RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

Generazione proiettiva della varietà che rappresenta le coppie non ordinate di punti d'uno spazio lineare S_r

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 12 (1941), p. 123-129

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1941__12__123_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GENERAZIONE PROIETTIVA DELLA VARIETÀ CHE RAPPRESENTA LE COPPIE NON ORDINATE DI PUNTI D' UNO SPAZIO LINEARE S_r.

Nota di Ugo Morin *(a Padova).*

Dopo aver accennato (nn. 1, 2, 3) a proprietà della varietà minima V_{2r} che rappresenta senza eccezioni le coppie non ordinate di punti d'uno spazio lineare S_r, le quali sono ovvie generalizzazioni di proprietà della varietà dei piani tangenti d'una superficie di Veronese [1], do di questa V_{2r} una costruzione proiettiva diretta. Da questa costruzione seguono varie determinazioni proiettive d'un sistema lineare di S_r, a due a due incidenti, i quali segano su alcuni spazi gruppi di punti che si corrispondono in omografie tra questi spazi (n. 9).

1. – Ad una quadrica inviluppo dello spazio lineare S_r^*, di equazione

$$\Sigma_{ij}\, \alpha_{ij}\, \xi_i\, \xi_j = 0, \qquad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji}), \tag{1}$$

facciamo corrispondere il punto d'uno spazio lineare S_N, $N = \dfrac{r(r+3)}{2}$, di coordinate $\rho X_{ij} = \alpha_{ij}$. Alle coppie non ordinate di punti dell' S_r^* (interpretati come sostegni di due stelle d'iperpiani) corrispondono nell' S_N i punti d'una varietà alge-

[1] Bertini E., *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [Giuseppe Principato, Messina 1923], Cap. XVI.

brica V_{2r}, di dimensione $2r$ e di ordine $\binom{2r}{r}$. Infine, ai punti dell' S_r^* (interpretati come sostegni di stelle doppie) corrispondono nell' S_N i punti d'una V_r, rappresentata nell' S_r^* dal sistema lineare di tutte le quadriche luogo. L'ordine della V_r è quindi 2^r.

2. Alle coppie di punti dell' S_r^*, con un punto fisso P^*, corrispondono nell' S_N i punti d'un S_r; tangente alla V_r nel suo punto P, imagine di P^*. Al variare di P^* si ottiene un sistema ∞^r, Σ, di S_r a due a due incidenti in un punto.

Per un punto generico della V_{2r} passano due S_r di Σ e i punti di incidenza di due S_r di Σ con gli ∞^r spazi di Σ si corrispondono in un omografia. Per un punto P della V_r passa un solo S_r di Σ e P è l'intersezione di questo S_r cogli spazi di Σ ad esso infinitamente vicini.

3. - Alle coppie di punti dell' S_r^*, con un punto fisso P^* e l'altro variabile in un S_{r-1}^* generico dell' S_r^* corrispondono nell' S_N i punti d'un S_{r-1}, appartenente all' S_r relativo a P^*. Al variare di P^*, fisso essendo l' S_{r-1}^*, si ottengono ∞^r spazi S_{r-1}, che appartengono ad un iperpiano S_{N-1} dell' S_N.

Infatti, la V_{2r} ha le equazioni parametriche $X_{ij} = \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$, $(i, j = 0, 1, \ldots, r)$, e se l' S_{r-1}^* ha l'equazione $x_0 = 0$, il corrispondente S_{N-1} ha l'equazione $X_{00} = 0$.

4. - Ora vogliamo dare una *costruzione proiettiva diretta d'un sistema* ∞^r *di* S_r *a due a due incidenti, del tipo* Σ, e constatare che questi S_r generano una V_{2r}.

Consideriamo nello spazio lineare S_N $N+1$ punti linearmente indipendenti, che indichiamo con $P_{ij} = P_{ji}$ $(i, j = 0, 1, \ldots, r)$. Gli $r+1$ di questi punti che contengono lo stesso indice i individuano uno spazio $S_r^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ e due di questi $r+1$ spazi, $S_r^{(i)}$ e $S_r^{(j)}$, hanno in comune il punto P_{ij}, e questo soltanto.

Consideriamo inoltre un iperpiano generico S_{N-1} dell' S_N.

