RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SALVATORE CHERUBINO

Sopra un certo pfaffiano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 13 (1942), p. 30-35

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1942__13__30_0>

SOPRA UN CERTO PFAFFIANO

Nota di Salvatore Cherubino *(a Pisa)*

Sunto - Si tratta dello pfaffiano $\varepsilon_0 \rho^p + \varepsilon_1 \rho^{p-1} + \ldots + \varepsilon_p$ della matrice emisimmetrica di ordine $2p$: $A - \rho I_0$, $I_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right)$, del quale si determinano i coefficienti ε_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Sia $A = \| a_{rs} \|$, $a_{sr} = - a_{rs}$, una matrice emisimmetrica di ordine $2p$ e si indichi con I_0 la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right)$$

nella quale 0 ed I denotano due matrici di ordine p, la prima nulla, la seconda identica.

Il pfaffiano della matrice

$$A^* = \| a^*_{rs} \| = A - \rho I_0 =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \ldots & a_{1,p} & a_{1,p+1} - \rho & \ldots & a_{1,2p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \ldots & 0 & a_{p,p+1} & \ldots & a_{p,2p} - \rho \\ \hline a_{p+1,1} + \rho & \ldots & a_{p+1,p} & 0 & \ldots & a_{p+1,2p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2p,1} & \ldots & a_{2p,p} + \rho & a_{2p,p+1} & \ldots & 0 \end{array} \right\|$$

è un polinomio di grado p nell'indeterminata ρ (il cui quadrato eguaglia il determinante $|A^*|$):

$$\varepsilon_0 \rho^p + \varepsilon_1 \rho^{p-1} + \varepsilon_2 \rho^{p-2} + \ldots . + \varepsilon_p$$

i cui coefficienti sono funzioni razionali intere degli elementi della matrice A.

Scopo di questa Nota (suggeritami da mie ricerche sulle corrispondenze algebriche fra curve) è di mostrare come il coefficiente ε_h $(h = 1, 2, \ldots, p)$ sia, a meno del segno, somma dei pfaffiani di certi $\binom{p}{h}$ minori principali di ordine $2h$, estratti da A e di precisare questo segno, insieme a quello di ε_0.

1. - Ricordiamo (¹) che lo pfaffiano di A^* si può scrivere

$$P_p^* = \Sigma (-1)^l a^*_{r_1 s_1} a^*_{r_2 s_2} \ldots a^*_{r_p s_p} \tag{1}$$

dove

$$r_1 s_1, \; r_2 s_2, \ldots, \; r_p s_p \tag{2}$$

è una qualunque delle $1 . 3 . 5 \ldots (2p-1)$ distribuzioni in p coppie dei $2p$ indici $1, 2, \ldots, 2p$; l è un intero pari o dispari insieme alla classe della permutazione

$$S = r_1 s_1 r_2 s_2 \ldots r_p s_p ;$$

il sommatorio è esteso a tutte le predette distribuzioni (2) fra loro distinte. Due di queste si considereranno distinte quando differiscono almeno per una coppia, non importando (ai fini del segno dei termini di P_p^*) l'ordine delle coppie, nè quello degli indici di una stessa coppia (²), pei quali si potrà supporre sempre $r_i < s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Il termine in ρ^p dello sviluppo (1) si ottiene dall'elemento

(¹) G. Scorza: *Sui determinanti emisimmetrici di ordine pari e sui relativi pfaffiani* [Rend. Pal., t. 36 (1913)] pp. 171-176.

(²) Scambiando gli indici di una coppia r, s, muta la classe di S, ma muta anche il segno di a_{rs}. Scambiando fra loro due coppie, la permutazione S cambia due volte di classe.

$$(3)\qquad (-1)^l (a_{1,p+1}-\rho)(a_{2,p+2}-\rho)\dots(a_{p,2p}-\rho)$$

e da questo soltanto. E poichè la permutazione

$$1,\ p+1,\ 2,\ p+2,\dots,\ p,\ 2p$$

presenta

$$l=(p-1)+(p-2)+\dots+2+1=\frac{p(p-1)}{2}$$

inversioni, risulta

$$(4)\qquad \varepsilon_0=(-1)^l\cdot(-1)^p=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}.$$

