RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. SCORZA DRAGONI

A proposito di un teorema sulle equazioni differenziali ordinarie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 10 (1939), p. 90-100

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__90_0>

A PROPOSITO DI UN TEOREMA SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Nota di G. Scorza Dragoni (*a Padova*).

In questa Nota ritorno brevemente su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, problema che, scritto sotto forma integrale, si traduce nel dimostrare l'esistenza di una funzione $y(x)$ soddisfacente alla

$$(1)\qquad \begin{aligned} y(x) = {} & \int_a^x dt \int_a^t f(u,\ y(u),\ y'(u))\, du + \\ & + \frac{1}{b-a} \left\{ \left[\int_a^b dt \int_a^t f(u,\ y(u),\ y'(u))\, du - \beta \right] (a-x) + (b-x)\, \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Suppongo $f(x,\ y,\ y')$ continua rispetto a $(y,\ y')$ e misurabile rispetto ad x nell'insieme

$$C: a \leq x \leq b,\quad \sigma(x) \leq y \leq \tau(x),\quad -\infty < y' < +\infty \text{ [1]};$$

e intendo l'integrazione nel senso di Lebesgue. Sicchè $y(x)$ dovrà essere una funzione assolutamente continua nell'intervallo

$$i: a \leq x \leq b$$

[1] Ricordo che allora $f(x,\ p(x),\ q(x))$ è misurabile in i, se $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni misurabili (e finite) in i, con $\sigma(x) \leq p(x) \leq \tau(x)$; e ciò almeno finchè $\sigma(x) < \tau(x)$ - se non si fa questa ipotesi $f(x,\ \sigma(x),\ \sigma'(x))$ e $f(x,\ \tau(x),\ \tau'(x))$, p. es., potrebbero non esser misurabili (naturalmente la costruzione, non difficile, di un esempio adatto richiede il postulato di Zermelo, sfruttato in questo lavoro anche attraverso l'uso di teoremi sulle funzioni misurabili).

insieme con la $y'(x)$, e soddisfare ivi alle

$$\sigma(x) \leq y(x) \leq \tau(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

e, quasi ovunque, alla

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)).$$

In proposito io ho dimostrato (²) che:

Fermo quanto s' è detto e supposto naturalmente $\sigma(a) \leq \leq \alpha \leq \tau(a)$, $\sigma(b) \leq \beta \leq \tau(b)$, *il problema è risolubile, se*

I) *in* C *riesce*

$$|f(x, y, y')| \leq \omega(y') + \chi(x), \tag{2}$$

con $\chi(x) \geq 0$ *sommabile in* i, $\omega(u) > 0$ *continua per* $|u| < +\infty$ *e verificante le*

$$\omega(u) > |u|, \quad \int_0^{+\infty} \frac{u}{\omega(u)} du = \int_0^{-\infty} \frac{u}{\omega(u)} du = +\infty;$$

e se

II) *le funzioni* $\sigma(x) < \tau(x)$ *hanno derivate (finite e) continue in* i *e le*

$$\sigma'(x) - \int_a^x f(u, \sigma(u), \sigma'(u)) du, \qquad \int_a^x f(u, \tau(u), \tau'(u)) du - \tau'(x)$$

sono non decrescenti ivi;

ed ho riconosciuto (³) che:

La condizione $\omega(u) > |u|$ *è superflua, se* $\chi(x)$ *si annulla identicamente in* i.

Quest' ultima circostanza si può ritenere verificata per poco che $\chi(x)$ sia quasi ovunque nulla in i (eventualmente basterà

(²) G. Scorza Dragoni, *Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti* [Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, serie 6, vol. 28 (1938), pp. 317-325], n. 2.

(³) Loc. cit. nota prec.

modificare $f(x, y, y')$ in una porzione di C contenuta in un insieme di misura nulla costituito da piani normali all'asse x).

