RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Criteri d'unicità per gli integrali d'un sistema di equazioni differenziali ordinarie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 11 (1940), p. 90-96

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__90_0>

CRITERI D'UNICITÀ PER GLI INTEGRALI D'UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE.

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER *a Padova.*

Alla determinazione di criteri sufficienti a garantire l'unicità delle soluzioni del problema dei valori iniziali per un sistema di equazioni differenziali ordinarie, ho dedicato di recente una Memoria (1). In essa mi sono proposto, limitandomi a considerare le cose nel campo delle funzioni continue, di estendere un teorema già dato per una equazione differenziale da SCORZA DRAGONI (2). Tale Autore ha però formulato diversi teoremi relativi ad equazioni differenziali a secondo membro discontinuo; e di questi uno (3) comprende sia tutti i criteri dati dallo SCORZA

(1) G. ZWIRNER: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un sistema di equazioni differenziali* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 1 (1936-1937), pp. 235-252].

(2) G. SCORZA DRAGONI: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di una equazione differenziale* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1930), pp. 430-444].

Per altre notizie bibliografiche rimando alle due Memorie fin' ora citate ed ai lavori seguenti: H. OKAMURA: *Sur l'approximation successive e l'unicité de la solution de* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ [Mem. Coll. Sci. Kyôto Univ., ser. A (1931), pp. 85-96]; M. NAGUMO: *Über das Verfahren der sukzessiven Approximationen zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichung und die Eindeutigkeit ihrer Integrale* [Japanese Journal of Mathematics, vol. VII, (1930), pp. 143-160]; T. SATÔ: *Contribution à l'unicité de la solution d'une équation différentielle ordinaire* [Japanese Journal of Mathematics, vol. XIII, (1936), pp. 1-6]; G. SCORZA DRAGONI: *A proposito di un teorema di Rosenblatt* [Rendiconti dei Lincei, serie VI, vol. XIV (1931), pp. 7-11].

(3) SCORZA DRAGONI, loc. cit. (2), pp. 447-448.

DRAGONI che quelli di OSGOOD (4), ROSENBLATT (5) e TONELLI (6). Quanto ho fatto nel lavoro citato in (1) si può ripetere, pari passo, anche in queste condizioni più generali. Per questa via, tenendo presenti i criteri dati nella mia Memoria, è facile dedurre teoremi che trasportano ai sistemi la proposizione più generale, sopra ricordata, di SCORZA DRAGONI. Essi comprendono naturalmente l'estensione ai sistemi del teorema di TONELLI data recentemente da L. GIULIANO (7).

1. Sieno

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots\ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

n funzioni reali delle variabili reali $x, y_1, \ldots, y_n$ definite nel dominio

$$D: \overline{x} \leq x \leq b, \quad |y_i - \overline{y}_i| \leq \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

e si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$(1) \qquad \begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Sieno inoltre

(4) OSGOOD: *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Canchy - Lipschitzschen Bedingung* [Monatshefte für Mathematik und Physik, 9 (1898), pp. 331-345].

(5) ROSENBLATT: *Ueber die Existenz von Integralen gewönlicher Differentialgleichungen* [Arckiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 1908, t. 5]. Vedi anche: ROSENBLATT: *Sull' unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie VI, vol. VIII (1925), pp. 41-45].

(6) TONELLI: *Sull' unicità della soluzione di un' equazione differenziale ordinaria* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie VI, vol. 1 (1925), pp. 272-277].

(7) L. GIULIANO: *Sull' unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie* [Bollettino della U. M. I., serie II, (1940), pp. 221-227].

$$y_1(x), \ldots, y_n(x),$$
$$Y_1(x), \ldots, Y_n(x),$$

quasi ovunque in $\overline{x} \leq x \leq b$, due soluzioni del sistema (1) uscenti dal punto $(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ continue in $\overline{x} \leq x \leq b$ e assolutamente continue per $x > \overline{x}$.

