da noi trovate sono equivalenti a quelle che si avrebbero nel caso di piani distinti.

§ 1. - Caratterizzazione delle curve sezioni piane di rigate non coniche dell' S_3 .

1. - Sia R una rigata di S_3 , e sia C la sezione di R con un piano generico π . Consideriamo la quadrica Q di KLEIN, dello spazio a 5 dimensioni, i cui punti rappresentano le rette dell' S_3 .

La rigata R , considerata come totalità di rette, è rappresentata su Q da una curva \bar{C} . Il piano π , considerato anch'esso come totalità di rette, ha per immagine un S_2 appartenente a Q .

Si può stabilire una corrispondenza birazionale tra C e \bar{C} , facendo corrispondere ad un punto P di C il punto \bar{P} di \bar{C} che rappresenta la generatrice di R passante per P . Detta C^* la proiezione di \bar{C} , dal piano $\bar{\pi}$ che rappresenta le rette di π , sopra un S_2 , che diremo ω , sghembo con esso, e detto P^* il punto proiezione di \bar{P} , si ottiene una trasformazione birazionale τ tra C e C^* , in cui a P corrisponde P^* . Vogliamo dimostrare che τ è una omografia.

A tale scopo consideriamo una retta generica l di π , e in-

dichiamo con P_1, P_2, \dots, P_n i punti comuni ad l e C . Gli omologhi, $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ di P_1, P_2, \dots, P_n in \bar{C} sono le immagini delle generatrici di R passanti per P_1, P_2, \dots, P_n . Le rette appartenenti al complesso lineare speciale di asse l hanno per immagini i punti del cono Λ intersezione di Q coll'iperpiano ad essa tangente nel punto \bar{L} immagine della retta l . Il cono Λ contiene il piano $\bar{\pi}$, e i punti $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$, perchè l è incidente a tutte le rette di π e alle generatrici di R per P_1, P_2, \dots, P_n . Da ciò segue che i punti $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ appartengono ad un medesimo S_4 passante per $\bar{\pi}$, e quindi vengono proiettati da $\bar{\pi}$ su ω in punti $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$, allineati. E ciò basta per dire che la corrispondenza τ tra C e C^* è un'omografia.

2. - Mostriamo ora che

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè una curva piana C sia sezione piana d'una rigata (non conica) d'ordine n dello spazio ordinario, è che essa sia proiezione di una curva d'ordine n appartenente ad una quadrica di S_5 , da un piano appartenente alla quadrica stessa.

Che la condizione sia necessaria, discende subito dal n. prec. Dimostriamo che la condizione è sufficiente.

Sia C una curva piana d'ordine n , proiezione di una curva \bar{C} , del medesimo ordine, appartenente ad una quadrica Q di S_5 , da un piano $\bar{\pi}$ appartenente a Q . Poichè le quadriche di un dato spazio son tutte proiettivamente identiche, possiamo pensare Q come la quadrica di KLEIN rappresentatrice delle rette di un dato S_3 , \bar{C} come immagine di una rigata R di S_3 , $\bar{\pi}$ come immagine di un piano π di S_3 . Dal n. prec. segue allora che la varietà degli S_3 proiettanti da $\bar{\pi}$ i punti di \bar{C} è proiettivamente identica alla sezione di π con R ; di conseguenza anche C è omografica a questa sezione, dal che segue che la condizione è sufficiente.

3. - Alla condizione del n. prec. si può anche dare un'altra forma.

Sia C una curva piana, proiezione di una curva \bar{C} del

medesimo ordine, appartenente ad una quadrica Q di S_5 , da un piano ω appartenente a Q . Se n è l'ordine, p il genere di C e \bar{C} , e se i è l'indice di specialità della serie lineare completa contenente totalmente la serie delle sezioni rettilinee di C , si ha che \bar{C} è proiezione di una curva $\bar{\bar{C}}$, d'ordine n , appartenente ad un S_r , con $r = n - p + i$, da un S_{r-6} . Il piano ω vien proiettato dall' S_{r-6} secondo un S_{r-3} , dal quale \bar{C} vien proiettata in C ; e inoltre tanto l' S_{r-6} che \bar{C} appartengono ad una quadrica di S_5 , specializzata $r - 5$ volte, avente per vertice l' S_{r-6} . Viceversa, se una curva \bar{C} appartiene ad una quadrica di S_5 , specializzata $r - 5$ volte, essa vien proiettata dal vertice della quadrica, entro un S_5 generico, in una curva \bar{C} appartenente ad una quadrica di S_5 . Da ciò si deduce che:

Condizione necessaria e sufficiente, affinché una curva piana d'ordine n e genere p , proiezione di una curva normale dello stesso ordine di uno spazio S_r ($r = n - p + i$), sia sezione piana di una rigata (non conica) di S_3 , è che la curva normale appartenga ad una quadrica di S_5 (specializzata $r - 5$ volte e) passante pel centro di proiezione ($r > 2$).

4. - Giova a tal punto esaminare sotto quali condizioni la rigata considerata nei nn. prec. è una sviluppabile.

Ricordiamo che due punti della quadrica di KLEIN rappresentano due rette incidenti dell' S_3 allora e solo allora che la retta che li congiunge appartiene alla quadrica. Orbene, le sviluppabili sono caratterizzate dal fatto che due generatrici infinitamente vicine sono incidenti. Pertanto, una sviluppabile è rappresentata sulla quadrica di KLEIN da una curva, le cui tangenti appartengono alla quadrica. E da ciò segue che la curva C , di cui al n. 2, è sezione piana di una sviluppabile, se la sviluppabile bitangente della curva \bar{C} appartiene alla quadrica Q . Si noti inoltre che se le tangenti alla curva \bar{C} , di cui al n. 3, appartengono alla quadrica Q , le tangenti alla curva \bar{C} appartengono alla quadrica che si ottiene proiettando Q dall' S_{r-6} . In base a ciò concludiamo:

La rigata considerata al n. 2, (3) è una sviluppabile, se

e soltanto se la sviluppabile delle tangenti alla curva \bar{C} (\bar{C}) appartiene alla quadrica di S_5 (di S_5) su cui \bar{C} (\bar{C}) si trova.

5. - Si può dare alla condizione necessaria e sufficiente perchè una curva sia sezione piana di una rigata algebrica un aspetto diverso, in modo da non far ricorso ad enti iperspaziali.

Si considerino le curve C e \bar{C} , e la quadrica Q , di cui ai nn. 1 e 2 e supponiamo in un primo tempo che \bar{C} appartenga all' S_5 . Alla serie delle sezioni iperpiane di \bar{C} corrisponde su C una serie lineare g_n^5 , mentre alla serie algebrica staccata su \bar{C} dagli iperpiani tangenti a Q corrisponde su C una serie algebrica γ_n^4 , contenuta nella g_n^5 , e contenente la serie delle sezioni rettilinee. Essa, evidentemente, è costituita da gruppi equivalenti.

Inoltre, un fascio di iperpiani dell' S_5 cui appartiene Q ha in generale due e soltanto due piani tangenti a Q ; quindi la g_n^1 che congiunge due gruppi della γ_n^4 non ha altri gruppi a comune con la γ_n^4 , in generale. Segue che ogni serie lineare che contenga tre gruppi della γ_n^4 , ne contiene infiniti.

Infine, gli iperpiani tangenti a Q passanti per un punto \bar{P} generico di \bar{C} costituiscono un cono di iperpiani specializzato, contenente quindi infinite stelle di iperpiani. E pertanto la γ_n^3 costituita dai gruppi di γ_n^4 che contengono il punto P di C omologo di \bar{P} contiene infinite serie lineari g_n^2 .

In sostanza, esiste su C una serie algebrica γ_n^4 , non lineare, tale che

a) La serie delle sezioni rettilinee di C è contenuta nella γ_n^4 .

b) I gruppi della γ_n^4 sono equivalenti.

c) Una serie lineare d'ordine n , che abbia tre gruppi a comune con la γ_n^4 , ha infiniti gruppi a comune con essa.

d) La serie algebrica γ_n^3 costituita dai gruppi della γ_n^4 che passano per un punto generico P di C , contiene infinite g_n^2 .

Viceversa, se C è una curva piana d'ordine n , che possiede un γ_n^4 algebrica, non lineare, soddisfacente alle condizioni a), b), c), d), si ha che C è sezione piana d'una rigata algebrica (non conica).