Successivamente ZWIRNER ha riconosciuto che la (2) può essere sostituita dalla

$$(3) \qquad |f(x, y, y')| \leq \varphi(y)\,\omega(y') + \chi(x),$$

in cui $\omega(y')$ e $\chi(x)$ hanno lo stesso significato di prima e $\varphi(y) \geq 0$ è sommabile in ogni intervallo limitato. In tal caso però si è indotti a fare qualche altra ipotesi sulla $f(x, y, y')$ – implicite nella (3) quando $\varphi(y) = 1$, cioè quando è soddisfatta la (2). Precisamente, in un primo lavoro ZWIRNER ha supposto $f(x, y, y') = \gamma(x, y, y') + \gamma_1(x, y, y')$, con $|\gamma(x, y, y')|$ limitata in ogni regione limitata di C e $|\gamma_1(x, y, y')| \leq \chi_1(x)$, con $\chi_1(x) \geq 0$ e sommabile in i [4]; e in un lavoro successivo [5] egli ha dimostrato che:

La conclusione del teorema enunciato all' inizio rimane inalterata se, fermo il resto e sostituita la (2) *con la* (3), *si ammette che da* $|y'| \leq h$ *segua*

$$|f(x, y, y')| \leq \psi_h(x),$$

con $\psi_h(x) \geq 0$, *sommabile in* i *e dipendente dal numero arbitrario* h.

Lo stesso teorema è stato trovato anche dal CINQUINI [6].

Nei riguardi della possibilità di eliminare la $\omega(u) > |u|$,

[4] G. ZWIRNER, *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Roma, serie 4, vol. 3 (1939), pp. 57-70].

Veramente in questo lavoro ZWIRNER suppone inoltre che $f(x, y, y')$ soddisfaccia, rispetto a y e y', a una condizione di LIPSCHITZ generalizzata in ogni sottoinsieme limitato di C.

[5] G. ZWIRNER, *Un criterio di esistenza per un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Padova, vol. 10 (1939), pp. 55-64], nn. 1-3.

[6] S. CINQUINI, *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. VIII (1939), pp. 271-283], n. 2.

Zwirner ha dimostrato che, nelle sue ipotesi *la* $\omega(u) > |u|$ *è superflua, se* $\chi(x) \equiv 0$ *e se* $f(x, y, y')$ ***è limitata in ogni regione limitata di*** C (7). Invece secondo il Cinquini *lo stesso si può dire se* $\chi(x)$, $f(x, \sigma(x), \sigma'(x))$ *e* $f(x, \tau(x), \tau'(x))$ *sono nulle in* i (8).

Orbene io mi propongo di far vedere che *anche in queste ipotesi più generali, la* $\omega(x) > |u|$ *è superflua non appena sia* $\chi(x) \equiv 0$.

Vale a dire :

La (1) *è risolubile se, ferme restando le altre ipotesi del primo teorema enunciato, si sostituisce la* I) *con le*

1) *da* $|y'| \leq h$ *segue*

$$|f(x, y, y')| \leq \psi_h(x),$$

dove $\psi_h(x)$, *non negativa e sommabile in* i, *dipende dal numero arbitrario* h *;*

2) *in* C *riesce*

$$|f(x, y, y')| \leq \varphi(y)\,\omega(y'),$$

con $\varphi(y) \geq 0$ *e sommabile in ogni intervallo limitato,* $\omega(u)$ *sempre positiva, continua e tale che*

$$\int_0^{-\infty} \frac{u}{\omega(u)}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{u}{\omega(u)}\,du = +\infty.$$

Come ho già fatto pel teorema precedente, dimostrerò questo prima sotto un'ipotesi restrittiva, che eliminerò poi approssimando convenientemente la $f(x, y, y')$.

Precisamente, in un primo tempo oltre alle condizioni già dette ammetterò che $f(x, y, y')$ *soddisfaccia, rispetto a* y', *a*

(7) Loc. cit. (5), n. 4 (cfr. anche loc. cit. (4), prefazione).

(8) Loc. cit. (6), n. 3. Ad un esame superficiale della dimostrazione, sembra che le $f(x, \sigma(x), \sigma'(x))$, $f(x, \tau(x), \tau'(x))$ si sarebbero potute supporre soltanto limitate in i.

una condizione locale di continuità uniforme generalizzata lungo le curve $y = \sigma(x)$, $y' = \sigma'(x)$ *e* $y = \tau(x)$, $y' = \tau'(x)$; vale a dire, che esista un numero positivo δ, tale che, per $|\sigma'(x) - y'| < \delta$, $|\tau'(x) - y'| < \delta$ sia rispettivamente (quasi ovunque) in i.

$$(4)\qquad \begin{aligned} &|f(x, \sigma(x), \sigma'(x)) - f(x, \sigma(x), y')| \leq \lambda(x)\,\mu(\sigma'(x) - y'), \\ &|f(x, \tau(x), \tau'(x)) - f(x, \tau(x), y')| \leq \lambda(x)\,\mu(\tau'(x) - y'), \end{aligned}$$

dove $\lambda(x) \geq 0$ è sommabile in i, mentre $\mu(v)$, positiva per $0 < |v| \leq \delta$ è infinitesima con v e nulla per $v = 0$ [9].

