RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Problemi di valori ai limiti per equazioni differenziali ordinarie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 10 (1939), p. 35-45

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__35_0>

PROBLEMI DI VALORI AI LIMITI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

di GIUSEPPE ZWIRNER *a Padova.*

In una Nota recente [1] ho dimostrato che: *Il problema di valori ai limiti*

$$(1)\qquad \begin{aligned} &y'''(x) = f(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x))\,, \\ &y'(a) = \alpha\,,\ \ y(x_0) = y_0,\ y'(b) = \beta \qquad (a < x_0 < b)\,, \end{aligned}$$

ammette almeno una soluzione se $f(x,\ y,\ y',\ y'')$ *è continua nell'iperstrato* $S: a \leq x \leq b,\quad |y| < +\infty\,,\quad |y'| < +\infty\,,$ $|y''| < +\infty$, *lipschitziana rispetto a* y, y', y'' *e crescente in* y, y', *e se inoltre* $f(x,\ y,\ y',\ y'') = f_1(x,\ y') + f_2(x,\ y,\ y',\ y'')$ *con* $f_1(x,\ y')$ *continua e non decrescente in* y' *e* $f_2(x,\ y,\ y',\ y'')$ *limitata in* S.

Il procedimento là seguito si basa, fra l'altro, su un criterio di unicità per le curve integrali della $y''' = f$ uscenti da $P_0 \equiv (x_0,\ y_0)$, con data inclinazione iniziale, ed aventi in b una inclinazione fissata [2].

[1] G. ZWIRNER: *Su un problema ai limiti per le equazioni differenziali del terzo ordine* [Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, t. XCVIII, parte II (1939) pp. 69-78].

[2] Tale criterio, con ragionamento analogo a quello tenuto nella Nota citata, si estende alle equazioni d'ordine superiore, nel senso che:

Se $f(x,\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)})$ *è continua nell'iperstrato* $S: a \leq x \leq b$, $|y| < +\infty,\ldots,\ |y^{(n-1)}| < +\infty$, *lipschitziana in* $y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)}$ *e crescente in* $y,\ y',\ldots,\ y^{(n-2)}$, *l'equazione*

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)})$$

ammette al più una curva integrale $y = y(x)$ *soddisfacente alle condizioni*

Usufruendo di un ragionamento che ho in seguito svolto altrove [3], farò vedere che il problema (1) è risolubile sotto ipotesi più generali, come del resto era prevedibile in virtù di risultati noti [4]. La dimostrazione che dò è più aderente alla natura dell'argomento. Questo infatti implica (come del resto sarà chiarito) la soluzione di un sistema di due equazioni (non lineari) in due incognite, soluzione che qui è fatta dipendere da teoremi sulle trasformazioni piane, anzichè dal procedimento di eliminazione tenuto nella mia Nota citata in [1].

Ecco il teorema che mi propongo di dimostrare:

L'equazione

$$y''' = f(x,\ y,\ y',\ y'') \tag{2}$$

ammette in $(a,\ b)$ *almeno un integrale* $\overline{y}\,(x)$ *soddisfacente alle condizioni*

$$\overline{y}'\,(a) = \alpha\,,\quad \overline{y}\,(x_0) = y_0\,,\quad \overline{y}'\,(b) = \beta \qquad (a < x_0 < b), \tag{3}$$

con α, y_0, β *numeri reali prefissati ad arbitrio, tutte le volte che* $f(x,\ y,\ y',\ y'')$ *è continua nell'iperstrato*

$$S : a \leq x \leq b\,,\quad |y| < +\infty\,,\quad |y'| < +\infty\,,\quad |y''| < +\infty\,,$$

$$y\,(a) = y_0\,,\ y'\,(a) = y'_0\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-2)}\,(a) = y_0^{(n-2)}\,,$$

e

$$y^{(n-2)}\,(b) = \beta\,,$$

dove y_0, y'_0, $\ldots$, $y_0^{(n-2)}$ *e* β *sono numeri prefissati ad arbitrio.*

Per $n = 3$ si ritrova il criterio contenuto nella mia **Nota** citata.