Ed infatti, in base alla *b)*, la γ_n^4 è contenuta in una serie lineare g_n^r , con $r \geq 5$, perchè la γ_n^4 non è lineare. Se facciamo l'immagine proiettiva di questa g_n^r , otteniamo una curva \bar{C} dell' S_r . Ai gruppi della γ_n^4 corrispondono in S_r gli iperpiani di una varietà ∞^4 , che si ottengono, in base alla *c)*, proiettando da un S_{r-6} gli iperpiani di una quadrica involuppo appartenente ad un certo S_5 contenuto in S_r . Proiettando \bar{C} dall' S_{r-6} nell' S_5 , otteniamo una curva \bar{C} , su cui la serie omologa alla γ_n^4 è staccata dagli iperpiani tangenti ad una quadrica Q dell' S_5 . In base alla proprietà *a)*, C è proiezione di \bar{C} , su un S_2 , da un S_2 appartenente a Q . Infine, in base alla *d)*, gli iperpiani tangenti a Q e passanti per un punto \bar{P} di \bar{C} formano un cono di iperpiani specializzato, e pertanto \bar{P} , e di conseguenza tutta \bar{C} , appartiene a Q . Dal teorema del n. 2 segue allora che C è sezione piana d'una rigata algebrica (non conica) d'ordine n .

Supponiamo ora che \bar{C} , anzichè appartenere all' S_5 , appartenga ad un S_4 . Allora \bar{C} è una curva appartenente ad una quadrica Q' , intersezione di Q con l' S_4 , e C è proiezione di \bar{C} da una retta appartenente a Q' . Ragionando in modo analogo a quello tenuto per il caso che \bar{C} appartenga all' S_5 , si dimostra che su C esiste una γ_n^2 non lineare, godente di proprietà analoghe alle *a)*, *b)*, *c)* di cui sopra, ed inoltre, in luogo della proprietà *d)*, avente la proprietà seguente :

d') La serie algebrica γ_n^2 costituita dai gruppi della γ_n^2 che passano per un punto P di C , contiene infinite g_n^1 formanti un unico sistema continuo.

Viceversa, con un ragionamento analogo a quello fatto sopra si dimostra che, se una curva C possiede una γ_n^2 non lineare, che goda delle proprietà *a)* *b)*, *c)*, *d')*, C è proiezione di una curva \bar{C} appartenente ad una quadrica Q' di S_4 , da una retta λ' appartenente a Q' . Se Q è una quadrica di un S_5 che contiene Q' , e λ è un piano di Q che contiene λ' , C è proiezione di \bar{C} da λ , e, per il teorema del n. 2, C è sezione piana di una rigata (non conica) di S_3 .

Supponiamo infine che \bar{C} appartenga ad un S_3 . Allora si dimostra nel solito modo che C contiene una γ_n^2 non lineare,

soddisfacente a proprietà analoghe alla $a)$, $b)$, $c)$, ed inoltre alla proprietà :

$d')$ La serie algebrica γ_n^1 costituita dai gruppi della γ_n^2 che passano per un punto P di C , si spezza nella somma di due serie lineari g_n^1 .

Viceversa, si dimostra che, se C contiene una γ_n^2 godente delle proprietà $a)$, $b)$, $c)$, $d')$, essa è sezione piana di una rigata algebrica (non conica).

Il caso in cui \bar{C} appartenga ad un S_2 conduce a una quadrica, o ad un cono, o ad un involuppo piano di rette; casi da cui prescindiamo.

Possiamo pertanto concludere nel modo seguente :

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè una curva piana C sia sezione piana di una rigata algebrica d'ordine n , è che essa posseda una serie algebrica, non lineare, γ_n^s , con $s = 2, 3, \text{ o } 4$, tale che :

a) La serie delle sezioni rettilinee di C è contenuta nella γ_n^s .

b) I gruppi della γ_n^s sono equivalenti.

c) Una serie lineare d'ordine n , che abbia tre gruppi a comune con la γ_n^s , ha con essa a comune infiniti gruppi.

d) La serie γ_n^{s-1} costituita dai gruppi della γ_n^s che passano per un punto generico P di C , contiene infinite g_n^2 , se $s = 4$; contiene infinite g_n^1 formanti un unico sistema continuo, se $s = 3$; si spezza in due g_n^1 , se $s = 2$.

