Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

M. Manarini

Estensione della formula del doppio prodotto vettoriale agli spazi a più di tre dimensioni. Una formula di calcolo integrale ed un teorema della divergenza per i bivettori

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 10 (1939), p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1939__10__1_0>

ESTENSIONE DELLA FORMULA DEL DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE AGLI SPAZI A PIÙ DI TRE DIMENSIONI. UNA FORMULA DI CALCOLO INTEGRALE ED UN TEOREMA DELLA DIVERGENZA PER I BIVETTORI

di M. MANARINI *a Bologna*

Sunto. — In questo lavoro si estende agli spazi con più di tre dimensioni l'importante formula del doppio prodotto vettoriale dello spazio S_3, della quale nel contempo se ne dà una nuova semplice dimostrazione. Inoltre viene stabilita una nuova formula di calcolo integrale per i campi omografici, ricavandone un teorema della divergenza per i bivettori.

Per istituire su basi assolute, cioè indipendentemente da sistemi di coordinate, la teoria dei bivettori in un lavoro precedente [1] ho dovuto premettere alcune considerazioni sulle omografie assiali che a quelli sono in stretto legame. Così ho distinto le assiali in semplici e multiple, considerandone per esse il rango. Dopo di che ho logicamente introdotto un postulato fondamentale che pone in corrispondenza biunivoca i bivettori semplici e multipli, col rispettivo rango, con le omografie assiali. Dopo avere istituite operazioni fondamentali sui bivettori, nello stesso lavoro ho dimostrato l'utilità di tale calcolo vettoriale iniziandone una sistematica applicazione alla cinematica dei sistemi rigidi negli spazi S_n con numero qualsiasi di dimensioni,

(1) M. MANARINI, *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n e applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi*. [Annali di Matematica pura e applicata, Serie IV. T. XIII. 1933-34, pp. 75-115].

sulla quale sono poi ritornato in un lavoro successivo ([2]). In altri lavori ho poi iniziato lo studio dell'analisi relativa ai campi bivettoriali ([3]) e, fra l'altro, ne ho fatto applicazione all'elettromagnetismo. Altre estensioni del calcolo vettoriale e bivettoriale assoluto furono da me fatte nelle varietà riemanniane e di WEYL, ponendovi a base il parallelismo intrinseco ([4]).

Il compianto prof. P. BURGATTI in una Sua recente memoria ([5]) ha iniziato l'estensione ai plurivettori di concetti e criteri da me introdotti per i bivettori nella citata memoria (1). Ora io ho l'occasione di riprendere queste ricerche per concludere con l'estensione agli spazi S_n dell'importante formula del doppio prodotto vettoriale

$$(a \wedge b) \wedge c = (a \times c) b - (b \times c) a \tag{0}$$

e stabilire nuove formule integrali di trasformazione, una delle quali costituisce un teorema della divergenza per i bivettori.

La generalizzazione della formula (0), formula di frequente uso nel metodo vettoriale per lo spazio S_3, viene da me applicata per determinare, in modo assoluto, un vettore x dello spazio S^n di cui

([2]) *Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n. III. Formula generale per la velocità di trascinamento e composizione dei moti istantanei di rotazione.* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. XXIII, serie 6, 1936 - XIV].

([3]) *Rotazione di un vettore negli spazi S_n.* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. XVII, serie 6, 1933, pp. 706–712].

— *Sulla divergenza dei plurivettori negli spazi S_n.* [Ibidem, pp. 799-803].

— *Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine ed applicazione al campo elettromagnetico stazionario.* [Ibidem, Vol. XXI, 1935-XIII, pp. 173-178 e 277-283].

([4]) *Considerazioni sul calcolo vettoriale assoluto in una V_3 e sui tensori doppi a divergenza unica.* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. XIX, serie 6, 1934-XII, pp. 201-305].

— *Sugli spazi di* WEYL – *Introduzione geometrica vettoriale assoluta alla teoria della relatività generale.* [Annali di Mat. pura ed appl., serie IV, T. XIV, 1935-36].

([5]) *Pluridifferenziali e rotazionali di plurivettori negli spazi E_n.* [Memorie della R. Acc. delle Scienze dell' Ist. di Bologna, T. IV, 1936-37].

si conoscono i prodotti scalari per n dati vettori non appartenenti ad uno stesso spazio ad $n-1$ dimensioni; problema che nello spazio S_3 si risolve assai facilmente ricorrendo appunto alla formula sopra scritta. Interpretando poi cartesianamente il risultato, deduco una nuova dimostrazione della regola di CRAMER per la risoluzione dei sistemi lineari non omogenei di n equazioni ad n incognite ed a determinante diverso da zero.

Della formula (0) si conoscono varie dimostrazioni, una delle quali, alquanto laboriosa, è comparsa ultimamente [6]. In questo lavoro ne espongo una nuova, assai semplice, basandomi sulle nozioni fondamentali della teoria delle omografie vettoriali. Ed è appunto tale dimostrazione che mi ha indirizzato sull'estensione della formula stessa agli spazi S_n.