Se si suppone invece la $f\,(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ *crescente in* $y^{(n-2)}$, *decrescente in* $y^{(n-3)}$, *crescente in* $y^{(n-4)}$, $\ldots\,$, *allora la* $y^{(n)} = f$ *ammette al più una soluzione soddisfacente alle*

$$y\,(b) = y_0\,,\quad y'\,(b) = y'_0\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-2)}\,(b) = y_0^{(n-2)},\qquad y^{(n-2)}\,(a) = \alpha\,.$$

(3) G. Zwirner, *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del quarto ordine* [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, vol. IX (1938), pp. 150–155].

(4) R. Caccioppoli, *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti* [Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, serie 6, vol. 13 (1931) pp. 498-502]; Birkhoff e Kellog, *Invariants points in function space* [Transactions of the American mathematical Society, vol. 23 (1922), pp. 96-115].

e vi soddisfa alla

(4) $$f(x, y, y', y'') = f_1(x, y') + f_2(x, y, y', y''),$$

con $f_1(x, y')$ *continua e non decrescente in* y' *e*

(5) $$|f_2(x, y, y', y'')| < M \qquad (M = \text{cost.} > 0).$$

Accenno poi ad una estensione di questo teorema, valida anche per equazioni d'ordine superiore.

1. Per dimostrare il teorema enunciato supporemo in un primo tempo che la $f(x, y, y', y'')$ sia limitata e lipschitziana rispetto a y, y', y'', in S.

Le soluzioni della (2) si possono definire in tutto (a, b). Fissatane una, $y(x)$, con $y(x_0) = y_0$, e posto

$$\xi = y'(x_0), \qquad \eta = y''(x_0);$$
$$\sigma = y'(a) - \alpha, \quad \tau = y'(b) - \beta,$$

e fatta poi variare la $y(x)$, si viene a definire una trasformazione T univoca e continua del piano $\pi \equiv (\xi, \eta)$ nel piano $\rho \equiv (\sigma, \tau)$ [5]; indichiamola in formule con

(6) $$\sigma = \varphi(\xi, \eta), \quad \tau = \psi(\xi, \eta),$$

Per provare il nostro teorema basterà perciò far vedere che l'origine O' di ρ è d'ordine diverso da zero rispetto ad una curva γ' immagine, nella T, di una conveniente curva semplice chiusa γ di π [6]. Premesso ciò, sia $y = y(x)$ una curva integrale della (2) uscente dal punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ ed m un numero per il quale si abbia, in tutto S,

$$|f(x, y, y', y'')| < m.$$

[5] O, almeno, in una porzione di ρ. Dalla dimostrazione che daremo segue *a posteriori* che la trasformata di π, mediante la T, è tutto il piano ρ.

[6] Cfr. loc. cit. [3].

Allora

$$y'(a) < y'(x_0) + (a - x_0)\, y''(x_0) + \frac{m}{2}(a - x_0)^2;$$

$$y'(a) > y'(x_0) + (a - x_0)\, y''(x_0) - \frac{m}{2}(a - x_0)^2;$$

$$y'(b) < y'(x_0) + (b - x_0)\, y''(x_0) + \frac{m}{2}(b - x_0)^2;$$

$$y'(b) > y'(x_0) + (b - x_0)\, y''(x_0) - \frac{m}{2}(b - x_0)^2.$$

Diciamo ora t, t', r, r' le rette di π di equazioni

$$\xi + (a - x_0)\,\eta + \frac{m}{2}(a - x_0)^2 = \alpha;$$

$$\xi + (a - x_0)\,\eta - \frac{m}{2}(a - x_0)^2 = \alpha;$$

$$\xi + (b - x_0)\,\eta + \frac{m}{2}(b - x_0)^2 = \beta;$$

$$\xi + (b - x_0)\,\eta - \frac{m}{2}(b - x_0)^2 = \beta;$$

$A \equiv (\xi_1, \eta_1)$, $B \equiv (\xi_2, \eta_2)$, $C \equiv (\xi_3, \eta_3)$, $D \equiv (\xi_4, \eta_4)$ sieno rispettivamente i punti d' intersezione delle rette (t, r'), (t', r'), (t', r) e (t, r) di guisa che

