RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Un criterio di esistenza per un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 10 (1939), p. 55-64

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__55_0>

UN CRITERIO DI ESISTENZA PER UN PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

Nota di GIUSEPPE ZWIRNER (*a Padova*).

In questa Nota riprendo una questione trattata di recente ([1]), per darle una risposta più completa dimostrando che:

Il problema

(1) $$y''(x) = f(x,\ y(x),\ y'(x)),\quad y(a) = \alpha,\quad y(b) = \beta,$$

dove $f(x, y, y')$ *è definita in un insieme del tipo*

$$C: a \leq x \leq b,\ \sigma(x) \leq y \leq \tau(x),\ -\infty < y' < +\infty \quad (\sigma(x) < \tau(x))$$

e

$$\sigma(a) \leq \alpha \leq \tau(a),\quad \sigma(b) \leq \beta \leq \tau(b),$$

ammette almeno una soluzione, $y(x)$, *assolutamente continua insieme con la sua derivata prima nell'intervallo*

$$i: a \leq x \leq b$$

e verificante ivi le

$$\sigma(x) \leq y \leq \tau(x),$$

tutte le volte che

I) $f(x, y, y')$, *ovunque finita, è continua rispetto a* (y, y') *e misurabile rispetto a* x *nell'insieme* C;

([1]) G. ZWIRNER: *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 3 (1939), pp. 57-70].

A pag. 58, riga decima, di tale lavoro bisogna leggere $\overline{K}$ in luogo di K.

II) $f(x, y, y')$ *risulta, in ogni regione limitata di C, minore, in modulo, di una corrispondente funzione* $\psi(x) \geq 0$ *sommabile in i, (e variabile al variar della regione considerata)*;

III) $f(x, y, y')$ *verifica la*

$$|f(x, y, y')| \leq \varphi(y)\,\varphi(y') + \chi(x),$$

dove $\varphi(u) \geq 0$ *è sommabile in ogni intervallo finito e* $\chi(x) \geq 0$ *in i, e dove* $\varphi(u)$ *è continua e positiva in* $-\infty < u < +\infty$ *con*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)}\,du = \int_0^{-\infty} \frac{u}{\varphi(u)}\,du = +\infty$$

e

$$|u| < K\varphi(u) \qquad (K = \text{cost.} > 0):$$

IV) $\sigma'(x)$ *e* $\tau'(x)$ *sono (finite e) continue in i;*

V) *le funzioni*

$$\sigma'(x) - \int_a^x f(u, \sigma(u), \sigma'(u))\,du, \quad \int_a^x f(u, \tau(u), \tau'(u))\,du - \tau(x)$$

sono non decrescenti in i (²).

Riconosceremo poi che:

L'ipotesi $\left|\frac{u}{\varphi(u)}\right| < K$ *è superflua se* $f(x, y, y')$ *è limitata in ogni regione limitata di C e se* $\chi(x) \equiv 0$.

Nel lavoro citato in (¹) ho dimostrato che il problema (1) è risolubile se, ferme restando le altre ipotesi, si sostituisce la II) con la:

$f(x, y, y')$ *si scompone nella somma di due funzioni* $g_1(x, y, y')$, $g_2(x, y, y')$, *la prima delle quali risulta limitata in ogni regione limitata di C, mentre la seconda risulta in tutto C minore, in modulo, di una funzione* $\chi_1(x) \geq 0$ *sommabile in i (il rapporto* $\frac{u}{\varphi(u)}$ *potendo non essere limitato quando* $\chi(x) \equiv \chi_1(x) \equiv 0$),

(²) Come è noto $f(x, p(x), q(x))$ è, per la I), misurabile in $a \leq x \leq b$ e, per la II), anche sommabile se $p(x)$ e $q(x)$ sono ivi continue con $\sigma(x) \leq p(x) \leq \tau(x)$.

e se si suppone che:

$f(x, y, y')$ soddisfaccia ad una condizione di LIPSCHITZ *generalizzata rispetto a y, y', in ogni regione limitata di C* (³).