A proposito del metodo vettoriale assoluto che si viene sviluppando con queste ricerche, mi sia permesso di riportare un brano della conferenza tenuta a Mosca dal compianto prof. BURGATTI nel maggio del 1934 [7], in occasione del *Primo Congresso internazionale della geometria differenziale e delle sue applicazioni*:

« *Dalle varie applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica che ho avuto occasione di fare per scopi didattici e anche per nuove ricerche negli stessi campi, mi sono persuaso che il calcolo vettoriale ed omografico è di una grande potenza e semplicità, e bene spesso più aderente all'intuizione. Anche in queste conferenze ho veduto che certe formule alquanto complicate, con parecchi simboli e serie di indici, mascheravano proprietà assai semplici e quasi evidenti con l'uso del metodo in discorso. L'uso delle coordinate generali introduce di necessità delle nozioni superflue, come quelle di componenti covarianti, contravarianti, ecc., e anche problemi fittizi, nel senso che sono estranei alle questioni intrinseche in esame. Tutta co-*

(6) S. CHAPMAN and E. A. MILNE, *The Proof of the Formula for the Vector Triple Product*. [The Mathematical Gazette, Vol. XXIII, n. 253, 1939, pp. 35-38].

(7) P. BURGATTI, *Calcolo vettoriale generale*. [Atti del Seminario dell'Analisi vettoriale e tensoriale dell' Istit. Mat. dell' Università di Stato di Mosca, Fasc. IV, 1934, pp. 333-336].

testa pesante armatura e il suo relativo simbolismo sparisce nel calcolo intrinseco che abolisce le coordinate; il che è già vantaggio da tenersi in pregio; non solo di comodità, ma veramente di carattere scientifico».

«Non tutte però le alte questioni geometriche e fisiche che in questi tempi sono oggetto di ricerca si possono al presente trattare vantaggiosamente con questo calcolo intrinseco come è stato elaborato sino ad oggi. C'è ancora molto da perfezionare e generalizzare, usufruendo anche delle nuove idee introdotte da vari eminenti geometri; onde cimentarlo poi nei più moderni campi della ricerca. Il più lento progresso di questo calcolo rispetto a quello del Ricci *dipende dalla ragione che ho detto prima: i suoi cultori son pochi. Ed è per questo che mi permetto di richiamare su di esso l'attenzione dei presenti, e in particolare dei giovani. Io credo che senza aumentare di molto le operazioni e i simboli già in uso, che sono veramente pochi e semplici, si possa pervenire a un calcolo generale atto a tutte le desiderabili applicazioni».*

E non può non essere di sprone il pensiero dell'illustre geometra E. Cartan così espresso: « *L'idéal serait de raisonner et de calculer sur les êtres géométriques eux mêmes* » (8); mentre un altro autorevole geometra, il Weyl, ha creduto di poter dichiarare *impossibile* il poter rinunciare al pesante apparecchio relativo al metodo delle coordinate che però riconosce di avere un posto troppo vasto e di mascherare la chiarezza intuitiva dei problemi (9).

Qui ho ancora l'occasione di apportare al metodo vettoriale assoluto, metodo prettamente italiano, il mio modesto contributo convinto come sono che, allorchè le sue base in un prossimo avvenire si saranno sufficientemente estese, non potranno mancare i frutti desiderati per le più elevate ricerche della geometria, della meccanica e della fisica-matematica.

(8) Cfr. la sua prefazione alla Tesi del prof. Delens: *Méthodes et problémes des géometries differentielles euclidienne et conforme.* [Gauthier-Villars, Paris, 1927].

(9) H. Weyl, *Raum, Zeit und Materie.* [Springer, Berlin, 1921, vierte Auflage, pag. 124], oppure cfr. l'edizione francese, Blanchard, Paris, 1922, pag. 119.

1. – Sulla formula del doppio prodotto vettoriale nello spazio S_3.

Ricordiamo che se γ è un'assiale $(K\gamma = -\gamma)$, essa può porsi sotto la forma $\boldsymbol{u} \wedge$ dove, se $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, costituiscono una terna fondamentale di versori, è

$$\boldsymbol{u} = (\gamma \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k})\, \boldsymbol{i} + (\gamma \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i})\, \boldsymbol{j} + (\gamma \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j})\, \boldsymbol{k} \text{ [10]}.$$

Applicando ciò al doppio dell'assiale della diade $H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ data da

$$2\,A\,H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - H(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

si ricava

$$(1) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{u} = {} & [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{j})\,(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{j})\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k})]\, \boldsymbol{i} + \\ & + [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k})\,(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{i}) - (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{k})\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{i})]\, \boldsymbol{j} + \\ & + [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{i})\,(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{j}) - (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{i})\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{j})]\, \boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

I fattori entro le parentesi quadre risultano i minori della matrice formata con le proiezioni di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e perciò il secondo membro di (1) esprime lo sviluppo di $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$.

Concludendo possiamo scrivere

$$H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - H(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge$$

e applicando al vettore $\boldsymbol{c}$ otteniamo

$$(2) \qquad (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = [H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - H(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})]\, \boldsymbol{c};$$

onde risulta

$$(3) \qquad (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{a} \qquad \text{c. d. d.}$$

Per il seguito è utile osservare che la formula del doppio prodotto vettoriale dello spazio (S_3), giusta la (2), si può porre sotto la forma

$$(4) \qquad (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = 2\,A\,H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c};$$

[10] Cfr. ad esempio, P. Burgatti, *Elementi di calcolo vettoriale e omografico*. [Hoepli, Milano, 1935 - XV, pag. 85].

la qual cosa costituisce l'osservazione fondamentale della dimostrazione precedente e verrà anche sfruttata nel seguito per agevolare l'estensione della (3) allo spazio S_n, con $n > 3$.