Anche qui, come in altri miei lavori similari, giungo al risultato prolungando l'equazione e dimostrando che un integrale dell'equazione prolungata, il quale verifichi le condizioni al contorno, esiste di certo e soddisfa anche alla (1). Ma non è naturalmente escluso che allo stesso risultato si possa pervenire senza uscire dall'insieme C, sulla traccia, p. es., di quanto lo ZWIRNER ha fatto nel lavoro citato in [4], ispirandosi a un altro mio ragionamento.

Il procedimento che seguo non lascia nulla a desiderare dal punto di vista della semplicità [10].

I ragionamenti nella loro sostanza coincidono con quelli che ho svolti nei miei lavori citati.

Implicitamente, essi dànno anche una dimostrazione del teorema in discorso nell'ipotesi che valga la (3), con $\omega(u) > |u|$.

1. Incominciamo col dimostrare il teorema nell'ipotesi ulteriore che siano soddisfatte le (4).

(9) G. SCORZA DRAGONI, *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti* [Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Roma, serie 4, vol. 2 (1938), pp. 255-275], pp. 257-258 e § 3. Nella nota (11) di questo lavoro in discorso, vi sono dei chiarimenti sul come procedere per sostituire la $\sigma(x) < \tau(x)$ con la $\sigma(x) \leq \tau(x)$.

(10) Specie dopo la dimostrazione estremamente elementare che ZWIRNER ha dato di un mio teorema (loc. cit. (9), n. 6), fondamentale per il procedimento; si veda: G. ZWIRNER, *Un' osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali* [Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, serie 2, vol. 1 (1939), pp. 334-336].

Si osservi che non è restrittivo supporre $f(x, y, y')$ e $\lambda(x)$ sempre finite, le (4) ovunque soddisfatte e $\lambda(x)$ sempre maggiore di 1.

Pongasi, per

$$n = 1, 2, \ldots$$

e per (x, y, y') contenuto in C,

$$g_n(x, y, y') = f(x, y, y')$$

oppure

$$g_n(x, y, y') = \psi_n(x), \quad g_n(x, y, y') = -\psi_n(x),$$

a seconda che

$$|f(x, y, y')| \leq \psi_n(x)$$

oppure

$$f(x, y, y') > \psi_n(x), \quad f(x, y, y') < -\psi_n(x).$$

Allora riesce

$$(5) \qquad g_n(x, y, y') = f(x, y, y'), \quad \text{se} \quad |y'| \leq n;$$

mentre per ogni n è

$$(6) \qquad |g_n(x, y, y')| \leq \varphi(y)\,\omega(y').$$

Inoltre, almeno per n abbastanza grande, maggiore di m_0 [11], dalle (4) e (5) segue

$$g_n(x, \sigma(x), \sigma'(x)) - g_n(x, \sigma(x), y') \leq \lambda(x)\,\mu(\sigma'(x) - y')$$

per $|\sigma'(x) - y'| < \delta$, e, per $|\tau'(x) - y'| < \delta$,

$$g_n(x, \tau(x), \tau'(x)) - g_n(x, \tau(x), y') \leq \lambda(x)\,\mu(\tau'(x) - y');$$

mentre le funzioni

([11]) Basterebbe modificare di poco la definizione delle g_n per potere supporre senz' altro $m_0 = 1$, cfr. loc. cit. ([5]), n. 2.

$$\sigma'(x) - \int_a^x g_n(u,\ \sigma(u),\ \sigma'(u))\,du\,,\quad \int_a^x f(u,\ \tau(u),\ \tau'(u))\,du - \tau'(x)$$

saranno non decrescenti in i.

Prolunghiamo la definizione di $g_n(x, y, y')$ in tutto lo strato

$$S: a \leq x \leq b\,,\ -\infty < y < +\infty\,,\ -\infty < y' < +\infty$$

mediante le posizioni ulteriori:

$$g_n(x,\ y,\ y') = g_n(x,\ \sigma(x),\ y') + \lambda(x)\ \mathrm{tgh}\,(y - \sigma(x))$$

se

$$y < \sigma(x)\,;$$

e

$$g_n(x,\ y,\ y') = g_n(x,\ \tau(x),\ y') + \lambda(x)\ \mathrm{tgh}\,(y - \tau(x))\,,$$

se

$$y > \tau(x)\,.$$

Allora in tutto S riesce

$$|\,g_n(x,\ y,\ y')\,| \leq \psi_n(x) + \lambda(x)\,,$$

e $g_n(x,\ y,\ y')$ è misurabile rispetto a x e continua rispetto a $(y,\ y')$. Quindi, per un mio teorema ([12]), il problema ai limiti

$$y'' = g_n(x,\ y,\ y')\,,\quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

ammette sempre una soluzione, $y_n(x)$, assolutamente continua in i insieme con la derivata prima.