Il procedimento là seguito mi ha permesso di raggiungere lo scopo con considerazioni di natura elementare e senza ampliare il campo in cui l'equazione è definita. Nella presente Nota, pur conservando alla trattazione del problema un carattere elementare, ricorro invece ad un conveniente prolungamento del campo di definizione dell'equazione data servendomi, con le modifiche del caso, di un ragionamento tenuto dallo SCORZA DRAGONI (⁴) in una questione analoga, ragionamento che, come avevo già detto in loc. cit. (¹) pag. 59, mi sembrava dovesse portare appunto a stabilire il teorema qui enunciato, senza alcuna ipotesi circa una condizione di LIPSCHITZ.

1. Per dimostrare il teorema enunciato scegliamo, innanzi tutto, un numero intero $\nu > 0$ in modo da aversi $\tau(x) - \sigma(x) > \frac{4}{\nu}$ e poi, su ogni piano $S(x_0): x = x_0$ (con x_0 in i) descriviamo col centro nel punto $(\sigma(x_0), \sigma'(x_0))$ ed alla destra della verticale $y = \sigma(x_0)$, due semicerchi $\gamma_1(x_0)$, $\gamma_2(x_0)$ di raggi $r_n = \frac{1}{n+\nu}$, $R_n = \frac{2}{n+\nu}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Diciamo ancora $\gamma_3(x_0)$, $\gamma_4(x_0)$ i semicerchi di centro $(\tau(x_0), \tau'(x_0))$, situati alla sinistra della verticale $y = \tau(x_0)$ e di raggi r_n e R_n. Definiamo ora le funzioni $f_n(x, y, y')$ in tutto lo strato

$$a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty$$

mediante le seguenti posizioni.

(³) Come conseguenza di ciò, la $f(x, y, y')$ risulta allora continua rispetto a (y, y'), a prescindere al più da un insieme di valori della x costituenti un insieme lineare di misura nulla. Si riconosce quindi che in queste nuove condizioni, la prima parte della I) si può ritenere sempre soddisfatta.

(⁴) SCORZA DRAGONI: *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie IV, vol. 2 (1938), pp. 255-275], pp. 268-275.

Per ogni x_0 di i, in $\gamma_1(x_0)$ e $\gamma_3(x_0)$ sia rispettivamente

$$f_n(x_0, y, y') = f(x_0, \sigma(x_0), \sigma'(x_0)) \; ; \; f_n(x_0, y, y') = f(x_0, \tau(x_0), \tau'(x_0)).$$

Nei punti della striscia

$$T(x_0) : x = x_0 , \; \sigma(x_0) \leq y \leq \tau(x_0) , \; -\infty < y' < +\infty$$

esterni a $\gamma_2(x_0)$, $\gamma_4(x_0)$ e in quelli di accumulazione di punti (di $T(x_0)$) esterni a $\gamma_2(x_0)$ e $\gamma_4(x_0)$, poniamo

$$f_n(x_0, y, y') = f(x_0, y, y') .$$

Su ogni segmento congiungente due punti delle semicirconferenze frontiera di $\gamma_1(x_0)$ e $\gamma_2(x_0)$ allineati col centro di $\gamma_1(x_0)$ e $\gamma_2(x_0)$, la $f_n(x_0, y, y')$ sia definita dalla condizione di essere funzione continua e lineare del punto variabile sul segmento. Vale a dire, se $(\sigma(x_0) + \lambda r_n, \sigma'(x_0) + \mu r_n)$, $(\sigma(x_0) + \lambda R_n, \sigma'(x_0) + \mu R_n)$ sono rispettivamente punti delle semicirconferenze ricordate (e quindi λ e μ sono i coseni direttori della loro congiungente orientata in modo opportuno), poniamo, per

$$y = \sigma(x_0) + \lambda\rho , \quad y' = \sigma'(x_0) + \mu\rho \quad (r_n \leq \rho \leq R_n) ,$$

$$f_n(x_0, y, y') = \frac{1}{R_n - r_n} [f(x_0, \sigma(x_0), \sigma'(x_0)) (R_n - \rho) +$$

$$+ f(x_0, \sigma(x_0) + \lambda R_n, \sigma'(x_0) + \mu R_n) (\rho - r_n)] .$$

Analoga definizione diamo nei segmenti che congiungono punti delle semicirconferenze frontiera di $\gamma_3(x_0)$ e $\gamma_4(x_0)$ allineati col centro di $\gamma_3(x_0)$ e $\gamma_4(x_0)$ [5].