2. – Iperdiadi. – Scomposizione di una iperomografia.

Si può osservare che il secondo membro della (1) rappresenta l'espressione cartesiana del vettore supplementare al bivettore semplice $\underset{2}{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, vettore espresso appunto dal prodotto vettoriale $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. Passando agli spazi a più di tre dimensioni sarà utile precisare anzitutto alcune notazioni che verranno usate nel seguito.

Con Burali-Forti e Boggio (come del resto ho già fatto nel paragrafo precedente ed in altri lavori) userò il simbolo A per indicare l'operatore che applicato ad un'omografia μ dà la sua assiale

$$A\mu = \frac{\mu - K\mu}{2}. \tag{5}$$

Sempre seguendo gli stessi autori, per l'iperomografia $\underset{2}{\mu}$ l'operatore A soddisferà alla condizione

(6) $$(A\underset{2}{\mu})\,\boldsymbol{a} = A(\underset{2}{\mu}\,\boldsymbol{a}) \text{ [11]} \qquad (\boldsymbol{a} \text{ vett. arbitr.}).$$

E ciò ho voluto precisare giacchè il Burgatti nella citata Memoria dell' Istituto delle Scienze di Bologna, non seguè tale criterio.

Similmente, l'operatore K per le iperomografie soddisfa alla relazione

$$(K\underset{2}{\mu})\,\boldsymbol{a} = K(\underset{2}{\mu}\,\boldsymbol{a}),$$

e chiameremo *assiale del 2° ordine* ogni iperomografia $\underset{2}{\gamma}$ soddisfacente alla condizione

$$K\underset{2}{\gamma} = -\underset{2}{\gamma}.$$

(11) Cfr. C. Burali-Forti e T. Boggio, *Espaces courbes et critique de la Relativité* [Ed. Sten, Torino, 1934, pag. 30].

Indicheremo col simbolo $\mathcal{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ l'assiale semplice corrispondente al bivettore semplice $\underset{2}{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (12), ossia porremo

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 2\,A\,H(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = H(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - H(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\,.$$

Per usare simboli che si prestino agevolmente alle estensioni scriveremo la precedente nella forma

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \underset{(\pi)}{\pm \Sigma}\, H(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2})\,, \tag{7}$$

dove r_1, r_2 indica una permutazione degli indici 1, 2 e la sommatoria è estesa alle permutazioni (π) di tali indici, dando il segno $+$ al termine corrispondente alla permutazione di classe pari e il segno $-$ a quello corrispondente alla permutazione di classe dispari.

In base a tali nozioni il prodotto vettoriale interno del bivettore semplice $\underset{2}{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ per il vettore $\boldsymbol{u}$ si scrive

$$\underset{2}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u} = \mathcal{A}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{u} \quad (13) \tag{8}$$

e per il prodotto scalare dei due bivettori semplici $\underset{2}{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$, $\underset{2}{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$ avremo

$$\underset{2}{\boldsymbol{a}} \times \underset{2}{\boldsymbol{b}} = \mathcal{A}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 = \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)\,\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2\,. \tag{9}$$

Richiamiamo ancora la formula di calcolo plurivettoriale

$$\underset{2}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u} = \underset{n-2}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u}\,, \tag{10}$$

dove $\underset{n-2}{\boldsymbol{a}}$ è l'$(n-2)$ — vettore supplementare di $\underset{2}{\boldsymbol{a}}$ e il secondo membro rappresenta il prodotto vettoriale esterno di $\underset{n-2}{\boldsymbol{a}}$ per $\boldsymbol{u}$ (14).

(12) Cfr. il paragrafo 6 della mia prima memoria citata.

(13) Nella memoria citata tale operazione è stata indicata con $\underset{2}{\boldsymbol{a}} \dot{\times} \boldsymbol{u}$ (cfr. il paragrafo 10).

(14) Cfr. nella mia prima memoria citata, il paragrafo 12.

Ricordiamo come tali operazioni si estendano agevolmente al caso che $\underset{2}{\boldsymbol{a}}$ sia un bivettore multiplo, applicando ad $\boldsymbol{u}$ l' assiale multipla ad esso corrispondente; la quale è sempre scomponibile in somma di assiali semplici.

Osserviamo infine che, nel caso particolare dello spazio S_3, dove i bivettori non possono essere che bivettori semplici, la (10), tenuto conto delle (7) e (8) diviene la formula del doppio prodotto vettoriale

$$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{a}_1 = (\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2) \wedge \boldsymbol{u}.$$

Passiamo ora alle estensioni che si collegano con le ricerche iniziate dal prof. BURGATTI. Tratteremo in particolare il caso relativo ai trivettori, giacchè ne risulterà poi immediata l'estensione ai casi più generali.

Se $\boldsymbol{a}$ ed α sono vettore ed omografia qualunque, chiameremo *diade del secondo ordine* $\underset{2}{H}(\boldsymbol{a}, \alpha)$ l' iperomografia definita dalla relazione

$$H(\boldsymbol{a}, \alpha)\, \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u})\, \alpha \tag{11}$$ [15].