Questi taglia ciascun $S_r^{(i)}$ in un $S_{r-1}^{(i)}$. Tra due degli $r+1$ spazi, $S_r^{(i)}$ e $S_r^{(j)}$, (ad esempio $i<j$), risulta determinata un'omografia

$$(2)\qquad \Omega_{ij}\begin{pmatrix} P_{i0}, \ldots, & P_{ii}, \ldots, & P_{ij}, \ldots, & P_{ir}, & S_{r-1}^{(i)} \\ P_{j0}, \ldots, & P_{ji}, \ldots, & P_{jj}, \ldots, & P_{jr}, & S_{r-1}^{(j)} \end{pmatrix},$$

dalle $r+1$ coppie di punti e dalla coppia di S_{r-1} corrispondenti messi in evidenza. Segue direttamente che

$$(3)\qquad \Omega_{ij}\,\Omega_{jk} = \Omega_{ik}.$$

In queste omografie, ad un punto P_i dell'$S_r^{(i)}$ corrispondono r punti degli altri $S_r^{(j)}$, ed il gruppo G_{r+1} di $r+1$ punti così ottenuti è individuato simmetricamente, in base alle (3), da ciascuno dei suoi punti. Lo spazio congiungente un gruppo generico G_{r+1} è un S_r e non uno spazio di dimenzione minore, poichè se P_i tende a P_{ii}, il relativo spazio congiungente tende all'$S_r^{(i)}$.

Al variare di P_i nell'$S_r^{(i)}$ otteniamo così un sistema Σ_r, ∞^r, di spazi S_r congiungenti i gruppi G_{r+1}. Proviamo che *gli* S_r *di questo* Σ_r *generano una* V_{2r} (n. 1).

5. – Fissiamo perciò in un S'_N una V'_{2r}, imagine delle coppie non ordinate di punti d'un S_r^*. Ad $r+1$ punti generici dell'S_r^* corrispondono (n. 2) $r+1$ spazi $S_r'^{(i)}$, a due a due incidenti in un punto P'_{ij}, e i punti d'incidenza di due di questi spazi cogli ∞^r spazi del sistema Σ' si corrispondono in un'omografia Ω'_{ij} (n. 2). Un $S_{r-1}'^{(0)}$ generico dell'$S_r'^{(0)}$ ed i corrispondenti $S_{r-1}'^{(i)}$ nelle varie Ω'_{0i} appartengono ad un medesimo S'_{N-1} (n. 3). Indicando con P'_{ii} il punto di contatto dell'$S_r^{(i)}$ colla V'_r (n. 1), l'omografia Ω'_{ij} è individuata dalle seguenti coppie di elementi corrispondenti

$$(4)\qquad \Omega'_{ij}\begin{pmatrix} P'_{i0}, \ldots, & P'_{ii}, \ldots, & P'_{ij}, \ldots, & P'_{ir}, & S_{r-1}'^{(i)} \\ P'_{j0}, \ldots, & P'_{ji}, \ldots, & P'_{jj}, \ldots, & P'_{jr}, & S_{r-1}'^{(j)} \end{pmatrix}.$$

6. Possiamo ora determinare un'omografia Ω tra gli spazi S'_N ed S_N, facendo corrispondere ordinatamente agli $N+1$ punti P'_{ij} (n. 5) i punti P_{ij} (n. 4) e all'iperpiano S'_{N-1} l'iperpiano S_{N-1}.

Questa omografia Ω muta non solo gli $r+1$ spazi $S'^{(i)}_r$ negli spazi $S^{(i)}_r$, ma trasforma anche l'omografia Ω'_{ij} nell'Ω_{ij}; in quanto trasforma le coppie di elementi corrispondenti messi in evidenza dalla (4) nelle coppie messe in evidenza dalla (2). Dunque la Ω trasforma gli ∞^r S'_r del sistema Σ' negli ∞^r S_r di Σ_r (n. 4); cioè trasforma la V'_{2r} immagine delle coppie non ordinate di punti dell'S^*_r nella V_{2r} da noi direttamente costruita.

7. - Lasciamo ora cadere per le omografie Ω_{ij} tra gli spazi $S^{(i)}_r$, $S^{(j)}_r$, soddisfacenti alle (3) e nelle quali i punti P_{ij} si corrispondano secondo gli schemi (2), l'ipotesi che un gruppo di $S^{(i)}_{r-1}$ corrispondenti appartengano ad un iperpiano S_{N-1} e *sostituiamola coll'ipotesi che due S_r del nuovo sistema Σ^*_r siano incidenti in un punto.*

Questi due S_r individuano un S^*_{2r}, che ha in comune con ciascun $S^{(i)}_r$ la retta b^*_i, congiungente i punti d'incontro dell'$S^{(i)}_r$ coi due S_r. Supponiamo inoltre che la retta b^*_i sia indipendente dai punti P_{ij}.