$$\xi_1 = \frac{m}{2}\left[\frac{(b - x_0)^2 + (a - x_0)^2}{b - a}(x_0 - a) - (a - x_0)^2\right] + \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x_0 - a) + \alpha,$$

$$\eta_1 = \frac{m}{2} \cdot \frac{(b - x_0)^2 + (a - x_0)^2}{b - a} + \frac{\beta - \alpha}{b - a};$$

$$\xi_2 = \frac{m}{2}\left[\frac{(b - x_0)^2 - (a - x_0)^2}{b - a}(x_0 - a) + (a - x_0)^2\right] + \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x_0 - a) + \alpha,$$

$$\eta_2 = \frac{m}{2} \cdot \frac{(b - x_0)^2 - (a - x_0)^2}{b - a} + \frac{\beta - \alpha}{b - a};$$

$$\xi_3 = -\frac{m}{2}\left[\frac{(b - x_0)^2 + (a - x_0)^2}{b - a}(x_0 - a) - (a - x_0)^2\right] + \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x_0 - a) + \alpha,$$

$$\eta_3 = -\frac{m}{2} \cdot \frac{(b - x_0)^2 + (a - x_0)^2}{b - a} + \frac{\beta - \alpha}{b - a};$$

$$\xi_4 = -\frac{m}{2}\left[\frac{(b-x_0)^2-(a-x_0)^2}{b-a}(x_0-a)+(a-x_0)^2\right]+\frac{\beta-\alpha}{b-a}(x_0-a)+\alpha,$$

$$\eta_4 = -\frac{m}{2}\cdot\frac{(b-x_0)^2-(a-x_0)^2}{b-a}+\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Si consideri poi il parallelogramma $ABCD$ e se ne dica γ il contorno e γ' la trasformata di γ mediante le (6).

Dimostriamo allora che γ' non passa per O' e che l'ordine di O' rispetto a γ' è 1.

A tale scopo diciamo γ_1', γ_2', γ_3', γ_4' rispettivamente gli omologhi nella T dei segmenti $\gamma_1 = AB$, $\gamma_2 = BC$, $\gamma_3 = CD$, $\gamma_4 = DA$. Allora si vede facilmente, tenuto conto delle espressioni di $\xi_1, \ldots, \xi_4$, $\eta_1, \ldots, \eta_4$, che gli archi γ_1', γ_2', γ_3', γ_4' sono contenuti rispettivamente nell'interno dei rettangoli

$$-m(a-x_0)^2 \leq \sigma \leq m(a-x_0)^2, \qquad 0 \leq \tau \leq m(b-x_0)^2.$$

$$0 \leq \sigma \leq m(a-x_0)^2, \qquad -m(b-x_0)^2 \leq \tau \leq m(b-x_0)^2;$$

$$-m(a-x_0)^2 \leq \sigma \leq m(a-x_0)^2, \qquad -m(b-x_0)^2 \leq \tau \leq 0 \quad ;$$

$$-m(a-x_0)^2 \leq \sigma \leq 0 \quad , \qquad -m(b-x_0)^2 \leq \tau \leq m(b-x_0)^2;$$

In tali condizioni, con un ragionamento analogo a quello tenuto nella mia Nota citata in ([3]), si prova facilmente l'affermazione fatta.