Si ricava facilmente

$$K \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}, \alpha) = \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}, K\alpha), \tag{12}$$

onde, se γ è una assiale, $\underset{2}{H}(\boldsymbol{a}, \gamma)$ è una iperassiale, giacchè

$$K \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}, \gamma) = - \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}, \gamma). \tag{13}$$

Se in particolare α è una diade e precisamente è $\alpha = H(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, l' iperomografia $\underset{2}{H}(\boldsymbol{a}, H(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}))$ applicata ad un vettore dà una diade ordinaria; essa è stata considerata dal BURGATTI nella memoria poc' anzi citata e da Lui è stata chiamata iperdiade e indicata con $(H\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Qui noi conserveremo in parte il simbolo

[15] Indipendentemente da queste ricerche di calcolo plurivettoriale, ho potuto constatare l' utilità di tale iperdiade per gli ordinari sviluppi di analisi vettoriale che si premettono ai corsi di Fisica-Matematica.

ponendo

$$H(\boldsymbol{a}, H(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})) = \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\,;$$

onde sarà per definizione

$$(14) \qquad \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u})\; H(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\,.$$

Posto ciò, sia $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots. \boldsymbol{i}_n$ una n-pla fondamentale di versori; se $\boldsymbol{a}$ è un vetttore arbitrario e $\underset{2}{\mu}$ è una generica omografia del 2° ordine, potendosi scrivere

$$\boldsymbol{a} = \sum_1^n{}_r\, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{i}_r)\, \boldsymbol{i}_r\,,$$

$$\underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{a} = \sum_1^n{}_r\, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{i}_r)\; \underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{i}_r = \sum_1^n{}_r\, H(\boldsymbol{i}_r, \underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{i}_r)\, \boldsymbol{a}\,,$$

per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$, otteniamo

$$(15) \qquad \underset{2}{\mu} = \sum_1^n{}_r\, \underset{2}{H}\, (\boldsymbol{i}_r, \underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{i}_r)$$

che dà per la $\underset{2}{\mu}$ un'espressione iperdiadica (cartesiana) analoga alla ben nota formula diadica (cartesiana) valida per una generica omografia ordinaria μ:

$$\mu = \sum_1^n{}_r\, H(\boldsymbol{i}_r, \mu\, \boldsymbol{i}_r)\,.$$

Essendo $\underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{i}_r$ una omografia ordinaria e valendo per essa quest' ultima espressione, si avrà

$$\underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{i}_r = \sum_1^n{}_s\, H(\boldsymbol{i}_s, \underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{i}_r\, \boldsymbol{i}_s)\,;$$

onde, sostituendo in (15), otteniamo

$$(15)' \qquad \underset{2}{\mu} = \sum_1^n{}_{r,s}\, \underset{2}{H}\, (\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_s, \underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{i}_r\, \boldsymbol{i}_s).$$

che dà la generica omografia del 2° ordine $\underset{2}{\mu}$ scomposta nella somma di n^2 iperdiadi del 2° ordine del tipo di Burgatti.

3. Iperassiali semplici.

Fra le iperassiali chiameremo « *assiale semplice del 2° ordine* » e la indicheremo con $\underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ l'omografia del 2° ordine definita da

$$(16) \qquad \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \pm \sum_{(\pi)} \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3}),$$

dove r_1, r_2, r_3 è una permutazione degli indici 1, 2, 3 e la sommatoria è estesa alle (π) permutazioni semplici di tali indici, prendendo il segno $+$ in corrispondenza di quelle di classi pari e il segno $-$ in corrispondenza di quelle di classi dispari. Evidentemente la (16) è una estensione della formula (7) relativa alle omografie ordinarie.

Si può verificare che per $\underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ vale la proprietà caratteristica delle iperassiali:

$$K \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = - \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \text{ [16]}$$

In una mia Nota del 1935 [17] ho avuto occasione di dimostrare l'utilità di considerare per l'omografia del 2° ordine $\dfrac{d\alpha}{dP}$ l'espressione

$$(17) \qquad \frac{d\alpha}{dP} + \overline{K}\,\frac{d\alpha}{dP} + \overline{K}^2\,\frac{d\alpha}{dP}$$

[16] Infatti se $\boldsymbol{x}$ è un vettore arbitrario si ha

$$\left| K \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \right| \boldsymbol{x} = \left| \pm \sum_{(\pi)} K \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3}) \right| \boldsymbol{x} =$$
$$= \pm \sum_{(\pi)} K \left| (\boldsymbol{a}_{r_1} \times \boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3}) \right| = \pm \sum_{(\pi)} (\boldsymbol{a}_{r_1} \times \boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{a}_{r_3}, \boldsymbol{a}_{r_2}) =$$
$$= \pm \sum_{(\pi)} \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_3}, \boldsymbol{a}_{r_2}) \boldsymbol{x} = \left| \mp \sum_{(\pi)} H(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3}) \boldsymbol{x} \right| = - \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \boldsymbol{x}$$

e per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{x}$ otteniamo

$$K \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3) = - \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3).$$

[17] *Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del 3° ordine e applicazione al campo elettromagnetico stazionario,* loc. cit.

dove $\overline{K}$ è l'operatore definito da

$$\underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \overline{K} \underset{2}{\mu}\, \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \; ;$$

ed è precisamente il prodotto kk' dei due operatori k e k' di Burali-Forti e Boggio.