Proponiamoci di dimostrare che *due generici S_r di Σ^*_r sono incidenti.*

Infatti, questa proprietà, in base al teorema del n. 6, è vera per $r=2$ (poichè $S_N = S_5$, $S^*_{2r} = S^*_4$). Supponiamo ora che la proprietà sia vera per spazi ad $r-1$ dimensioni e dimostriamo che essa è di conseguenza vera per spazi ad r dimensioni.

Proiettiamo gli ∞^r spazi di Σ_r dall'$S^{(0)}_r$ sopra un S_{N-r-1} complementare dell'$S^{(0)}_r$. Essi si proiettano in spazi ad $r-1$ dimensioni. In particolare $S^{(1)}_r, \ldots, S^{(r)}_r$ daranno r spazi $S^{(1)}_{r-1}, \ldots$ $\ldots, S^{(r)}_{r-1}$ dell'S_{N-r-1} $\left(N-r-1 = \dfrac{(r-1)(r+2)}{3}\right)$, a due a due incidenti in un punto P'_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$.

Un S_r generico di Σ^*_r taglia gli spazi $S^{(1)}_r, \ldots, S^{(r)}_r$ rispettivamente in r punti $A_1, \ldots, A_r$, che si proiettano in punti $A'_1, \ldots, A'_r$ rispettivamente degli spazi $S^{(1)}_{r-1}, \ldots, S^{(r)}_{r-1}$. Nell'omografia Ω_{ij} alla retta $P_{i0} A_i$ corrisponde la retta $P_{j0} A_j$, cioè agli ∞^1 S_r di Σ_r^* che si appoggiano alla retta $P_{i0} A_i$ (e quindi alle corrispondenti rette $P_{j0} A_j$) corrisponde nell' S_{N-r-1} lo stesso spazio S_{r-1}, determinato dai punti $A'_1, \ldots, A'_r$. Quindi questi gruppi di r punti, congiunti dagli S_{r-1} proiezioni degli S_r di Σ_r, si corrispondono in omografie ω_{ij} tra le varie coppie di spazi $S_{r-1}^{(i)}$, $S_{r-1}^{(j)}$ (soddisfacenti alle (3)). In queste omografie i punti P'_{ij} si corrispondono secondo gli schemi (2) ed inoltre le rette $b_1^{*\prime}, \ldots, b_r^{*\prime}$, proiezioni delle rette $b_1^*, \ldots, b_r^*$, appartengono ad un medesimo S_{2r-2}^*, proiezione dell' S_{2r}^* delle rette b_0^*, $b_1^*, \ldots, b_r^*$ dall' $S_r^{(0)}$, col quale ha in comune la retta b_0^*, (²).

Dunque gli ∞^{r-1} S_{r-1} proiezioni degli ∞^r S_r di Σ_r^* formano un sistema Σ_{r-1}^* (soddisfacente alle condizioni poste in questo numero), quindi i suoi S_{r-1} sono (per ipotesi) a due a due incidenti. Cioè r rette generiche $b'_1, \ldots, b'_r$ corrispondenti nelle ω_{ij} appartengono ad un medesimo S_{2r-2}.

Proviamo infine che lo spazio congiungente $r+1$ rette generiche $b_0, b_1, \ldots, b_r$, corrispondenti nelle Ω_{ij}, è un S_{2r} (cioè che due S_r generici del Σ_r^* sono incidenti).

Infatti, se lo spazio congiungente le rette $b_1, \ldots, b_r$ è un S_{2r-2}, lo spazio congiungente b_0 con questo S_{2r-2} ha la dimensione $2r$; e la proprietà è dimostrata. Se lo spazio congiungente $b_1, \ldots, b_r$ è un S_{2r-1}, poichè dall' $S_r^{(0)}$ esso si proietta nell' S_{2r-2} delle rette $b'_1, \ldots, b'_r$, esso ha in comune coll' $S_r^{(0)}$ un punto. Questo punto appartiene alla retta b_0, (³), cioè lo spazio congiungente b_0 coll' S_{2r-1} ha ancora la dimensione $2r$, c. v. d.