In $ABCD$ esiste quindi un punto (ξ_0, η_0) tale che la soluzione della (2) verificante le

$$\bar{y}(x_0) = y_0, \quad \bar{y}'(x_0) = \xi_0, \quad \bar{y}''(x_0) = \eta_0$$

soddisfaccia alle

$$\bar{y}'(a) = \alpha, \quad \bar{y}'(b) = \beta.$$

Il ragionamento prova poi che fra le soluzioni $\bar{y}(x)$ della (2), soddisfacenti alle (3), ve ne è sempre almeno una per cui

$$\xi = \bar{y}'(x_0), \quad \eta = \bar{y}''(x_0),$$

è interno al parallelogramma $ABCD$ [7]; e quindi che

$$|\bar{y}'(x_0)|, \quad |\bar{y}''(x_0)|$$

sono minori di una quantità dipendente soltanto da m e dai dati del problema. Ne segue, in tutto (a, b),

$$|\bar{y}'''(x)| < \bar{K}, \quad |\bar{y}''(x)| < \bar{K}, \quad |\bar{y}'(x)| < \bar{K}, \quad |\bar{y}(x)| < \bar{K},$$

dove $\bar{K}\,(\geq m)$ è una conveniente costante che dipende solo dai dati del problema.

Segue allora subito che la condizione di LIPSCHITZ si può eliminare mediante noti procedimenti di approssimazione.

2. Dimostriamo ora il nuovo teorema enunciato nella prefazione.

A tale scopo si osservi intanto che dalle ipotesi fatte sulla $f(x, y, y', y'')$ segue, per $y' \geq \vartheta = |\alpha| + |\beta|$,

$$f(x, y, y', y'') \geq f_1(x, \vartheta) - M \geq -H, \tag{7}$$

e, per $y' \leq -\vartheta$,

$$f(x, y, y', y'') \leq f_1(x, \vartheta) + M \leq H, \tag{8}$$

H essendo una conveniente costante positiva.

Sia ora $y(x)$ un eventuale integrale della (2) definito in a H b e verificante le (3).

Supponiamo che, c essendo un punto interno di (a, b), sia

$$y'(c) \geq \vartheta, \quad y''(c) > H(b-a). \tag{9}$$

In un intorno destro di c è allora $y'(x) \geq \vartheta$, e quindi, per la (7),

$$y'''(x) \geq -H,$$

da cui, tenendo presente anche la seconda delle (9),

$$y''(x) > H\{b - a - (x - c)\}.$$

[7] Si potrebbe anzi facilmente provare che per ogni integrale $\bar{y}(x)$ della (2), verificante le (3), il punto $\xi = \bar{y}'(x_0)$, $\eta = \bar{y}''(x_0)$ è interno al parallelogramma $ABCD$.

Si vede così facilmente che, in tali ipotesi, in tutto (c, b) è sempre $y''(x) > 0$ e quindi, tenuto conto della prima delle (9),

$$y'(b) > \vartheta,$$

il che è assurdo.

Analogamente, se fosse

$$y'(c) \geq \vartheta, \quad y''(c) < -H(b-a),$$

dalla (7) si dedurebbe, contro l'ipotesi,

$$y'(a) > \vartheta.$$

Ragionando in modo analogo, se in c fosse

$$y'(c) \leq -\vartheta, \quad y''(c) > H(b-a),$$

oppure

$$y'(c) \leq -\vartheta, \quad y''(c) < -H(b-a),$$

si troverebbe, per la (8), rispettivamente

$$y'(a) < -\vartheta; \quad y'(b) < -\vartheta.$$

Ne segue facilmente che in tutto l'intervallo chiuso (a, b) riesce

$$|y'(x)| < \vartheta + H(b-a)^2.$$

Tenendo allora presenti le (3), (4), (5) si deduce

$$(10) \qquad |y'''(x)| < K, \quad |y''(x)| < K, \quad |y'(x)| < K, \quad |y(x)| < K,$$

con K costante positiva dipendente soltanto da α, β, y_0, a, b, x_0 e H.

