Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Edmondo Morgantini

Teoria delle corrispondenze trilineari tra forme di prima specie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 9 (1938), p. 1-121

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1938__9__1_0>

TEORIA DELLE CORRISPONDENZE TRILINEARI TRA FORME DI PRIMA SPECIE

di EDMONDO MORGANTINI *a Padova* (*)

Introduzione

1. Un' equazione algebrica che leghi più serie di variabili può pensarsi come equazione di una «*corrispondenza*» algebrica tra i punti di spazi astratti opportuni, dove si interpretino come coordinate le variabili di una stessa serie.

Ad un gruppo di punti di spazi diversi «*corrisponde*» un gruppo finito od infinito di punti degli spazi rimanenti, le cui coordinate assieme a quelle dei punti del gruppo dato soddisfano all' equazione della corrispondenza.

Caso elementare e tuttavia notevolissimo è quelle delle corrispondenze proiettive tra due forme di prima specie, dedotte dalla considerazione di una equazione lineare omogenea in due coppie di variabili:

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}y_1x_2 + a_{22}y_2x_2 = 0$$

quandó le x_i e le y_i si pensino come coordinate proiettive omogenee in due forme di prima specie; oppure dalla considerazione della equazione bilineare non omogenea in x, y:

$$axy + bx + cy + d = 0$$

quando x ed y vi si pensino come coordinate non omogenee.

(*) Questo lavoro riproduce con qualche ritocco formale la dissertazione di Laurea in Scienze Matematiche dell' A., discussa il 21 - 2 - 38, relatore il Chiar.mo Prof. A. COMESSATTI, ed eseguita nel Seminario Matematico della R. Università di Padova.

2. Come la corrispondenza bilineare o proiettiva è la più semplice delle corrispondenze algebriche tra due coppie di variabili omogenee (o tra due variabili non omogenee), così la più semplice corrispondenza algebrica tra tre coppie di variabili omogenee (tra tre variabili non omogenee) è la *corrispondenza trilineare.*

La sua equazione « omogenea » è del tipo:

$$(1)\qquad \begin{aligned}\sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl}x_i y_k z_l = a_{111}x_1y_1z_1 + a_{211}x_2y_1z_1 + a_{121}x_1y_2z_1 + \\ + a_{112}x_1y_1z_2 + a_{122}x_1y_2z_2 + a_{212}x_2y_1z_2 + a_{221}x_2y_2z_1 + a_{222}x_2y_2z_2 = 0\end{aligned}$$

dove le a_{ikl} sono 8 costanti complesse qualsiasi, e le x_i, y_k, z_l delle variabili capaci di assumere ogni valore reale o complesso.

Quella « non omogenea » è del tipo:

$$(2)\qquad \begin{aligned}a_{111}xyz + a_{211}yz + a_{121}xz + a_{112}xy + a_{122}x + a_{212}y + \\ + a_{221}z + a_{222} = 0\end{aligned}$$

dove ancora le a_{ikl} sono delle costanti ad x, y, z delle variabili complesse.

Se si pensano le x_i, y_i, z_i e le x, y, z come coordinate proiettive omogenee o risp. non omogenee in tre forme di prima specie Ξ, H, Z, si giunge così per via analitica alla nozione di *corrispondenza trilineare* tra le forme di 1ª specie Ξ, H, Z. La (1) e la (2) ne sono allora la equazione omogenea e la equazione non omogenea.

3. A questa definizione analitica si riduce anche immediatamente quella semplice ed elegante data dallo Schubert: « corrispondenza algebrica, tale che sia unico il corrispondente « sulla terza forma di due elementi presi genericamente (*willkürlich*) sulle prime due [1] ».

Le altre definizioni sintetiche si riducono tutte alla costruzione di una corrispondenza trilineare di tipo generale tra tre

[1] Cfr. Schubert – *Die trilineare Beziehung zwischen 3 einstufigen Grundgebilden,* [Math. Annalen, Bd. XVII (1880)] pag. 457.

particolari modelli proiettivi di forme fondamentali di prima specie. Di esse faremo menzione parlando degli autori che le hanno usate, oppure quando se ne presenterà l'occasione.