8. – Facciamo vedere che *il sistema Σ_r^* del n. 7 coincide col sistema Σ_r del n. 4.* Perciò prendiamo nell' $S_r^{(0)}$ del Σ_r^* un

(²) La proprietà che l' S_{2r}^* abbia in comune coll' $S_r^{(i)}$ *soltanto* la retta b_i^* è vera per $r = 2$ (un S_4^* dell' S_5 avendo in comune con un S_2 soltanto un S_1). Se essa non fosse vera per $r > 2$, per proiezione dall' $S_r^{(0)}$ sull' S_{N-r-1} risulterebbe non vera per $r-1$, ciò che è assurdo.

(³) Poichè l' S_{2r}, congiungente le rette $b_0, b_1, \ldots, b_r$ ha in comune coll' $S_r^{(i)}$ *soltanto* la retta b_i (cfr. nota (²)).

generico $S^{(0)}_{r-1}$ e proviamo che gli ∞^{r-1} S_r del Σ^*_r, diversi dall'$S^{(0)}_r$, che si appoggiano all'$S^{(0)}_{r-1}$, appartengono ad un iperpiano dell'S_N (cioè $\Sigma^*_r = \Sigma_r$).

Infatti, per r punti generici $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_r$ dell'$S^{(0)}_{r-1}$ passano rispettivamente r spazi $\overline{S}^{(1)}_r, \ldots, \overline{S}^{(r)}_r$ del Σ^*_r, i quali sono r spazi ganerici di questo sistema. Questi r spazi sono linearmente indipendenti, poichè i loro $\frac{r(r-1)}{2}$ punti d'incontro a due a due, gli r punti $\overline{P}_i$ ed r punti $\overline{P}_{ii}$ (scelti ciascuno genericamente sul rispettivo $\overline{S}^{(i)}_r$) sono complessivamente N punti linearmente indipendenti: come si vede facendo tendere $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_r$ ai punti $P_{01}, \ldots, P_{0r}$ ed osservando che gli spazi $\overline{S}^{(i)}_r$ hanno come limiti gli spazi $S^{(i)}_r$, per i quali gli N punti P_{ij}, P_{0i}, P_{ii}, limiti degli N punti sopra considerati, sono indipendenti. Quegli N punti linearmente indipendenti individuano l'S_{N-1}, al quale gli $\overline{S}^{(i)}_r$ appartengono.

Uno spazio di Σ^*_r che si appoggia in un punto $\overline{P}$ all'$S^{(0)}_{r-1}$ incontra quegli r spazi in punti che, assieme a $\overline{P}$, formano $r+1$ punti indipendenti. Infatti, facendo tendere $\overline{P}$ a P_{01}, si osserva che gli r punti $P_{11}, \ldots, P_{r1}$, relativi agli spazi $S^{(1)}_r, \ldots, S^{(r)}_r$, e il punto $\overline{P} = P_{01}$ sono indipendenti. L'S_r di Σ^*_r per $\overline{P}$, avendo in comune coll'S_{N-1} $r+1$ punti indipendenti, appartiene all'S_{N-1}, c. v. d.

9. - La condizione posta colle (2) alle omografie Ω_{ij} che, fisso essendo i, ai diversi punti P_{ij} corrisponda il solo punto P_{ii} equivale alla condizione che lo spazio $S^{(i)}_r$ faccia parte del sistema $\Sigma_r = \Sigma^*_r$. Possiamo quindi riassumere i risultati di questa Nota nel seguente modo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè siano a due a due incidenti gli spazi S_r d'un sistema Σ_r, ∞^r, dell'$S_{\frac{r(r+3)}{2}}$, i quali segano su $r+1$ spazi generici $S^{(i)}_r$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$, a due a due incidenti, punti che si corrispondono in omografie Ω_{ij} tra le varie coppie $S^{(i)}_r$, $S^{(j)}_r$, è che gli spazi $S^{(i)}_r$ appartengano al Σ_r ed inoltre

I) *gli* $S_{r-1}^{(j)}$ *corrispondenti nelle* Ω_{ij} *d'un* $S_{r-1}^{(i)}$ *dell'* $S_r^{(i)}$ *appartengano, assieme all'* $S_{r-1}^{(i)}$, *ad un medesimo iperpiano;*

II) *oppure due ulteriori spazi* S_r *del* Σ_r *siano incidenti.*

Il sistema Σ_r *genera la varietà minima* V_{2r} *che rappresenta, senza eccezioni, le coppie non ordinate di punti d'un* S_r.

(*Pervenuto in Redazione il 30 Gennaio 1942-XX*)