Poniamo infine, per completare la definizione delle $f_n(x_0, y, y')$ in $S(x_0)$,

$$f_n(x_0, y, y') = f_n(x_0, \sigma(x_0), y') + \operatorname{tgh}(y - \sigma(x_0)) ,$$

se $y < \sigma(x_0)$;

$$f_n(x_0, y, y') = f_n(x_0, \tau(x_0), y') + \operatorname{tgh}(y - \tau(x_0)) ,$$

se $y > \tau(x_0)$.

[5] Questo brano riproduce presso che letteralmente la pag. 67 della mia Nota citata in [1].

Se indichiamo con N un numero fisso per il quale si abbia, in tutto $a \leq x \leq b$,

(2) $$|\sigma'(x)| < N-1 , \qquad |\tau'(x)| < N-1$$

e con $\psi_0(x)$ la funzione $\psi(x)$, di cui nella II), corrispondente alla regione limitata di C in cui $|y'| \leq N$, in base alle posizioni fatte in tutto C è

$$|f_n(x, y, y')| \leq \varphi(y)\varphi(y') + \chi(x) + \psi_0(x) .$$

Inoltre le funzioni $f_n(x, y, y')$ risultano continue rispetto a (y, y') e misurabili rispetto a x in C ([6]).

2. Per ogni $n = 1, 2, \ldots$ indichiamo con $\psi_n(x)$ la funzione $\psi(x)$, di cui nella II), corrispondente alla regione limitata di C in cui $|y'| \leq N + n$. Poniamo, per (x, y, y') in C,

$$g_n(x, y, y') = f_n(x, y, y')$$

oppure

$$g_n(x, y, y') = \psi_n(x) , \qquad g_n(x, y, y') = -\psi_n(x)$$

a seconda che

$$|f_n(x, y, y')| \leq \psi_n(x)$$

oppure

$$f_n(x, y, y') > \psi_n(x) , \qquad f_n(x, y, y') < -\psi_n(x) ,$$

di guisa che per $|y'| \leq N + n$ è sempre $g_n(x, y, y') = f_n(x, y, y')$.

Poniamo inoltre, per $y < \sigma(x)$,

(3) $$g_n(x, y, y') = g_n(x, \sigma(x), y') + \operatorname{tg h}(y - \sigma(x)) ,$$

e, per $y > \tau(x)$,

(4) $$g_n(x, y, y') = g_n(x, \tau(x), y') + \operatorname{tg h}(y - \tau(x)) .$$

In C è quindi $|g_n(x, y, y')| \leq |f_n(x, y, y')|$, da cui

(5) $$|g_n(x, y, y')| \leq \varphi(y)\varphi(y') + \chi(x) + \psi_0(x) .$$

([6]) Cfr. loc. cit. ([1]), pag. 68; loc. cit. ([4]), pag. 269.

Inoltre, in tutto $S(x)$, è

$$g_n(x, y, y') \leq \psi_n(x) + 1 .$$

In virtù di quest' ultima diseguaglianza, fissato n, il problema

$$(6) \qquad y'' = g_n(x, y, y'), \qquad y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta,$$

ammette, come è noto ([7]), almeno una soluzione $y_n(x)$, assolutamente continua, insieme colla sua derivata prima, nell'intervallo $a \leq x \leq b$.

Si può ora facilmente provare, con un ragionamento analogo ad uno noto ([8]), che per tale integrale riesce, in tutto $a \leq x \leq b$,

$$(7) \qquad \sigma(x) \leq y_n(x) \leq \tau(x) .$$

A tale scopo osserviamo intanto che, essendo

$$g_n(x, \sigma(x), \sigma'(x)) = f_n(x, \sigma(x), \sigma'(x)) = f(x, \sigma(x), \sigma'(x)),$$
$$g_n(x, \tau(x), \tau'(x)) = f_n(x, \tau(x), \tau'(x)) = f(x, \tau(x), \tau'(x)),$$

le funzioni

$$\sigma'(x) - \int_a^x g_n(u, \sigma(u), \sigma'(u))\, du, \quad \int_a^x g_n(u, \tau(u), \tau'(u))\, du - \tau'(x)$$

sono tutte non decrescenti in i.