Tenuta presente la $\lambda(x) > 1$ e un ragionamento che ho svolto in una circostanza analoga ([13]), si dimostra che in tutto i riesce

$$\sigma(x) \leq y_n(x) \leq \tau(x) \qquad (n \geq m_0)\,.$$

Indi, per la (6), in tutto i è quasi ovunque

$$|\,y_n''(x)\,| \leq \varphi(y_n(x))\,\omega(y_n'(x)) \qquad (n \geq m_0)\,,$$

([12]) Loc. cit. ([9]), n. 6.
([13]) Loc. cit. ([9]), pag. 271.

mentre per ogni $n \geq m_0$ esiste un punto ξ_n in cui

$$y'_n(\xi_n) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Di qui, com'è noto ([14]), si trae che da $n = m_0$ in poi riesce

$$|y'_n(x)| \leq m_1,$$

dove m_1 è un numero naturale opportuno.

Dopo di ciò è evidente che se nella (1) si sostituisce la $y(x)$ con la $y_n(x)$, la (1) stessa è soddisfatta non appena $n \geq m_0$, $n \geq m_1$.

2. Completiamo ora la dimostrazione del nostro teorema facendo vedere che le (4) sono superflue.

Si può ammettere ancora che $f(x, y, y')$ sia sempre finita.

Ciò posto definiamo le funzioni approssimanti $f_1(x, y, y')$, $f_2(x, y, y'), \dots$ allo stesso modo che ho tenuto nella mia Nota citata in ([2]), e che riproduco per comodità del lettore.

Scelto il numero $\nu > 0$ in modo che

$$\frac{1}{\nu} < \frac{1}{2}(\tau(x) - \sigma(x)),$$

sia

$$\sigma_n(x) = \sigma(x) + \frac{1}{n+\nu}, \quad \tau_n(x) = \tau(x) - \frac{1}{n+\nu} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Dopo di ciò poniamo

$$f_n(x, y, y') = f(x, y, y')$$

nelle porzioni di C caratterizzate dalle

$$a \leq x \leq b, \quad \sigma_n(x) \leq y \leq \tau_n(x), \quad -\infty < y' < +\infty;$$

([14]) L. Tonelli, *Sull'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$ [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie 2, vol. 8 (1939), pp. 75-88], n. 6, c). Zwirner loc. cit. ([4]), n. 1.

dalle

$$a \leq x \leq b, \quad \sigma(x) \leq y < \sigma_n(x), \quad y' = \sigma'(x);$$

e dalle

$$a \leq x \leq b, \quad \tau_n(x) < y \leq \tau(x), \quad y' = \tau'(x).$$

S' indichi ora con $p_n(u)$ la funzione lineare che vale $\frac{1}{n}$ per $u = 0$ e si annulla per $u = \frac{1}{n+\nu}$, e si ponga di nuovo

$$f_n(x, y, y') = f(x, y, y')$$

quando

$$a \leq x \leq b, \quad \sigma(x) \leq y < \sigma_n(x), \quad |\sigma'(x) - y'| \geq p_n(y - \sigma(x)),$$

oppure quando

$$a \leq x \leq b, \quad \tau_n(x) < y \leq \tau(x), \quad |\tau'(x) - y'| \geq p_n(\tau(x) - y).$$

Nei rimanenti punti di C, la $f_n(x, y, y')$ è definita dalla condizione di dipendere linearmente da y' in ogni segmento del tipo

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad \sigma'(\xi) \leq y' \leq \sigma'(\xi) + p_n(\eta - \sigma(\xi)),$$
$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad \sigma'(\xi) - p_n(\eta - \sigma(\xi)) \leq y' \leq \sigma'(\xi),$$

con $a \leq \xi \leq b$, $\sigma(\xi) \leq \eta < \sigma_n(\xi)$; oppure del tipo

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad \tau'(\xi) \leq y' \leq \tau'(\xi) + p_n(\tau(\xi) - \eta),$$
$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad \tau'(\xi) - p_n(\tau(\xi) - \eta) \leq y' \leq \tau'(\xi),$$

con $a \leq \xi \leq b$, $\tau_n(\xi) < \eta \leq \tau(\xi)$.