4. Come la considerazione della corrispondenza proiettiva tra due forme di prima specie conduce alla costruzione ed allo studio delle varietà quadratiche, così la considerazione della corrispondenza trilineare tra tre forme di 1ª specie conduce alla generazione ed allo studio di varietà cubiche e di loro trasformate birazionali.

Si può anzi affermare che quasi tutti coloro che si sono occupati delle corrispondenze trilineari lo hanno fatto in vista delle sue applicazioni geometriche.

5. Cronologicamente il primo che abbia segnalato la corrispondenza trilineare è stato F. AUGUST ([2]), il quale adopera per costruire le superficie del III O. tre fasci di piani trilineari (o, com' egli dice, *duplo-proiettivi*), e su questa generazione fonda la teoria delle 27 rette della superficie.

Fu poi trattata, sebbene solo incidentalmente, dal ROSANES, che ottenne per primo le sue proprietà essenziali ([3]).

Il primo che però abbia, sempre da un punto di vista essenzialmente geometrico, approfondito lo studio della corrispondenza trilineare è H. SCHUBERT, che la considera come « un nuovo mezzo d' indagine della geometria sintetica » ([4]). Egli ne determina elegantemente le proprietà essenziali e ne studia i casi di degenerazione. Per mezzo di questi risolve poi, servendosi dei suoi metodi di geometria numerativa, tutti i problemi numerativi ad essa inerenti ([5]).

([2]) F. AUGUST – *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis,* [Inaug. Diss., Berolini (1862)].

([3]) Cfr. ROSANES – *Über linear-abhängige Punktsysteme*, [Crelle' s Journal, Bd. 88 (1879)].

([4]) Cfr. nota ([1]).

([5]) Cfr. SCHUBERT – *Lösung des auf die trilineare Beziehung ausgedehnten Proiektivitätsproblems*, [Progr. Hamburg (1882)].

6. Contemporanea alla trattazione sintetica dello SCHUBERT è la comparsa dei primi lavori del LE PAIGE, che si è ripetutamente e minutamente occupato, anche in collaborazione con M. F. FOLIE della corrispondenza trilineare, da lui chiamata *omografia del 3º ordine e del 2º rango* (6).

I suoi lavori trattano la questione specialmente dal punto di vista algebrico della teoria degli invarianti delle forme ternarie, ma mettono pure in evidenza importanti applicazioni geometriche alla teoria delle cubiche piane.

Lo stesso LE PAIGE ha studiato nei suoi lavori anche corrispondenze del tipo lineare tra più di tre forme fondamentali, cioè, secondo la sua denominazione, omografie di ordine e rango qualsiasi (7).

E. WEYR considera queste generalizzazioni di corrispondenze trilineari, specialmente nel caso che divengano involutorie (8).

7. G. CASTELNUOVO definisce sinteticamente la trilinearità – egli la chiama *omografia di seconda specie* o *trilineare* (9) – tra

(6) Dei numerosi lavori di questi due autori sull' argomento ricordiamo i due riassuntivi:

C. LE PAIGE – *Essais de géom. supér. du III^me ordre* [Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liége, II serie, **X** (1883)].

C. LE PAIGE – M. F. FOLIE - *Mém. sur les courbes du III^me ordre*, [Mém. de l' Acad. Roy. de Belgique, Tomo 43 (1882), 2ª parte, mem. n. 7; Tomo 45 (1884), mem. n. 1]. In essi si trovano anche ampie citazioni sulle altre ricerche degli stessi autori sull' argomento. Cronologicamente il primo lavoro del LE PAIGE sulla corrispondenza trilineare è del 1879: « *Sur quelques applications des formes algébriques a la geometrie* » [Mém. cour. et sav. étr. Acad. Belg. 42 (1879)]. Importante è anche il lavoro di C. LE PAIGE: « *Note sur l'homographie du troisième ordre* » [Bull. de l' Acad. Roy. de Belgique, 3^me ser., T. V (1883)], dove è data fra l' altro una classificazione proiettiva delle corrispondenze trilineari.