Per ogni coppia di punti distinti $(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$, $(x, Y_1, (x), \ldots, Y_n(x))$ supponiamo verificata la diseguaglianza

$$(2) \quad \sum_1^n{}_i\, \omega_i\, [y_1(x) - Y_1(x), \ldots, y_n(x) - Y_n(x)] \left\{ f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) - \right.$$
$$\left. - f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x)) \right\} \leq \varphi(x),$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione definita nel segmento $\overline{x} \leq x \leq b$ e sommabile in ogni intervallo del tipo $\overline{x} + h \leq x \leq b \, (\overline{x} < \overline{x} + h < b)$, e le $\omega_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sono funzioni continue, definite per ogni valore di $u_1, \ldots, u_n$, eccezione fatta per $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$. Supponiamo inoltre che esistano un numero intero positivo pari p e un numero reale $\alpha > 0$ tale che, fissato a piacere il numero positivo ε, si possano determinare i due numeri

$$(3) \qquad \delta \geq 0, \quad \delta_1 > 0$$

in modo che sia

$$(4) \qquad \overline{x} + \delta < b, \quad \delta_1 < \varepsilon$$

e che si abbia

$$(5) \qquad \left\{ [y_1(x) - Y_1(x)]^p + \ldots . + [y_n(x) - Y_n(x)]^p \right\}^\alpha < \delta_1$$

per ogni $x \geq \overline{x}$ e $\leq \overline{x} + \delta$, e

$$(6) \qquad \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\, dx < \int_c \sum_1^n{}_i\, \omega_i(u_1, \ldots, u_n)\, du_i$$

per ogni coppia di punti $a_1, a_2 \, (a_1 < a_2)$ dell' intervallo $\overline{x} + \delta < x \leq b$ e per ogni curva continua e rettificabile c dello spazio $u_1, \ldots, u_n$, non passante per l'origine, e congiungente un punto dell'ipersuperficie

$$(7) \qquad (u_1^p + \ldots + u_n^p)^\alpha = \delta_1$$

con un punto dell'ipersuperficie

$$(8) \qquad (u_1^p + \ldots + u_n^p)^\alpha = \varepsilon .$$

In tali ipotesi riesce

$$y_1(x) = Y_1(x), \ldots, y_n(x) = Y_n(x),$$

in tutto $\bar{x} \leq x \leq b$.

Posto

$$u_i(x) = y_i(x) - Y_i(x), \quad u(x) = \{[u_1(x)]^p + \ldots + [u_n(x)]^p\}^\alpha$$

e fissato un numero positivo arbitrario ε, si determinino δ e δ_1 in modo da soddisfare alle (3), (4), (5) e (6). Per provare il teorema enunciato basterà, evidentemente, far vedere che, nelle ipotesi fatte, è $u(x) < \varepsilon$ in tutto l'intervallo $\bar{x} + \delta < x \leq b$. A tale scopo supponiamo, se possibile, che in un certo punto ξ $(\bar{x} + \delta < \xi \leq b)$ sia $u(\xi) = \varepsilon$ e poniamo $\bar{\xi} = \bar{x} + \delta$ se nell'intervallo $\bar{x} + \delta \leq x \leq \xi$ la funzione $u(x)$ non si annulla mai; in caso contrario indichiamo con $\bar{\xi}$ il massimo punto, certamente esistente, dell'intervallo $\bar{x} + \delta \leq x \leq \xi$, dove $u(x)$ si annulla. Sarà in ogni caso $u(\bar{\xi}) < \delta_1$. Indichiamo ora con ξ_1 un punto dell'intervallo $\bar{\xi} \leq x \leq \xi$ dove risulta $u(\xi_1) = \delta_1 (\bar{x} < \xi_1)$. Quasi ovunque in $\xi_1 \leq x \leq \xi$ sarà, per la (2),

$$\sum_1^n {}_i \omega_i \{ u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x) \} u_i'(x) \leq \varphi(x),$$

da cui si deduce

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \sum_1^n {}_i \omega_i \{ u_1(x), \ldots, u_n(x) \} u_i'(x)\, dx \leq \int_{\xi_1}^{\xi} \varphi(x)\, dx,$$

ossia, dato che in $\xi_1 \leq x \leq \xi$ le $u_i(x)$ sono assolutamente continue,

$$\int_c \sum_1^n {}_i \omega_i (u_1, \ldots, u_n)\, du_i \leq \int_{\xi_1}^{\xi} \varphi(x)\, dx,$$

dove c indica l'arco di curva rettificabile di equazioni $u_1 = u_1(x), \ldots, u_n = u_n(x)$ per $\xi_1 \leq x \leq \xi$. Ma c congiunge un punto della ipersuperficie (7) con un punto della ipersuperficie (8); e quindi ci troviamo in contraddizione con la (6).