Nel caso che α sia un' assiale, tale espressione mi è servita per definire l' importante nozione di « *divergenza di un bivettore* » rispetto alla quale stabiliremo nell' ultimo paragrafo una notevole formula integrale di trasformazione.

Qui consideriamo un' espressione del tipo (17) per una generica $\underset{2}{\mu}$ e poniamo per brevità

$$\mathcal{H} \underset{2}{\mu} = \underset{2}{\mu} + \overline{K} \underset{2}{\mu} + \overline{K}^2 \underset{2}{\mu} \, . \tag{18}$$

Si può verificare facilmente che se $\underset{2}{\mu}$ è una iperassiale $\underset{2}{\gamma}$ anche $\mathcal{H} \underset{2}{\gamma}$ è una iperassiale; ossia è

$$K \mathcal{H} \underset{2}{\gamma} = - \mathcal{H} \underset{2}{\gamma} \text{ (18)} .$$

Consideriamo il doppio dell' assiale della $\mathcal{H} \underset{2}{\mu}$ ponendo, in base alle (6) e (5),

$$2 A \mathcal{H} \underset{2}{\mu} = \mathcal{H} \underset{2}{\mu} - K \mathcal{H} \underset{2}{\mu} \, . \tag{19}$$

Per $\underset{2}{\mu} = \underset{2}{H} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ abbiamo

$$2 A \mathcal{H} \underset{2}{H} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \underset{2}{\mathcal{A}} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \, , \tag{20}$$

(18) Infatti, essendo $\overline{K} = kk'$ e tenendo conto delle relazioni che intercedono fra gli operatori K, k, k' (cfr. Burali-Forti e Boggio, *Espaces courbes*, ecc. Loc. cit., pag. 33) : $kk' = k'K = Kk = \overline{K}$, $k' = kKk$, ed ancora di $K \underset{2}{\gamma} = - \underset{2}{\gamma}$, si ricava

$$K \mathcal{H} \underset{2}{\gamma} = K \underset{2}{\gamma} + K \overline{K} \underset{2}{\gamma} + K \overline{K}^2 \underset{2}{\gamma} = - \underset{2}{\gamma} + K k' K \underset{2}{\gamma} + K k' K k' K \underset{2}{\gamma} =$$
$$= - \underset{2}{\gamma} - K k' \underset{2}{\gamma} - (K k')^2 \underset{2}{\gamma} = - \underset{2}{\gamma} - (K k)^2 \underset{2}{\gamma} - (K k)^4 \underset{2}{\gamma} = - \underset{2}{\gamma} - \overline{K}^2 \underset{2}{\gamma} - \overline{K} \underset{2}{\gamma} = - \mathcal{H} \underset{2}{\gamma} .$$

ossia risulta l'iperassiale semplice definita dalla (16); quindi per la (15)' ricaviamo

$$2A\underset{2}{\mathcal{H}}\mu = \sum_{1}^{n}{}_{r,s}\ \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_s, \underset{2}{\mu}\,\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_s), \tag{21}$$

dove il secondo membro è la somma di n^2 iperassiali semplici.

Si può anche osservare che, sempre in base al significato dell'operatore A definito dalle (5) e (6), la (20) si può scrivere nella forma

$$\underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 2A\sum_{[\pi]}\underset{2}{H}(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3})\ \text{(19)}, \tag{20)'$$

dove r_1, r_2, r_3 è una permutazione degli indici 1, 2, 3, e la sommatoria del secondo membro è estesa alle permutazioni di classe pari degli indici stessi, il cui complesso è indicato con $[\pi]$.

4. Applicazione ai trivettori.

La corrispondenza biunivoca da me stabilita nella prima memoria citata fra i bivettori semplici o multipli e le assiali semplici o multiple fu estesa dal prof. Burgatti fra i trivettori semplici $\underset{3}{\boldsymbol{a}} \equiv [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ e le assiali semplici $\underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$.

Ricordiamo che il bivettore dell'assiale semplice $\mathcal{A}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ è $\underset{2}{\boldsymbol{a}} \equiv [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ e scriveremo

$$V\underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]. \tag{22}$$

Diremo «*prodotto vettoriale interno*» del trivettore semplice $\boldsymbol{a} \equiv [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ per il vettore $\boldsymbol{u}$, e lo indicheremo con

(19) Infatti, se $\boldsymbol{x}$ è un vettore arbitrario si ha

$$\{2A\sum_{[\pi]}\underset{2}{H}(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3})\}\boldsymbol{x} = \sum_{[\pi]}2A\{\underset{2}{H}(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3})\boldsymbol{x}\} =$$

$$= \sum_{[\pi]}(\boldsymbol{a}_{r_1}\times\boldsymbol{x})\,2A\,H(\boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3}) = \pm\sum_{[\pi]}(\boldsymbol{a}_{r_1}\times\boldsymbol{x})\,H(\boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3}) =$$

$$= \{\pm\sum_{[\pi]}\underset{2}{H}(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3})\}\boldsymbol{x} = \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3})\boldsymbol{x};$$

e, per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{x}$, segue la (20)'.