Consideriamo ora l'insieme

$$S_0: a \leq x \leq b, \quad |y| \leq K, \quad |y'| \leq K, \quad |y''| \leq K,$$

e definiamo la funzione $f_0(x, y, y', y'')$ ponendola uguale

a $f(x, y, y', y'')$ in S_0

$$
\begin{array}{llllll}
\text{a} & f(x, y, y', K) & \text{per } a \leq x \leq b, & |y| \leq K, & |y'| \leq K, & y'' > K, \\
\text{a} & f(x, y, y', -K) & » & , » & , » & , y'' < -K, \\
\text{a} & f_0(x, y, K, y'') & » & , » & , y' > K, & |y''| < +\infty, \\
\text{a} & f_0(x, y, -K, y'') & » & , » & , y' < -K, & |y''| < +\infty, \\
\text{a} & f_0(x, K, y', y'') & » & , y > K, & |y'| < +\infty, & |y''| < +\infty, \\
\text{a} & f_0(x, -K, y', y'') & » & , y < -K, & |y'| < +\infty, & |y''| < +\infty.
\end{array}
$$

Questa nuova funzione $f_0(x, y, y', y'')$ risulta, evidentemente, continua e limitata in tutto S e vi soddisfa, come la $f(x, y, y', y'')$, alla (7) per $y' \geq \vartheta$ e alla (8) per $y' \leq -\vartheta$. In tali condizioni, l'equazione

$$y''' = f_0(x, y, y', y'')$$

ammette quindi almeno una soluzione $y_0(x)$ soddisfacente alle condizioni $y_0'(a) = \alpha$, $y_0(x_0) = y_0$, $y_0'(b) = \beta$. Tale integrale soddisferà inoltre, in tutto (a, b), alle (10), e sarà perciò anche un integrale dell'equazione (2).

3. Si osservi che la (4) e le ipotesi relative su f_1, f_2 sono state sfruttate solo attraverso le (7) e (8), sicchè il teorema effettivamente dimostrato è più ampio di quello esposto nella introduzione. Tenendo ora presente un ragionamento usato dal TONELLI in una questione analoga relativa alle equazioni differenziali del secondo ordine, e un noto teorema di esistenza relativo ad equazioni differenziali d'ordine qualunque, si dimostra subito quanto segue:

Sia $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ una funzione finita e continua in

$$S: a \leq x \leq b, \ |y| < +\infty, \ |y'| < +\infty, \ldots, \ |y^{(n-1)}| < +\infty,$$

e tale che, per ogni $\nu > 0$ e per ogni $\mu \geq 0$ esista una funzione $\chi(x)$, positiva e sommabile in (a, b), in modo da aversi in tutti i punti di S

$$(11) \qquad |f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| < \nu\, |y^{(n-1)}| + \chi(x),$$

se è $|y^{(n-2)}| \leq \mu$;

(12) $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) > -\nu \{ | y^{(n-2)} | + | y^{(n-1)} | \} - \chi(x)$,

se è $y^{(n-2)} > \mu$;

(13) $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) < \nu \{ | y^{(n-2)} | + | y^{(n-1)} | \} + \chi(x)$,

se è $y^{(n-2)} < -\mu$. *Allora l' equazione*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{14}$$

ammette in (a, b) *almeno una soluzione* $y = y(x)$ *soddifacente alle condizioni*

$$y^{(n-2)}(a) = \alpha, \quad y^{(n-2)}(b) = \beta \tag{15}$$

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_1) = y_1, \ldots, \ y^{(n-3)}(x_{n-3}) = y_{n-3}, \tag{16}$$

dove $x_0, x_1, \ldots, x_{n-3}$ *sono punti (distinti o no) dell' intervallo* (a, b) *e* $\alpha, \beta, y_0, y_1, \ldots, y_{n-3}$ *numeri reali* (8).

Sia $y = y(x)$ un eventuale integrale della (14) verificante le (15) e (16). Preso $\mu = \delta$, dove δ indica il maggiore dei due numeri $|\alpha|$ e $|\beta|$; scelto ν in modo che riesca $\nu(b-a)(b-a+1) < \frac{1}{2}$, e determinata in corrispondenza $\chi(x)$; e tenuto conto delle (11), (12), (13), si vede (9) che se nell' intervallo (c_0, c_1), con (c_0, c_1) contenuto in (a, b), è rispettivamente

$$\begin{cases} y^{(n-1)}(c_0) = 0, \\ y^{(n-2)}(x) \geq \delta, \ y^{(n-1)}(x) \leq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^{(n-1)}(c_0) = 0, \\ y^{(n-2)}(x) \leq -\delta, \ y^{(n-1)}(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{(n-1)}(c_1) = 0, \\ y^{(n-2)}(x) \geq \delta, \ y^{(n-1)}(x) \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^{(n-1)}(c_1) = 0, \\ y^{(n-2)}(x) \leq -\delta, \ y^{(n-1)}(x) \leq 0; \end{cases}$$

deve essere, in tutto (c_0, c_1),

$$| y^{(n-1)}(x) | \leq | y^{(n-2)}(x) | + 2K_1 \quad \left(K_1 = \int_a^b \chi(x)\, dx \right).$$