Premesso ciò, supponiamo che la prima delle (7) non sia soddisfatta in tutto i. Allora, in tali ipotesi, posto $q(x) = y_n(x) - \sigma(x)$, si potranno determinare due punti $x_1 < x_2$ di i tali che

$$q(x_1) = q(x_2) = 0 ,$$

([7]) loc. cit. ([4]), § 3. Per una dimostrazione elementare del teorema cfr. G. Zwirner: *Un' osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali* [Bollettino U. M. I., serie II, anno I, (1939), pp. 334-336].

([8]) Loc. cit. ([4]), pag. 271.

e che, in ogni punto interno a $x_1 \leq x \leq x_2$, sia inoltre

$$q(x) < 0 .$$

Per la (3) si avrà quindi, in $x_1 \leq x \leq x_2$,

$$
\begin{aligned}
q'(x) &= y'_n(x_1) + \int_{x_1}^{x} g_n(u, y_n(u), y'_n(u))\,du - \sigma'(x) = \\
&= y'_n(x_1) + \int_{x_1}^{x} g_n(u, \sigma(u), y'_n(u))\,du + \\
&+ \int_{x_1}^{x} \operatorname{tg} h\,(y_n(u) - \sigma(u))\,du - \sigma'(x) = \\
&= y'_n(x_1) + \int_{x_1}^{x} [g_n(u, \sigma(u), y'_n(u)) - g_n(u, \sigma(u), \sigma'(u))]\,du - \\
&- \int_{a}^{x_1} g_n(u, \sigma(u), \sigma'(u))\,du + \int_{a}^{x} g_n(u, \sigma(u), \sigma'(u))\,du - \sigma'(x) + \\
&+ \int_{x_1}^{x} \operatorname{tg} h\,(y_n(u) - \sigma(u))\,du .
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Siano ξ un punto tale che

$$x_1 < \xi < x_2 , \qquad q'(\xi) = 0 ,$$

e δ un suo intorno. Se δ è abbastanza piccolo, per ogni x di tale intorno sarà

$$|y'_n(x) - \sigma'(x)| < r_n \qquad \left(r_n = \frac{1}{n + \nu} \right).$$

e quindi $|y'_n(x)| < N$; da cui

$$g_n(x, \sigma(x), y'_n(x)) = f_n(x, \sigma(x), y'_n(x)) = f(x, \sigma(x), \sigma'(x)) .$$

Ne segue che in queste condizioni in tutto δ riesce

$$g_n(x\,,\,\sigma(x)\,,\,y'_n(x)) = g_n(x\,,\,\sigma(x)\,,\,\sigma'(x))\;,$$

avendosi inoltre anche

$$\operatorname{tg} h(y_n(x) - \sigma(x)) < -l\,,$$

con l costante positiva opportuna.

Dall'ultimo membro della (8) e dalla non crescenza della funzione

$$\int_a^x g_n(u,\ \sigma(u),\ \sigma'(u))\,du - \sigma'(x)$$

si deduce allora facilmente che nel punto ξ sono negative tutte le quattro derivate di $q'(x)$; il che, per un lemma noto ([9]), è assurdo. Quindi è, come volevamo, $\sigma(x) \leq y_n(x)$.

Analogamente per la $y_n(x) \leq \tau(x)$, a partire dalla (4).

3. Dimostriamo che, per n abbastanza grande, $y_n(x)$ è una soluzione delle

$$y'' = f_n(x,\ y,\ y'),\quad y(a) = \alpha,\quad y(b) = \beta. \tag{9}$$

A tale scopo basterà, evidentemente, provare che in i riesce

$$|\,y'_n(x)\,| < H\,, \tag{10}$$

con H costante positiva indipendente da n.