6. - Determiniamo ora la condizione necessaria e sufficiente affinchè la rigata di cui la curva C , considerata al n. prec., è sezione piana, sia una sviluppabile.

Supponiamo che C sia sezione piana di una sviluppabile. Allora, in base al n. 4, C è proiezione di una curva \bar{C} appartenente ad una quadrica Q dell' S_3 , da un piano appartenente a Q , ed inoltre la sviluppabile delle tangenti a \bar{C} appartiene anch' essa a Q .

Sia t la tangente a \bar{C} in un punto \bar{P} . Appartenendo per ipotesi t a Q , gli iperpiani tangenti a Q e passanti per t costituiscono due sistemi lineari ∞^2 di iperpiani. Ma gli iperpiani

tangenti a Q , e passanti per t sono tutti e soli gli iperpiani aventi con \bar{C} un incontro bipunto in \bar{P} e tangenti a Q . E allora, riferendoci a quanto è stato detto nella prima parte del n. 5, e trasportando queste considerazioni sulla curva C , si ha che, quando \bar{C} appartiene all' S_5 , la rigata di cui al n. 5 è una sviluppabile, se e soltanto se la serie γ_n^2 costituita dai gruppi della γ_n^4 passanti doppiamente per un punto P di C si spezza nella somma di due serie lineari g_n^2 . Considerazioni analoghe si possono fare quando \bar{C} appartiene ad un S_4 , mentre, se \bar{C} appartiene ad un S_3 , la rigata non può essere una sviluppabile, poichè in tal caso, giusta il n. 4, la sviluppabile delle tangenti a \bar{C} dovrebbe coincidere con la quadrica di S_3 cui \bar{C} appartiene; e ciò è assurdo, poichè le quadriche di S_3 non sono sviluppabili.

Possiamo pertanto concludere:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè la rigata di cui al teorema del n. 5 sia una sviluppabile, è che la serie algebrica γ_n^s ivi considerata sia di dimensione $s \geq 3$, e che la serie algebrica γ_n^{s-2} costituita dai gruppi della γ_n^s che passano doppiamente per un punto P di C si spezzi nella somma di due serie lineari g^{s-2} .

7. - Passiamo ora a dimostrare che, quando l'ordine n di una curva piana C è abbastanza grande rispetto al genere p di essa, C è sezione piana di una rigata (non conica) di S_3 .

Se $n > 2p - 2$, la serie completa contenente le sezioni rettilinee di C è certamente non speciale. Quindi C è proiezione di una curva \bar{C} di S_r ($r = n - p$) da uno spazio ad $r - 3$ dimensioni, S_{r-3} che non incontri \bar{C} .

In base al n. 7, se per \bar{C} ed S_{r-3} passa una quadrica di S_r specializzata $r - 5$ volte, C è certamente sezione piana di una rigata (non conica) di S_3 . Occorre pertanto vedere sotto quali condizioni si può far passare per \bar{C} ed S_{r-3} una tal quadrica.

Si noti anzitutto che, se una quadrica di S_r contiene un S_{r-3} , essa è specializzata (almeno) $r - 5$ volte; basterà quindi vedere sotto quali condizioni si può far passare per \bar{C} ed S_{r-3} una quadrica di S_r .

Le quadriche di S_r dipendono, come è noto, da $\binom{r+2}{2} - 1$ parametri. Imponendo ad una tal quadrica di passare per la curva \bar{C} , d'ordine n , si vengono ad imporre $2n + 1$ condizioni lineari, perchè una quadrica che abbia $2n + 1$ punti a comune con \bar{C} , la contiene per intero. E imponendo ad una quadrica di S_r di contenere l' S_{r-3} di cui sopra, si vengono ad imporre $\binom{r-1}{2}$ condizioni lineari, perchè per $\binom{r-1}{2}$ punti generici di S_{r-3} non passa alcuna sua quadrica, e pertanto una quadrica di S_r obbligata a passare per $\binom{r-1}{2}$ punti generici di S_{r-3} , non potendo segare quest'ultimo secondo una quadrica, lo deve contenere per intero. In complesso, le quadriche di S_r passanti per \bar{C} e per l' S_{r-3} son soggette ad al più $\binom{r-1}{2} + 2n + 1$ condizioni lineari indipendenti. Pertanto esistono certamente di tali quadriche, ogniqualvolta si abbia