(8) Per $n=2$ cfr.: L. Tonelli, *Sull' equazione* $y'' = f(x, y, y')$ [Annali della R. Scuola Normale di Pisa, serie II, vol. VIII, pp. 75-88], pp. 75-80.

(9) loc. cit. (8) pag. 77-78.

Allora, se in un certo intervallo $\zeta_0 < x < \zeta_1$ è $y^{(n-2)}(x) > \delta$, con $y^{(n-2)}(\zeta_0) = \delta$, $y^{(n-2)}(\zeta_1) = \delta$; oppure è $y^{(n-2)}(x) < -\delta$, con $y^{(n-2)}(\zeta_0) = -\delta$, $y^{(n-2)}(\zeta_1) = -\delta$, da quanto si è detto e da un noto teorema [10], segue che, in $\zeta_0 \leq x \leq \zeta_1$ è

$$| y^{(n-2)}(x) | \leq (1+\delta)\, e^{2K_1 + b - a} < K_2(1+\delta),$$

con K_2 costante positiva conveniente (> 1).

Indi è, in tutto l'intervallo chiuso (a, b),

$$| y^{(n-2)}(x) | < K_2(1+\delta).$$

Di qui e dalla (11) segue

$$| y^{(n)}(x) | < \nu \, | y^{(n-1)}(x) | + \phi(x),$$

dove $\phi(x)$ è la funzione $\chi(x)$ che figura nella (11), quando si prenda $\mu = K_2(1+\delta)$ e ν eguale al valore precedentemente fissato. Scelto ora ζ in modo che $y^{(n-1)}(\zeta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$, sarà [11]

$$| y^{(n-1)}(x) | \leq (1 + | y^{(n-1)}(\zeta) |)\, e^{\int_a^b (\nu + \phi(x))\, dx} \leq L,$$

dove L dipende solo dai dati del problema.

Si avrà allora, tenendo presenti le (16),

$$| y(x) | \leq N, \quad | y^{(i)}(x) | \leq N \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

con N costante positiva dipendente solo dai dati del problema.

Tenendo ora presente un noto teorema [12], la proposizione

(10) Cfr. E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen.* (Lipsia, 1930), pag. 93.

(11) L. Tonelli, [*Sulle proprietà delle estremanti.* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. III, (1934), pp. 231-237], n. 8.

(12) Cfr. loc. cit. (4).

enunciata si dimostra facilmente procedendo come alla fine del numero precedente (13).

(13) Tenendo conto di una proposizione di PEANO (*Lezioni di Analisi infinitesimale* [Candeletti, Torino, 1893], vol. I, pp. 107-108) si riconosce facilmente che il teorema dimostrato vale anche se invece di supporre soddisfatte le (16), si suppone, p. es., prefissato il valore di $y(x)$ in $n-2$ punti distinti di a b.

Generalizzazioni analoghe si dovrebbero ottenere a partire dai teoremi relativi alle equazioni differenziali del secondo ordine col secondo membro soddisfacente ad una diseguaglianza del tipo

$$|f(x, y, y')| \leq \varphi_0(y)\,\varphi(y') + \chi(x)$$

(per maggiori precisazioni nelle ipotesi si veda TONELLI loc. cit. (8)), nel caso della (14) dovendosi probabilmente sostituire la precedente con la disuguaglianza.

$$|f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leq \varphi_0(y^{(n-2)})\,\varphi(y^{(n-1)}) + \chi(x)\,.$$