RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

# Sulla razionalità dell'ipersuperficie cubica generale dello spazio lineare $S_5$

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 11 (1940), p. 108-112

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1940__11__108_0>

# SULLA RAZIONALITÀ DELL' IPERSUPERFICIE CUBICA GENERALE DELLO SPAZIO LINEARE $S_5$

*Nota di* Ugo Morin *a Padova.*

**Sunto.** — *La razionalità dell' ipersuperficie cubica generale $V_4^{(3)}$ dello spazio lineare $S_5$ risulta dall' esistenza nella $V_4^{(3)}$ di una superficie rigata razionale normale del quarto ordine, al cui insieme (razionale) delle corde i punti della $V_4^{(3)}$ sono biunivocamente riferiti.*

**1.** - Supponiamo che in un' ipersuperficie cubica irriducibile $V_4^{(3)}$ dello spazio lineare $S_5$ sia contenuta una superficie algebrica $F$, del quarto ordine, rigata razionale normale. Poichè per un punto generico dell' $S_5$ passa una, ed una sola, corda della $F$, i punti della $V_4^{(3)}$ risultano riferiti biunivocamente alle corde della $F$, cioè la $V_4^{(3)}$ è *razionale.*

**2.** - Ora proponiamoci di dimostrare che nell' ipersuperficie cubica *generale* $V_4^{(3)}$ dell' $S_5$ sono contenute delle superficie $F$. Consideriamo perciò il sistema delle rigate razionali normali del quarto ordine, $F_2^{(4)}$, dell' $S_5$ che hanno come curve direttrici di ordine minimo $\infty^1$ coniche (1). Una di queste rigate è rappresentata su di un piano $\pi$ dal sistema lineare delle cubiche $|C^{(3)}|$ con un punto-base doppio e un punto-base semplice; ed essa è generata dalle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti in una proiettività tra due coniche generiche dell' $S_5$.

(1) E. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [G. Principato, Messina 1923], pagg. 355-368.

Poichè due sistemi lineari di cubiche $|C^{(3)}|$ sono cremonianamente (anzi omograficamente) equivalenti, due generiche superficie $F_2^{(4)}$ si corrispondono in un'omografia dell' $S_5$, cioè le $F_2^{(4)}$ a coniche direttrici formano un unico sistema algebrico (irriducibile) $\Phi$.

Calcoliamo la dimensione $D$ di questo sistema $\Phi$ (doppia della dimensione del sistema delle coniche dell' $S_5$, aumentata della dimensione 3 del sistema delle proiettività tra due coniche, e diminuita di 2 per il fatto che abbiamo considerate due arbitrarie delle $\infty^1$ coniche della $F_2^{(4)}$), cioè

$$(1) \qquad D = 2[(5-2)3+5]+3-2=29\,.$$

Dunque: Le rigate $F_2^{(4)}$ dell' $S_5$, a coniche direttrici, formano un sistema algebrico irriducibile $\Phi$ di dimensione $D=29$, (²).

**3.** - Consideriamo nell' $S_5$ due piani (non incidenti) $\sigma$ e $\sigma'$ e una determinata omografia (non degenere) $\Omega$ tra questi due piani. Le rette che congiungono i punti di una conica $C^{(2)}$ del piano $\sigma$ coi punti corrispondenti in $\Omega$ nel piano $\sigma'$ generano una $F_2^{(4)}$ (n. 2). Al variare di $C^{(2)}$ in $\sigma$ si ottiene in questo modo un sottosistema di $\Phi$ (n. 2). Se la $C^{(2)}$ si spezza in due rette (del piano $\sigma$), la $F_2^{(4)}$ corrispondente si scinde in due quadriche con una generatrice comune.

In conclusione: Del sistema $\Phi$ di $F_2^{(4)}$ (dipendenti da $D=29$ parametri) fa parte il sistema $\varphi$ delle coppie di quadriche con una generatrice comune (dipendenti, come si verifica facilmente, da $d=28$ parametri).