I termini in ρ^{p-h} nello sviluppo di P_p^* provengono ciascuno da un prodotto

$$(5)\qquad a^*_{r_1 s_1}\, a^*_{r_2 s_2}\dots a^*_{r_p s_p}$$

in cui figurano almeno $p-h$ fattori come $a^*_{i,p+i}$, da $p-h$ dei quali si sceglie ρ. Portando questi fattori agli ultimi $p-h$ posti del prodotto, quel termine in ρ^{p-h} risulta moltiplicato per

$$(5^*)\qquad a_{r_1 s_1}\cdot a_{r_2 s_2}\dots a_{r_h s_h}.$$

Dunque, un termine in ρ^{p-h} si ottiene scegliendo una combinazione di $p-h$ fra i p elementi $a^*_{1,p+1}, a^*_{2,p+2},\dots, a^*_{p,2p}$ ed assegnando ad esso, a meno del segno, il coefficiente (5)*, nel quale

$$r_1 s_1,\ r_2 s_2,\dots,\ r_h s_h$$

costituisce una distribuzione in h coppie dei $2h$ indici che restano sopprimendo da $1, 2,\dots, 2p$ gli indici dei $p-h$ elementi $a^*_{i,p+i}$, dai quali si prende ρ.

Il numero dei termini in ρ^{p-h} che così si ottengono, e che stante la indeterminazione degli a_{rs} non si riducono, è dunque

$$(6)\qquad 1.3.5\dots(2h-1)\cdot\binom{p}{h}.$$

È chiaro che quando da un prodotto

$$a_{r_1 s_1} \cdot a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_p s_p}$$

contenente *almeno* $p-h$ fattori come $a_{i,p+i}$ si sopprimono $p-h$ di questi, si ottiene (a meno del segno) un termine dello sviluppo dello pfaffiano di uno dei $\binom{p}{p-h} = \binom{p}{h}$ minori principali di ordine $2h$ risultanti da A con la eliminazione delle $2(p-h)$ righe e $2(p-h)$ colonne intersecalantisi in $p-h$ elementi $a_{i,p+i}$ (che si sopprimono nel prodotto) e nei loro simmetrici. E poichè ciascuno di questi pfaffiani dà luogo ad

$$1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots . (2h-1)$$

termini che non si riducono nè fra loro nè con gli altri dei $\binom{p}{h}$ pfaffiani mentovati, si conclude che i termini del coefficiente ε_h del polinomio P_p^*, il cui numero è (6), sono tutti e soli, a meno del segno, quelli dello sviluppo dei $\binom{p}{h}$ pfaffiani dei minori principali di ordine $2h$ del tipo or ora indicato. Nè può accadere che uno di questi termini si ottenga più volte, perchè le distribuzioni in coppie degli indici $1, 2, \ldots, 2p$, di cui in (1), sono tutte distinte.

2. – Per assicurarci che la coincidenza avviene sempre con uno stesso segno, dipendente soltanto da p e da h, riprendiamo il prodotto (5) che, moltiplicato per $(-1)^l$, dà un elemento dello sviluppo di P_p^*. I fattori dai quali prendiamo ρ siano $a^*_{i_1,\, p+i_1}, a^*_{i_2,\, p+i_2}, \ldots, a^*_{i_{p-h},\, p+i_{p-h}}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_{p-h}$.

Se in (5) si porta all'ultimo posto il fattore $a_{i_1,\, p+i_1}$, la parità di l non varia. Sopprimendo questo fattore, la permutazione degli indici rimasti opera su $2p-2$ elementi e perde $(2p-1)-i_1$ inversioni per gli indici maggiori di i_1 precedenti i_1 (e cioè tutti i $2p-i_1$ che son maggiori di i_1, meno $p+i_1$) ed altre $p-i_1$ relative agli indici maggiori di $p+i_1$: in totale, si perdono $(3p-1)-2i_1$ inversioni e la parità della classe della sostituzione residua diventa quella di $l+(p-1)$.