In ogni punto di C non interno a uno di questi segmenti è

$$f_n(x, y, y') \leq \varphi(y)\,\omega(y').$$

Consideriamo quello che accade in un punto (x, y, y') contenuto in uno dei segmenti del primo tipo. Ivi, posto $p_n(y - \sigma(x)) = \pi_n(x, y)$, si trova

$$f_n(x,\ y,\ y') = \frac{1}{\pi_n(x,\ y)}\,[f(x,\ y,\ \sigma'(x) + \pi_n(x,\ y))\,(y' - \sigma'(x)) +$$
$$+ f(x,\ y,\ \sigma'(x))\,(\sigma'(x) + \pi_n(x,\ y) - y')\,];$$

e quindi

$$|\, f_n(x,\ y,\ y')\,| \leq \varphi(y)\,\omega(\sigma'(x) + \pi_n(x,\ y)) + \varphi(y)\,\omega(\sigma'(x)).$$

Analogamente negli altri casi.

Si noti ora che

$$\sigma'(x),\quad \pi_n(x,\ y)$$

sono limitate, che $\omega(y')$ è continua e positiva e che $\varphi(y)$ si può supporre sempre maggiore di 1.

Ma allora è evidente che in tutto C riesce

$$|\, f_n(x,\ y,\ y')\,| \leq k\varphi(y)\,\omega(y'),$$

almeno per valori abbastanza grandi della costante k; di guisa che, volendo, si può sempre supporre

$$|\, f_n(x,\ y,\ y')\,| \leq \varphi(y)\,\omega(y')$$

a patto di avere scelto convenientemente la funzione $\varphi(y)$.

Inoltre $f_n(x, \sigma(x), y')$ e $f_n(x, \tau(x), y')$ sono lineari rispetto a y', la prima nei segmenti del tipo $\sigma'(x) - \frac{1}{n} \leq y' \leq \sigma'(x)$, $\sigma'(x) \leq y' \leq \sigma'(x) + \frac{1}{n}$, e la seconda in quelli ottenuti da questi sostituendo $\sigma'(x)$ con $\tau'(x)$.

Sicchè per $f_n(x, y, y')$ sono soddisfatte disuguaglianze analoghe alle (4), con

$$\delta = \frac{1}{n},\quad \mu(v) = |\, v\,|,\quad \lambda(x) = \lambda_n(x),$$

dove $\lambda_n(x)$ è, per ogni x di i, il più grande dei quattro numeri

$$n\left|\, f\left(x,\ \sigma(x),\ \sigma'(x) \pm \frac{1}{n}\right) - f(x,\ \sigma(x),\ \sigma'(x))\,\right|,$$
$$n\left|\, f\left(x,\ \tau(x),\ \tau'(x) \pm \frac{1}{n}\right) - f(x,\ \tau(x),\ \tau'(x))\,\right|.$$

Ma, per la condizione 1), $\lambda_n(x)$ è sommabile in i.

Inoltre $f_n(x, y, y')$ è misurabile rispetto a x e continua rispetto a (y, y'). Epperò il problema ai limiti

$$y'' = f_n(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

ammette almeno una soluzione, $y_n(x)$, assolutamente continua in i insieme con la propria derivata.

Per ogni n esiste almeno un punto di i in cui $y'_n(x) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$: quindi ([15]) in tutto i e per ogni n è

$$|y'_n(x)| \leq K.$$

con K costante opportuna. E ciò perchè in i è quasi ovunque

$$|y''_n(x)| \leq \varphi(y_n(x))\, \omega(y'_n(x)) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dalla $|y'_n(x)| < K$ e dalla condizione 1) si trae subito, se K era abbastanza grande ([16]), $|f_n(x, y_n(x), y'_n(x))| \leq \psi_K(x)$. Epperò $|y''_n(x)| \leq \psi_K(x)$, quasi ovunque; e le $y_1(x), y_2(x), \ldots, y'_1(x), y'_2(x), \ldots$ sono equicontinue ed equilimitate... Donde, seguitando a ragionare come alla fine della mia Nota citata in ([2]), si trae subito il teorema che vogliamo stabilire.

([15]) Si vedano i passi citati nella nota precedente.
([16]) Tanto da aversi anche $|\sigma'(x)| < K - 1$, $|\tau'(x)| < K - 1$.