La (10) si stabilisce partendo dalle (5) e (7) con gli stessi ragionamenti che ho svolto nelle pag. 59 e 66 del mio primo lavoro qui citato ([10]).

([9]) Ecco il lemma: *Se* $q(x)$, *continua in* i: $a \leq x \leq b$ *insieme con* $q'(x)$, *è non negativa in* a *e* b; *e se una*, $r(x)$, *delle derivate di* $q'(x)$ *è sempre negativa tutte le volte che* $q'(x)$ *si annulla in* $a < x < b$; *la* $q(x)$ *è non negativa in tutto* i (cfr. loc. cit. ([4]), pag. 268).

([10]) Sviluppando questo ragionamento si riconosce che la $\left|\dfrac{u}{\varphi(u)}\right| <$ cost. si sfrutta in modo essenziale nello stabilire la (10), e solo attraverso la cir-

Ricordando ora la definizione delle $f_n(x, y, y')$ e le (7) e (10) si vede che (almeno per n abbastanza grande) le soluzioni $y_n(x)$ delle (9) soddisfano, quasi ovunque, alla condizione

$$|y_n''(x)| < \psi_H(x),$$

dove $\psi_H(x)$ è la funzione che compare nella II) per $|y'| \leq H$.

Dopo di ciò, basterà procedere come nell'ultimo numero della mia Nota citata in (1) per provare senz'altro che il problema (1) è risolubile.

4. *Se nel teorema enunciato si sostituisce l'ipotesi II) con la:*

II') $f(x, y, y')$ *risulta limitata in ogni regione limitata di* C;

e se $\chi(x) \equiv 0$ *(cioè se* $|f(x, y, y')| \leq \overline{\varphi}(y)\,\varphi(y')$*), allora il rapporto* $\dfrac{u}{\varphi(u)}$ *può anche non essere limitato, senza che perciò il teorema perda la sua validità.*

Definite come nei n. 1 e 2 le funzioni $f_n(x, y, y')$ e $g_n(x, y, y')$ (sostituendo le $\psi_n(x)$ con delle costanti opportune), per provare l'affermazione fatta basterà far vedere che, in queste nuove ipotesi, si può stabilire, per le soluzioni delle (6), una limitazione quale la (10) anche quando il rapporto $\dfrac{u}{\varphi(u)}$ non è limitato (11). Raggiungeremo lo scopo dimostrando che in C si può sempre supporre

$$(11) \qquad |g_n(x, y, y')| \leq \overline{\varphi}(y)\,\varphi(y'),$$

previa un'eventuale modificazione della $\overline{\varphi}(y)$; dopo di ciò, invero, basta riprendere il ragionamento che conduce alla (10), sostituendo la (5) con la (11), per ritrovare una disuguaglianza quale la (10).

costanza che l'integrale $\displaystyle\int_a^b q(x)\,\frac{\chi(x) + \psi_0(x)}{\varphi(q(x))}\,dx$ è limitato in modulo da una costante che non dipende dalla funzione continua $q(x)$; cfr. loc. cit. (4), pag. 257, nota (12) a piè di pagina.

(11) Cfr. la nota precedente.

Poichè $g_n(x, y, y') \leq f_n(x, y, y')$, basterà dimostrare che si può supporre

$$f_n(x, y, y') \leq \varphi(y)\, \varphi(y').$$

Infatti, per $y' > N$, con N numero fissato e verificante le (2), la cosa è evidente perchè allora $f_n(x, y, y') = f(x, y, y')$. Per $y' \leq N$ essendo, in virtù della II'),

$$f(x, y, y') \leq m,$$

dove m è l'estremo superiore di $f(x, y, y')$ per $y' \leq N$, sarà anche

$$f_n(x, y, y') \leq m.$$

Ora, siccome, per ipotesi, $\varphi(y')$ è continua e positiva in $y' \leq N$, si potrà sempre supporre, senza ledere la generalità del problema, la $\varphi(y)$ maggiore di un numero K scelto in modo che per $y' \leq N$ sia

$$m \leq \varphi(y)\, \varphi(y').$$

E con ciò resta completamente provato quanto volevamo.