$\underset{3}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u}$, il bivettore dell'omografia del 2° ordine che si ottiene applicando ad $\boldsymbol{u}$ l'iperassiale semplice $\underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ corrispondente al trivettore; cioè porremo

$$(23) \qquad \underset{3}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u} = \underset{2}{V} \{ \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\, \boldsymbol{u} \} .$$

Sviluppando si ha subito

$$(24) \qquad \underset{3}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u} = \sum_{[\pi]} (\boldsymbol{a}_{r_1} \times \boldsymbol{u})\, [\boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3}]$$ [20]

dove, ripetiamo, r_1, r_2, r_3 rappresenta una permutazione degli indici 1, 2, 3 e $[\pi]$ rappresenta le permutazioni di classe pari alle quali viene estesa la sommatoria.

Come si vede risulta la somma di tre bivettori semplici; e si può osservare che la definizione (23) si può estendere al caso che $\underset{3}{\boldsymbol{a}}$ sia un trivettore multiplo, usando l'iperassiale multipla ad esso corrispondente.

Nel caso dello spazio S_3 ricaviamo subito un risultato semplice ed interessante. Infatti abbiamo

$$\underset{3}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{u})\, [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] + (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{u})\, [\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1] + (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{u})\, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$$

e prendendo i vettori supplementari dei due membri risulta

$$\text{suppl.}\ (\underset{3}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{u})\, (\boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3) + (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{u})\, (\boldsymbol{a}_3 \wedge \boldsymbol{a}_3) + \\ + (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{u})\, (\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2) .$$

Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ e sommando si ricava

$$\text{suppl.}\ (\underset{3}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3),$$

[20] Infatti:

$$\underset{2}{V} \{ \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\, \boldsymbol{u} \} = \underset{2}{V} \{ + \sum_{(\pi)} \underset{2}{H}(\boldsymbol{a}_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3})\, \boldsymbol{u} \} =$$

$$= \underset{2}{V} \{ \sum_{[\pi]} (\boldsymbol{a}_{r_1} \times \boldsymbol{u})\, \mathcal{A}(\boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3}) \} = \sum_{[\pi]} (\boldsymbol{a}_{r_1} \times \boldsymbol{u})\, [\boldsymbol{a}_{r_2}, \boldsymbol{a}_{r_3}] .$$

da cui si ottiene

$$\text{suppl.}\ (\underset{3}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u}) = \text{mod}\ \underset{3}{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{u}\,.$$

Tornando a prendere i supplementari dei due membri e indicando con $\underset{2}{\boldsymbol{u}}$ il supplementare di $\boldsymbol{u}$, abbiamo

$$(25) \qquad \underset{3}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u} = \text{mod}\,\underset{3}{\boldsymbol{a}} \cdot \underset{2}{\boldsymbol{u}}\,,$$

ossia *nello spazio S_3 il prodotto vettoriale interno di un trivettore per un vettore vale il bivettore supplementare del vettore dato, moltiplicato per il numero che misura il trivettore* ([21]).

Si può verificare che nello spazio S_4 il bivettore definito dalla (24), come somma di bivettori semplici, è il bivettore (semplice) supplementare del bivettore $[E\,(\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3),\, \boldsymbol{u}]$, dove $E\,(\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3)$ è il ben noto vettore di Burali-Forti e Boggio, supplementare del trivettore semplice $\underset{3}{\boldsymbol{a}} \equiv [\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]$.

Quindi nello spazio S_4 si può scrivere

$$(26) \qquad \underset{3}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u} = E\,(\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3) \wedge \boldsymbol{u}\,;$$

e questa formula estende al prodotto vettoriale interno di un trivettore semplice per un bivettore, la formula (1) di pag. 94 della mia prima memoria citata, relativa al prodotto vettoriale interno di un bivettore per un vettore.

Ed è appunto la formula precedente, scritta nella forma

$$(27) \qquad E\,(\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3) \wedge \boldsymbol{u} = \sum_{[\pi]} (\boldsymbol{a}_{r_1} \times \boldsymbol{u}) \cdot [\boldsymbol{a}_{r_2},\, \boldsymbol{a}_{r_3}]\,,$$

che, in S_4, deve considerarsi l'estensione della formula del doppio prodotto vettoriale dello spazio S_3.

L'estensione della formula (27) agli spazi con più di quattro dimensioni si otterrà, evidentemente, con considerazioni analoghe.

([21]) Cfr. E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des espaces de* Riemann. [Gauthier-Villars, Paris, 1928, pag. 28].

Osserviamo infine che per il prodotto scalare di due plurivettori semplici la formula (5) della citata memoria del prof. Burgatti, nel caso particolare dei trivettori, si scriverà

$$(28)\qquad \underset{3}{\boldsymbol{a}} \times \underset{3}{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \times [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] =$$
$$= \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\, \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2 \times \boldsymbol{b}_3 = \underset{2}{\mathcal{A}}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)\, \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3$$

e costituisce la naturale estensione della formula (9), da me stabilita a pag. 88 della mia memoria poc' anzi citata.