$$\binom{r+2}{2} - 1 \geq \binom{r-1}{2} + 2n + 1$$

cioè $r \geq 2p + 2$, ossia, ricordando che è $r = n - p$

$$n \geq 3p + 2.$$

Non può avvenire che ogni tale quadrica Q sia specializzata $r - 2$ volte, perchè in tal caso essa avrebbe un S_{r-3} doppio, dal quale \bar{C} sarebbe proiettata, entro un S_2 generico, in una conica, il che non può avvenire se \bar{C} è generica. Onde \bar{C} può essere proiettata dall' S_{r-i-1} doppio della quadrica Q in una curva \bar{C} di una quadrica Q^* non specializzata di S_i ($i = 3, 4, 5$); e corrispondentemente, l' S_{r-3} per cui passa la quadrica Q interseca Q^* secondo un S_{i-3} . Pertanto \bar{C} è proiezione di una curva C di una quadrica Q^* di S_i ($i = 3, 4$ o 5) da uno spazio S_{i-3} appartenente alla quadrica stessa. Se è $i < 5$, si può far passare per S_{i-3} e per Q^* una quadrica Q_0 di S_5 non specializzata.

Ed allora, C è proiezione di una curva \bar{C} , non piana, appartenente ad una quadrica Q_0 di S_5 non specializzata, da un S_2 appartenente a Q_0 stessa (bastando prendere un qualunque S_2 di Q_0 passante per S_{t-3}). Dal teorema del n. 2 si deduce allora che C è sezione piana di una rigata (non conica) di S_3 . In conclusione :

Quando tra l'ordine n ed il genere p di una curva piana C passa la relazione $n \geq 3p + 2$, la curva è certamente sezione piana di una rigata (non conica) dello spazio ordinario () .*

Utilizzando il fatto che C può ottenersi come proiezione, da S_{r-3} , di infinite curve, si potrebbe indubbiamente abbassare notevolmente la limitazione $3p + 2$ stabilita per n . Ma non ci attardiamo su ciò.

Da quanto abbiamo ora detto risulta che, se $n \geq 3p + 2$, esiste una famiglia di rigate d'ordine n e genere p , in cui la rigata generica ha per sezione piana la curva piana generica d'ordine n e genere p .

Evidentemente, se la curva C è dotata di soli nodi, la rigata di cui essa è sezione piana non è una sviluppabile, perchè la sezione piana di una sviluppabile ha una cuspidale nel punto d'incontro del piano secante con lo spigolo di regresso della sviluppabile.

§ 2. - Caratterizzazione delle curve di diramazione delle rigate non coniche dell' S_3 .

8. - Per caratterizzare le curve di diramazione delle rigate di S_3 , non resta che trasformare per dualità i risultati ottenuti nel § prec.

È noto che i piani tangenti ad una rigata R non sviluppabile di S_3 costituiscono una rigata-inviluppo Φ , la cui classe eguaglia l'ordine n di R . Se invece R è una sviluppabile, essa ammette ∞^1 piani tangenti, anzichè ∞^2 ; onde quando una ri-

(*) Essa è poi sempre sezione d'una rigata conica !

gata non sviluppabile tende ad una rigata sviluppabile, la rigata-inviluppo ad essa aderente degenera.

Dualmente, ad una rigata-inviluppo Φ generica di classe n è aderente una rigata-luogo R d'ordine n ; ma, quando Φ tende ad una rigata-inviluppo che costituisce l'ente duale di una sviluppabile (e che diremo, per brevità, *rigata-inviluppo sviluppabile*) R degenera.

La curva di diramazione ottenuta proiettando R da un punto P di S_3 sopra un piano π ha per tangenti le intersezioni di π coi piani di Φ per P . Onde *l'inviluppo delle tangenti alla curva di diramazione di una rigata luogo è nello stesso tempo sezione piana della varietà costituita dai piani della rigata-inviluppo aderente, passanti per un punto*. Viceversa, *la sezione piana della varietà costituita dai piani di una rigata-inviluppo passanti per un punto, come risulta dalle considerazioni precedenti, è costituita dalle tangenti alla curva di diramazione di una rigata luogo, tutte le volte che la rigata-inviluppo considerata non è una rigata-inviluppo sviluppabile*.