**4.** - Il sistema lineare di tutte le ipersuperficie cubiche $V_4^{(3)}$ dell' $S_5$ ha la dimensione $R=\binom{5+3}{3}-1=55$. Questo sistema determina su una $F_2^{(4)}$ un sistema lineare di curve $|C^{(12)}|$, triplo del sistema delle sezioni iperpiane dell' $F_2^{(4)}$. Il genere $\pi'$

(²) Ciò segue anche dall' osservazione che le omografie dell' $S_5$ dipendono da 35 parametri e che una $F_2^{(4)}$ è mutata in se da $\infty^6$ omografie.

e il grado $n'$ di questo sistema di $|C^{(12)}|$ sono quindi

$$(2) \qquad \begin{cases} \pi' = 3n - 2 = 3 \,.\, 4 - 2 = 10 \\ n' = 3^2 n = 9 \,.\, 4 = 36 \,; \end{cases}$$

e poichè questo sistema lineare di $C^{(12)}$ è *completo*, la sua dimensione è $r' = n' - \pi' + 1 = 27$, ([3]). Cioè: Condizione necessaria e sufficiente affinchè una $V_4^{(3)}$ dell' $S_5$ contenga una $F_2^{(4)}$ è che essa passi per 28 punti generici dell' $F_2^{(4)}$.

5. - Verifichiamo il seguente **lemma I** : *Per due $F_2^{(4)}$ generiche dell' $S_5$ non passa alcuna ipersuperficie cubica $V_4^{(3)}$* (cioè 28 punti generici di una $F_2^{(4)}$ e 28 dell'altra pongono alle $V_4^{(3)}$ 56 condizioni indipendenti (n. 4)).

Perciò basterà verificare che per due *particolari* di quelle superficie non passa alcuna $V_4^{(3)}$. Consideriamo due superficie, $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$ riducibili del sistema $\varphi$ (n. 3). Indichiamo non $\alpha$, $\beta$ e $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ gli spazi lineari $S_3$ delle coppie di quadriche $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$. Queste quadriche (e quegli spazi $S_3$) siano in posizione generica. Una $V_4^{(3)}$ che contenesse $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$ avrebbe in comune con lo spazio $\alpha$ la quadrica dell' $F_2^{(4)}$ relativa ad $\alpha$ e i 4 punti generici comuni allo spazio $\alpha$ e alla $\overline{F}_2^{(4)}$, cioè la $V_4^{(3)}$ conterrebbe totalmente lo spazio $\alpha$. Per analogo motivo la $V_4^{(3)}$ dovrebbe contenere gli altri spazi lineari $S_3$, $\beta$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$. Ma è facile vedere che i 4 spazi lineari $S_3$ generici $\alpha$, $\beta$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ non possono appartenere ad una $V_4^{(3)}$. Infatti un $S_4$ generico per $\alpha$ taglierebbe ulteriormente la $V_4^{(3)}$ in un' iperquadrica $Q_3$ dell' $S_4$ che dovrebbe contenere tre piani generici (la sezioni degli spazi $\beta$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ coll' $S_4$), ciò che manifestamente non è possibile ([4]).

([3]) Infatti il sistema $|C^{(12)}|$ determina su una $C^{(4)}$-sezione della $F_2^{(4)}$ la serie $g_{12}^{12}$ (triplo *minimo* della $g_4^4$). Una $C^{(12)}$ che contiene (cioè si spezza in) 3 curve $C^{(4)}$ soddisfa a $(12+1)+(8+1)+(4+1)=27$ condizioni; cioè la dimensione di $|C^{(12)}|$ è 27 (e non meno).

([4]) Infatti un' iperquadrica dell' $S_4$ che contenga dei piani è singolare. Se essa è un cono, quei piani devono passare per un punto (o per una retta); e se essa è degenere almeno due di tre dei suoi piani devono stare in un medesimo $S_3$.

**6.** – Verifichiamo ora il seguente **lemma II**: *Se due superficie $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$ hanno un punto in comune, esse appartengono in generale ad una, ed una sola, $V_4^{(3)}$.*

Almeno una di tali $V_4^{(3)}$ esiste certamente, poichè essa deve soddisfare (n. 4) al più a $2.28 - 1 = 55$ condizioni linearmente indipendenti. Per provare che ne esiste una soltanto, basterà verificare che due opportune superficie $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$, con un punto in comune, appartengono ad una sola $V_4^{(3)}$. Scegliamo le due superficie riducibili del n. 5, i cui spazi lineari $S_3$ associati $\alpha$, $\beta$ e $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ siano ancora in posizione generica, ma la quadrica $Q_2$ di $\alpha$ e la quadrica $\overline{Q}_2$ di $\overline{\alpha}$ abbiamo un punto in comune (e non vi siano altre particolarità). Una $V_4^{(3)}$, contenente queste due superficie riducibili, contiene totalmente gli spazi $\beta$ e $\overline{\beta}$ (n. 5); ed invece è segata dallo spazio $\alpha$ secondo la quadrica $Q_2$ e il determinato piano che passa per i 3 punti d'incontro di $\alpha$ coll' $\overline{F}_2^{(4)}$, diversi dal punto comune a $Q_2$ e $\overline{Q}_2$.