5. Applicazione analitica.

Facciamo un' applicazione della formula (27) per ricavare, con procedimento assoluto, l' espressione del vettore $\boldsymbol{x}$ dello spazio S_4 soddisfacente al sistema

$$(29)\qquad \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{x} = l, \quad \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{x} = m, \quad \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{x} = n, \quad \boldsymbol{a}_4 \times \boldsymbol{x} = p,$$

dove $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ sono vettori dello spazio S_4 non appartenenti ad uno stesso S_3, ossia soddisfacenti alla condizione

$$(30)\qquad E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \times \boldsymbol{a}_4 \neq 0.$$

Applicando allora la formula (27), al prodotto vettoriale

$$E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \wedge \boldsymbol{x}$$

abbiamo

$$E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \wedge \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{x})\, [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] + (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{x})\, [\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1] +$$
$$+ (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{x})\, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2],$$

ossia, per le (29),

$$E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \wedge \boldsymbol{x} = l\,[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] + m\,[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1] + n\,[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2].$$

Sempre operando nell' S_4, consideriamo il prodotto vettoriale esterno per $\boldsymbol{a}_4$ dei bivettori che figurano nell' uguaglianza precedente, ed avremo

$$(31) \qquad \{ E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \wedge \boldsymbol{x} \} \wedge \boldsymbol{a}_4 =$$
$$= l\,[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \wedge \boldsymbol{a}_4 + m\,[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1] \wedge \boldsymbol{a}_4 + n\,[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \wedge \boldsymbol{a}_4 \,.$$

In base alla formula

$$\underset{2}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u} = \underset{n-2}{\boldsymbol{a}} \wedge \boldsymbol{u}$$

possiamo sostituire il primo membro di (31) con un prodotto vettoriale interno e scrivere per esso

$$[E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), \boldsymbol{x}] \wedge \boldsymbol{a}_4 \,;$$

il quale, in base alla (8) vale $\mathcal{A} \{ E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), \boldsymbol{x} \} \boldsymbol{a}_4$, ossia vale

$$\{ E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \times \boldsymbol{a}_4 \} \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}_4)\, E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \,.$$

Quindi si ha

$$\{ E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \wedge \boldsymbol{x} \} \wedge \boldsymbol{a}_4 =$$
$$= \{ E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \times \boldsymbol{a}_4 \} \boldsymbol{x} - p\, E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \,.$$

Poichè in S_4 è

$$[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \wedge \boldsymbol{a}_4 = E(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4),$$

e formule analoghe; sostituendo in (31) si ottiene

$$\{ E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \times \boldsymbol{a}_4 \} \boldsymbol{x} - p \cdot E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) =$$
$$= l \cdot E(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) + m \cdot E(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4) + n \cdot E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4) \,.$$

da cui si ricava

$$(32) \quad \boldsymbol{x} = \{ l\, E(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) + m\, E(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4) + n\, E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4) +$$
$$+ p\, E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \} : \{ E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \times \boldsymbol{a}_4 \} \,,$$

che dà, in forma assoluta, la soluzione del sistema (29).

Traducendo cartesianamente si può verificare che ne risulta la regola di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni con quattro incognite.

All' uopo basta osservare che nello spazio S_4 il simbolo

$$E(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$$

rappresenta il vettore supplementare del trivettore semplice $[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3]$ e che essi hanno uguali le componenti cartesiane, le quali sono per ciascuno in numero di $\binom{4}{3}$; naturalmente il primo è riferito ai versori $\boldsymbol{i}_r$ ed il secondo ai triversori supplementari. Tali componenti cartesiane sono i minori della matrice formata con le proiezioni dei tre vettori $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, cioè:

$$\left\{\begin{matrix} (a_1)_1 & (a_1)_2 & (a_1)_3 & (a_1)_4 \\ (a_2)_1 & (a_2)_2 & (a_2)_3 & (a_2)_4 \\ (a_3)_1 & (a_3)_2 & (a_3)_3 & (a_3)_4 \end{matrix}\right\}.$$

Inoltre è noto che cartesianamente $E(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \times \boldsymbol{a}_4$ vale il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_1)_1 & (a_1)_2 & (a_1)_3 & (a_1)_4 \\ (a_2)_1 & (a_2)_2 & (a_2)_3 & (a_2)_4 \\ (a_3)_1 & (a_3)_2 & (a_3)_3 & (a_3)_4 \\ (a_4)_1 & (a_4)_2 & (a_4)_3 & (a_4)_4 \end{vmatrix}.$$

Proiettando la (32) sull'assé delle x e chiamando con x_1 la proiezione del vettore $\boldsymbol{x}$, si ottiene

$$x_1 = \left\{ l \begin{vmatrix} (a_2)_2 & (a_2)_3 & (a_2)_4 \\ (a_3)_2 & (a_3)_3 & (a_3)_4 \\ (a_4)_2 & (a_4)_3 & (a_4)_4 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} (a_3)_2 & (a_3)_3 & (a_3)_4 \\ (a_1)_2 & (a_1)_3 & (a_1)_4 \\ (a_4)_2 & (a_4)_3 & (a_4)_4 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + n \begin{vmatrix} (a_1)_2 & (a_1)_3 & (a_1)_4 \\ (a_2)_2 & (a_2)_3 & (a_2)_4 \\ (a_4)_2 & (a_4)_3 & (a_4)_4 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} (a_1)_2 & (a_1)_3 & (a_1)_4 \\ (a_2)_2 & (a_2)_3 & (a_2)_4 \\ (a_3)_2 & (a_3)_3 & (a_3)_4 \end{vmatrix} \right\} : \Delta$$

ossia

$$x_1 = \begin{vmatrix} l & (a_1)_2 & (a_1)_3 & (a_1)_4 \\ m & (a_2)_2 & (a_2)_3 & (a_2)_4 \\ n & (a_3)_2 & (a_3)_3 & (a_3)_4 \\ p & (a_4)_2 & (a_4)_3 & (a_4)_4 \end{vmatrix} : \Delta \, .$$

Analogamente, per le altre proiezioni x_2, x_3, x_4 di $\boldsymbol{x}$.