9. - Dualizzando il teorema del n. 3, tenuto anche conto di quanto si è detto nel n. prec., e dell'osservazione del n. 4, si ottiene :

Condizione necessaria e sufficiente, affinché una curva piana C di classe n sia curva di diramazione di una rigata algebrica d'ordine n (non sviluppabile), è che l'inviluppo delle sue tangenti sia sezione di un sistema algebrico ∞^1 , Σ , di iperpiani, d'ordine n , appartenente ad una quadrica-inviluppo Q di S_3 , mediante un piano appartenente alla medesima Q , e che non ogni iperpiano passante per l'intersezione di due iperpiani successivi di Σ appartenga a Q .

Analogamente, se si indica con i l'indice di specialità della serie lineare, appartenente all'ente algebrico ∞^1 costituito dalle tangenti a C , la quale consta dei gruppi di rette tangenti a C passanti per un medesimo punto, si ottiene, trasformando per dualità il risultato del n. 3:

Condizione necessaria e sufficiente affinché C sia curva di diramazione di una rigata di S_3 d'ordine n , (non sviluppabile) è che l'inviluppo delle sue tangenti sia sezione di un sistema

algebrico $\Sigma \infty^1$ di iperpiani appartenente ad una quadrica-inviluppo di S_r ($r = n - p + i$, p essendo il genere di C , e i l'indice di specialità della serie delle sezioni rettilinee di C ; $r > 2$), specializzata $r - 5$ volte, mediante un S_2 appartenente a Q , e che non ogni iperpiano passante per l'intersezione di due iperpiani successivi di Σ appartenga a Q .

10. - Se dualizziamo i risultati dei nn. 5 e 6, otteniamo una condizione necessaria e sufficiente affinché una curva C piana d'ordine n sia curva di diramazione di una rigata algebrica di S_3 non sviluppabile, basata sulla considerazione di una certa serie algebrica di gruppi di rette appartenente alla curva involuppo aderente a C . Ma pensando che C è birazionalmente equivalente a detta curva involuppo (a ciascun punto di C corrispondendo la tangente a C nel punto stesso), si può dare una condizione necessaria e sufficiente che si basi sulla considerazione di una certa serie algebrica di gruppi di punti sopra C . Essa è la seguente:

Condizione necessaria e sufficiente, affinché una curva piana C di classe n sia curva di diramazione di una rigata algebrica d'ordine n , è che essa posseda una serie algebrica, non lineare, γ_n^s , con $s = 2, 3$ o 4 , tale che:

a) *La serie jacobiana della serie delle sezioni rettilinee di C (non completata) è contenuta nella γ_n^s .*

b) *I gruppi della γ_n^s sono equivalenti.*

c) *Una serie lineare d'ordine n , che abbia tre gruppi a comune con la γ_n^s , ha con essa a comune infiniti gruppi.*

d) *La serie γ_n^{s-1} costituita dai gruppi della γ_n^s che passano per un punto generico P di C , contiene infinite g_n^2 , se è $s = 4$; contiene infinite g_n^1 formanti un unico sistema continuo, se $s = 3$; si spezza in due g_n^1 , se $s = 2$.*

e) *Se $s > 3$, la serie algebrica γ_n^{s-2} costituita dai gruppi della γ_n^s che passano doppiamente per un punto P di C , non si spezza nella somma di due serie lineari g_n^{s-2} .*

11. - Finalmente, trasformando per dualità i risultati del n. 7, si ottiene che

Una curva piana di classe n e genere p senza flessi, quando $n \geq 3p + 2$, è curva di diramazione di una rigata di S_3 , d'ordine n e genere p .

§ 3. - Spezzamento di una rigata algebrica di S_3 , di genere p ed ordine $n \geq 3p + 2$, in piani connessi mediante rette, in modo semplice.

12. - Sia R una rigata algebrica di genere p , a moduli generali. Si potrà allora trovare una curva piana C di classe n e genere p , con $n \geq 3p + 2$, birazionalmente equivalente al fascio delle generatrici di R , e poichè C è a moduli generali, si può supporre addirittura che C sia la generica curva piana di classe n e genere p .