2. Se le funzioni $f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$ sono definite nel dominio

$$a \leq x \leq \overline{x}, \quad |y_i - \overline{y}_i| \leq \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

vale allora, evidentemente, un criterio di unicità analogo a quello del n. 1 e relativo agli integrali $y_1(x), \ldots, y_n(x)$; $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ del sistema (1) definiti nell'intervallo $a \leq x \leq \overline{x}$ e uscenti dal punto $(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$. Basterà, invece della (2), supporre verificata, nell'intervallo $a \leq x \leq \overline{x}$ e per ogni coppia di punti distinti $(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$, $(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x))$, la diseguaglianza

$$\sum_1^n {}_i \omega_i [y_1(x) - Y_1(x), \ldots, y_n(x) - Y_n(x)] \{ f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) - \\ - f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x)) \} \geq \varphi_1(x),$$

dove le ω_i hanno il significato chiarito nel n. 1 e la $\varphi_1(x)$ è definita in $a \leq x \leq \overline{x}$ e sommabile in ogni intervallo del tipo $a \leq x \leq \overline{x} - h$ $(a < \overline{x} - h < \overline{x})$, ed ammettere inoltre che, fissato a piacere il numero positivo ε, si possano determinare i due numeri $\delta \geq 0$ e $\delta_1 > 0$ in modo tale che sia

$$a < \overline{x} - \delta, \quad \delta_1 < \varepsilon$$

e che si abbia

$$\{[y_1(x) - Y_1(x)]^p + \ldots + [y_n(x) - Y_n(x)]^p\}^\alpha < \delta_1, \quad (\overline{x} - \delta \leq x \leq \overline{x});$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi_1(x)dx < \int_c \sum_1^n {}_i \omega_i(u_1, \ldots, u_n)du_i,$$

per ogni coppia di punti a_1, $a_2 (a_1 > a_2)$ dell'intervallo $a \leq x < < \overline{x} - \delta$ e per ogni arco di curva continua e rettificabile c soddisfacente alle condizioni enunciate nel numero precedente.

3. Se si cerca di soddisfare alle ipotesi del n. 1 con funzioni del tipo

$$\omega_i(u_1, \ldots, u_n) = \frac{u_i^{p-1}}{\omega\left[(u_1^p + \ldots + u_n^p)^\alpha\right]},$$

con ω positiva per valori positivi dell'argomento, allora la condizione (6) si trasforma nella

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\,dx < \frac{1}{p}\int_{\delta_1^{1/\alpha}}^{\varepsilon^{1/\alpha}} \frac{dv}{\omega(v^\alpha)}, \quad (\overline{x} + \delta < a_1 < a_2 \leq b);$$

ed in tal modo si ottiene un criterio che contiene, come caso particolare, quello dimostrato da L. Giuliano [8].

Osservazione. Se le funzioni $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ sono definite nel dominio

$$a \leq x \leq b, \quad |y_i - \overline{y}_i| \leq \beta \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

dai teoremi dei n. 1 e 2 si deduce agevolmente un criterio d'unicità, per gli integrali del sistema (1) uscenti dal punto

(8) Loc. cit. (7). Il criterio di tale A. si ottiene ponendo $p = 2, \alpha = 1$ e supponendo inoltre $\lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\delta_1}^{\varepsilon} \frac{dv}{\omega(v)} = +\infty$ e che esista finito il

$$\lim_{x_1 \to \overline{x}} \int_{x_1}^{b} \varphi(x)\,dx.$$

$(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, $(a < \bar{x} < b)$, supponendo soddisfatta una opportuna diseguaglianza del tipo

$$\sum_1^n {}_i \frac{|y_i - Y_i|^{q-1}}{\omega\left[\left\{\sum_1^n {}_r |y_r - Y_r|^q\right\}^\alpha\right]} |f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)| \leq \varphi(x),$$

dove α e q sono *entrambi* numeri reali positivi [9].

[9] Cfr. la mia Memoria citata in [1], pp. 244-252.

(Pervenuto in Redazione il 24 aprile 1940 - XVIII)