Ora se vi fossero due (e quindi un fascio di) $V_4^{(3)}$ per queste due superficie $F_2^{(4)}$ e $\overline{F}_2^{(4)}$, poichè l'intersezione della $V_4^{(3)}$ generica del fascio collo spazio $\alpha$ è fissa, una $V_4^{(3)}$ particolare del fascio dovrebbe contenere totalmente lo spazio $\alpha$. Ma questa particolare $V_4^{(3)}$ dovrebbe contenere totalmente anche lo spazio $\overline{\alpha}$ (avendo con esso in comune la $\overline{Q}_2$, due punti generici e la retta intersezione di $\overline{\alpha}$ con $\alpha$); cioè verrebbe a contenere tutti i 4 spazi $\alpha$, $\beta$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, ciò che abbiamo visto essere assurdo (n. 5).

**7.** – Rappresentiamo le $V_4^{(3)}$ dell' $S_5$ mediante i punti di uno spazio lineare $S_{55}$ (n. 4). Alle $V_4^{(3)}$ per una $F_2^{(4)}$ generica corrispondono nell' $S_{55}$ i punti di uno spazio lineare $S_{27}$ (n. 4). Abbiamo così nell' $S_{55}$ un sistema algebrico irriducibile $\Sigma$ di spazi $S_{27}$, dipendenti da $D = 29$ parametri (n. 2).

Se per un punto generico dell' $S_{55}$ passano $\infty^1$ spazi $S_{27}$ del sistema $\Sigma$, ciò significa che una $V_4^{(3)}$ generica dell' $S_5$ contiene $\infty^1$ rigate $F_2^{(4)}$ (*e quindi essa è razionale* (n. 1)).

**8.** – Se questa circostanza non si verifica, i punti degli $\infty^{29}$ spazi $S_{27}$ del sistema $\Sigma$ formano una varietà algebrica irriducibile $W_{55-\lambda}$ (di dimensione $55-\lambda$; $\lambda \geq 1$), e per un punto generico di questa $W_{55-\lambda}$ passano $\infty^{\lambda+1}$ spazi $S_{27}$.

Se due $S_{27}$ di $\Sigma$, aventi un punto in comune, si tagliano di conseguenza in un $S_\rho$ ($\rho \geq 0$), deve essere $27+(\lambda+1)-\rho \leq 29$, cioè

$$\rho \geq \lambda - 1. \tag{3}$$

Se nella (3) vale il segno $=$, un $S_{27}$ generico di $\Sigma$ incontra tutti gli altri $S_{27}$ di $\Sigma$, quindi due $S_{27}$ generici di $\Sigma$ si tagliano in un $S_{\lambda-1}$. Ciò significa che due $F_2^{(4)}$ generiche dell'$S_5$ apparterrebbero ad $\infty^{\lambda-1}$, ($\lambda-1 \geq 0$), ipersuperficie $V_4^{(3)}$, in contrasto col lemma I (n. 5).

Se nella (3) vale il segno $>$, due $S_{27}$ di $\Sigma$ con un punto in comune hanno di conseguenza in comune uno spazio lineare $S_\rho$ ($\rho \geq \lambda \geq 1$). Ciò significa che due $F_2^{(4)}$ dell'$S_5$ con un punto in comune (quindi appartenenti ad una $V_4^{(3)}$), dovrebbero di conseguenza appartenere ad $\infty^\rho$ ($\rho \geq 1$) $V_4^{(3)}$, in contrasto col lemma II (n. 6). Dunque l'unica circostanza possibile per gli $S_{27}$ del sistema $\Sigma$ è quella del n. 7, cioè *l'ipersuperficie cubica generale dell'$S_5$ è razionale.*

---

*(Pervenuto in Redazione il 10 agosto 1940-XVIII)*