Allora, in base al teorema che chiude il n. 11, possiamo affermare che C è curva di diramazione di una rigata F (non conica) d'ordine n e genere p , la quale è birazionalmente equivalente alla R , perchè il fascio delle sue generatrici è birazionalmente equivalente al fascio delle generatrici della R ⁽⁵⁾.

13. - In base ad un risultato di SEVERI ⁽⁶⁾, le curve piane d'ordine n e genere p dotate di soli nodi formano un solo sistema continuo, contenente tutti gli n -lateri piani di genere virtuale p . Inoltre ⁽⁷⁾, tra gli n -lateri di genere virtuale p quando $n \geq 2p + 1$, ve ne sono di quelli in cui ogni lato contiene al più tre punti di connessione.

Dualmente, gli involuppi piani di rette, di classe n e genere p , aventi, come sole singolarità, rette doppie a punti di tangenza distinti, formano un solo sistema continuo, a cui appartengono

⁽⁵⁾ Cfr. F. SEVERI, *Sulla classificazione delle rigate algebriche*, Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, Serie 6, vol. 2, fasc. 1, pp. 1-32.

⁽⁶⁾ *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Anhang F., Teubner, Berlino, 1921.

⁽⁷⁾ Op. cit. in (1).

tutti gli involuipi spezzati in n fasci di rette distinti, di genere virtuale p (e che diremo brevemente n -goni di genere virtuale p).

Sia Λ un tale n -gono. Tra le rette che congiungono a due a due i centri degli n fasci di Λ , ve ne sono $n + p - 1$ che non sono limiti di rette doppie dell'involuppo irriducibile del sistema continuo cui appartiene Λ . Esse sono pertanto da considerarsi rette di connessione di Λ .

Quando una curva d'ordine n e genere p tende ad un n -latero di genere virtuale p , l'involuppo delle sue tangenti tende al sistema delle rette dei fasci aventi per centri i punti di connessione dell' n latero, ogni fascio contando due volte. E, dualmente, quando un involuppo di classe n e genere p tende ad un n -gono di genere virtuale p , la curva luogo involuppata tende al sistema delle rette di connessione dell' n -gono, ogni tale retta contando due volte.

14. - Essendo la curva C di cui al n. 12 una curva generica di classe μ e genere p , con $n \geq 3p + 2$, quindi in particolare $\geq 2p + 1$, si possono applicare all'involuppo delle sue tangenti le considerazioni del n. prec.

Si può cioè far tendere C ad una curva Δ spezzata in $n + p - 1$ rette doppie, in modo che l'involuppo delle tangenti a C tenda all' n -gono Λ costituito dai fasci che hanno per centri gli n punti di connessione di Δ . Inoltre, per ognuno dei punti di connessione di Δ non passano mai più di tre rette di Δ .

Nella proiezione di F sul piano n -plo, che dà luogo alla curva di diramazione C , le generatrici di F si proiettano nelle tangenti a C . Onde, quando C tende a Δ , F tende ad una rigata Ψ per cui il fascio delle generatrici si spezza in n fasci distinti, necessariamente del primo ordine; di modo che Ψ risulta spezzata in piani. Due piani di Ψ si connettono secondo rette, aventi per immagini, sul piano multiplo, rette di Δ . Inoltre, poichè i punti di connessione di Δ son le proiezioni dei centri dei fasci di generatrici di Ψ , e poichè per ogni punto di connessione di Δ passano al più tre rette di Δ , si ha che su ciascuno dei piani di Ψ ci sono al più tre rette di connessione di Ψ . Esse, come era già noto, appartengono alle generatrici di Ψ , e passano quindi

pel centro del fascio di generatrici di Ψ che si trovano sul piano considerato.

Giungiamo pertanto al seguente risultato :

Data una rigata R di genere p , a moduli generali, tra le rigate biraxionalmente equivalenti ad R se ne può trovare una F , suscettibile di tendere, variando con continuità, ad una rigata Ψ spezzata in piani, connessi tra loro mediante rette, di modo che su ciascun piano non cadano mai più di tre rette di connessione.

È noto ⁽⁸⁾ che non è possibile, se $p > 1$, far tendere una rigata ad un'altra spezzata in piani connessi tra loro in modo più semplice di quello ora indicato.

(8) Op. cit. in (4).