5. Una nuova formula di calcolo integrale e un teorema della divergenza per i bivettori.

Usando la nozione di iperdiade del secondo ordine, introdotta al paragrafo 2, si può stabilire una nuova formula di calcolo integrale e dedurne un teorema per la divergenza di un bivettore.

Consideriamo la nota formula

$$(33) \qquad \int_{(S)} \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\, dS = -\int_{(\sigma)} H(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u})\, d\sigma \, , \quad [22]$$

dove $\boldsymbol{u}(P)$ è un campo vettoriale differenziabile definito nella regione (S) limitata dalla superficie (σ) ed $\boldsymbol{n}$ è il versore normale nei punti di (σ) e rivolto verso l' interno.

Se $\alpha(P)$ è un' omografia differenziabile in (S) ed $\boldsymbol{a}$ è un vettore costante ed arbitrario, applicando la formula precedente al vettore $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{a}$ avremo

$$\int_{(S)} \frac{d\alpha\boldsymbol{a}}{dP}\, dS = -\int_{(\sigma)} H(\boldsymbol{n}, \alpha\boldsymbol{a})\, d\sigma \, .$$

[22] Cfr. ad esempio P. Burgatti, *Elementi di calcolo vettoriale ed omografico*, [Loc. cit., pag. 157]; oppure C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analisi vettoriale generale*. Vol. I, pag. 232.

Poichè valgono le formule

$$\frac{d\alpha\boldsymbol{a}}{dP} = k\,\frac{d\alpha}{dP}\,\boldsymbol{a}, \quad H(\boldsymbol{n}, \alpha\boldsymbol{a}) = k\,\underset{2}{H}(\boldsymbol{n}, \alpha)\,\boldsymbol{a}\,, \text{ [23]}$$

dove k è l'operatore di Burali-Forti e Boggio per le iperomografie, la precedente dà subito

$$\int_{(S)} \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{a}\,dS = -\int_{(\sigma)} \underset{2}{H}(\boldsymbol{n}, \alpha)\,\boldsymbol{a}\,d\sigma\,;$$

per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a}$ risulta la formula di calcolo integrale

$$\text{(34)} \qquad \int_{(S)} \frac{d\alpha}{dP}\,dS = -\int_{(\sigma)} \underset{2}{H}(\boldsymbol{n}, \alpha)\,d\sigma\,.$$

In una mia nota precedente [24] ho constatato l'utilità di introdurre per il campo bivettoriale $\underset{2}{\boldsymbol{a}}(P)$ una divergenza definita mediante l'assiale α corrispondente ad $\underset{2}{\boldsymbol{a}}$ dalla relazione

$$\text{(35)} \qquad \operatorname{div}\underset{2}{\boldsymbol{a}} = \frac{d\alpha}{dP} + \overline{K}\,\frac{d\alpha}{dP} + \overline{K}^2\frac{d\alpha}{dP} = \mathcal{H}\frac{d\alpha}{dP}\,.$$

Allora, applicando l'operatore $\mathcal{H}$ ai due membri della (34) si ricava per la divergenza di un bivettore la formula integrale

[23] Per la prima cfr. il Vol. I. dell' *Analisi vettoriale generale*, loc. cit., pag. 167, formula (5).

Inoltre se $\boldsymbol{b}$ è un vettore arbitrario costante, si ha

$$H(\boldsymbol{n}, \alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b})\,\alpha\boldsymbol{a} = \underset{2}{H}(\boldsymbol{n}, \alpha)\,\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} = k\,\underset{2}{H}(\boldsymbol{n}, \alpha)\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$

da cui

$$H(\boldsymbol{n}, \alpha\boldsymbol{a}) = k\,\underset{2}{H}(\boldsymbol{n}, \alpha)\,\boldsymbol{a}\,.$$

[24] Cfr. *Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del 3º ordine e applicazione al campo elettromagnetico stazionario.* Nota IIª, loc. cit.

$$\int_{(S)} \operatorname{div} \underset{2}{\boldsymbol{a}}\, dS = -\int_{(\sigma)} \mathcal{H}\, \underset{2}{H}(\boldsymbol{n}, \alpha)\, d\sigma\,, \tag{36}$$

che costituisce un *teorema della divergenza* per i bivettori.

Estendendo il concetto di divergenza di $\boldsymbol{a}$ (e quindi della corrispondente assiale γ) ad un' omografia qualunque (ciò che è in accordo con quanto si fa anche nel calcolo tensoriale), assumendo per definizione

$$\operatorname{div} \alpha = \mathcal{H} \frac{d\alpha}{dP}\,, \tag{37}$$

la formula integrale precedente può scriversi nella forma più generale

$$\int_{(S)} \operatorname{div} \alpha\, dS = -\int_{(\sigma)} \mathcal{H}\, \underset{2}{H}(\boldsymbol{n}, \alpha)\, d\sigma\,. \tag{38}$$