Sopprimendo anche il fattore $a_{i_2,\,p+i_2}$ si perdono $(2p-3)-(i_2-1)$ inversioni dovute agli indici (fra i $2p-2$ rimasti) che son maggiori di i_2 e precedenti i_2, mentre $(p-2)-i_2$ se ne perdono per gli indici maggiori di $p+i_2$, che precedono questo (3). In totale, si perdono $(3p-5)-(2i_2-1)$ inversioni e la parità della classe della sostituzione residua diventa quella di $l+2(p-1)+1$.

Sopprimendo anche il terzo fattore $a_{i_3,\,p+i_3}$, si perdono $(2p-5)-(i_3-2)$ inversioni rispetto all'indice i_3 e $(p-4)-i_3$ per l'indice $p+i_3$: in totale, altre $(3p-9)-(2i_3-2)$, sicchè la parità della classe della permutazione residua coincide con quella di $l+3(p-1)+(1+2)$.

Così continuando, dopo aver soppresso $p-h$ fattori dai quali si prende ρ, ci riduciamo al prodotto (5)* la cui classe avrà la stessa parità di

$$n = l+(p-h)(p-1)+[1+2+3+\ldots+(p-h-1)] =$$
$$= l+(p-h)(p-1)+\frac{(p-h)(p-h-1)}{2}.$$

Dunque, quello di $(-1)^n$ è il segno col quale il prodotto (5)* compare nello sviluppo dello pfaffiano di uno dei $\binom{p}{h}$ minori principali di ordine $2h$ di A di cui si è detto avanti. Lo stesso termine compare in ε_h, cioè come coefficiente di ρ^{p-h} nello sviluppo di P_p^*, col segno di $(-1)^{l+p-h}$, che si ottiene da $(-1)^n$ moltiplicando per $(-1)^{\nu_h}$, ove

$$\nu_h = (p-2)(p-h)+\frac{(p-h)(p-h-1)}{2},$$

che dimostra quanto è affermato all'inizio del presente n. 2.

(3) Poichè i_1 è soppresso, fra i $2p-2$ indici restanti vi sono $(2p-2)-(i_2-1)$ indici maggiori di i_2; fra questi c'è $p+i_2$ che segue i_2. La soppressione di i_1 e di $p+i_1$, entrambi minori di $p+i_2$. non altera il numero degli indici che son maggiori di $p+i_2$.

Osserviamo che i minori principali di ordine $2h$ estratti da A di cui si parla al n. 1 si ottengono anche sopprimendo le $2(p-h)$ righe e $2(p-h)$ colonne che si intersecano in $p-h$ elementi principali scelti fra i primi p ed in quelli distanti da essi per p posti. Questi, a lor volta, sono quelli i cui elementi sono allo incrocio delle $2h$ righe e $2h$ colonne intersecantisi nei rimanenti $2h$ elementi principali dei quali ancora h sono fra i primi p ed i rimanenti distano da essi per p posti.

Possiamo dunque enunciare che:

Lo pfaffiano della matrice emisimmetrica $A^* = A - \rho\, I_0$ *è un polinomio di grado p in* ρ *il cui primo coefficiente è* $(-1)^k$, $k = \frac{p(p+1)}{2}$, *mentre quello di* ρ^{p-h} *si ottiene moltiplicando per* $(-1)^{\nu_h}$, $\nu_h = p(p-h) + \frac{(p-h)(p-h-1)}{2}$, *la somma dei pfaffiani di quei* $\binom{p}{h}$ *minori principali di ordine* $2h$ *i cui elementi sono all'incrocio di* $2h$ *righe e di* $2h$ *colonne che s'intersecano in* $2h$ *elementi principali di cui h fra i primi p e i rimanenti distanti da essi per p posti.*

Si tenga presente che, conformemente all'uso più diffuso, il segno del pfaffiano di una matrice emisimmetrica $\|a_{rs}\|$ di ordine $2n$ risulta qui preso in modo che il termine $a_{12}\, a_{34} \ldots \ldots a_{2n-1,\,2n}$ vi figuri preceduto dal segno positivo.

(Pervenuto in Redazione il 19 Aprile 1942-XX)