(7) Cfr. LE PAIGE – *Essais de géom. sup....* (cfr. nota (6)). L' *ordine* indica secondo il LE PAIGE il numero delle forme poste in corrispondenza, il *rango* il grado di libertà di un gruppo di elementi associati.

(8) Cfr. E. WEYR, [Mém. Soc. Sc. Liége, (2) – 10 (1883), mém. n. 3].

(9) Cfr. G. CASTELNUOVO – *Studio sulla omografia di 2ª specie* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Tomo V, serie 6ª (1886-87)], p. 1041. Vedi pure F. ASCHIERI: *Sulle omografie di 2ª specie.* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2) – 23 (1890)] p. 312, ed F. DEYRUTS [Bull. Acad. Belgique (3) - 17 (1889)] p. 312-29.

tre enti ∞^1 *razionali*, di cui assume come modello tre punteggiate sovrapposte ad una stessa cubica gobba di S_3. Le terne di punti associati sono tagliate dai piani che da tre corde della cubica proiettano i punti di un piano fisso.

Questa definizione, ch' egli dimostra essere affatto generale, gli permette di fare interessanti osservazioni sugli insiemi semplicemente infiniti di terne – *serie del primo* o del *secondo sistema* – di elementi omologhi di tre forme razionali ∞^1 fra di loro proiettive. Anche egli applica le sue conclusioni alla teoria delle cubiche piane ed a quella delle superficie del 3° ordine di S_3.

L' aver definito la corrispondenza trilineare tra forme sovrapposte permette al CASTELNUOVO di studiare anche il caso in cui la corrispondenza sia involutoria.

B. KLEIN considera anch' egli il caso in cui due, oppure tutte le tre forme coincidano, ed in quest' ultima alternativa la corrispondenza sia involutoria ([10]).

G. HAUCK in un suo studio sulla corrispondenza trilineare tra forme di 2ª specie dedica un articolo anche alla corrispondenza trilineare tra forme di 1ª specie, che definisce sinteticamente tra tre rette punteggiate complanari associando i punti che da tre centri fissi dello stesso piano ne proiettano un punto variabile ([11]).

In questo studio è posto in evidenza un carattere affine, la *caratteristica* della corrispondenza trilineare, legato alla considerazione dei *punti di fuga* di ciascuna forma, corrispondenti agli elementi impropri delle altre due.

([10]) Cfr. B. KLEIN – *Theorie der trilinear–symmetrischen Elementargebilde* (Habilitationsschrift, Marburg, 1881) – *Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde*, [Annali di Matematica pura e applicata (2) - 18 (1890)] p. 213.

([11]) G. HAUCK - *Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. IV Artikel: Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden*, [Journal für die reine und ang. Mathematik, Bd. CVIII (1891), Heft 1] p. 25.

8. Una trattazione completa della corrispondenza trilineare, svolta con metodo eclettico è stata poi data da F. LONDON [12], che considera la corrispondenza come un *campo di terne* (Tripelfeld), di cui mette in luce la natura razionale e di cui ridimostra le principali proprietà.

Notevole estensione è da lui data alla teoria delle *serie unicursali* e *bicursali di terne*. A queste ultime, che sono gli insiemi di terne comuni ad un fascio di campi di terne, ed ai *gruppi associati* di sei terne comuni ad una rete di campi di terne, è dedicata la seconda parte del suo lavoro [13]. Le serie unicursali corrispondono alle serie del primo e del secondo sistema ehe compaiono nel citato lavoro del CASTELNUOVO.

Quando le forme fondamentali sono tre fasci di piani di S_3, sulla superficie cubica generata dalla corrispondenza ai sistemi di serie unicursali o bicursali di terne del campo corrispondono interessanti sistemi di curve sghembe.

Queste, oltre che dal LONDON sono state studiate servendosi della « *trilinearità* » dallo STURM [14], al quale si deve anche una lucida e concisa esposizione della teoria della nostra corrispondenza in « *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften* » [15].

Un' esposizione concisa e particolarmente ricca di note bibliografiche sui risultati conseguiti fin' allora nella teoria della corrispodenza trilineare è quella contenuta nella sezione F) dell' articolo di A. SCHOENFLIES: *Proiective Geometrie*, nell' Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften [III[ter] Bd., 1[ter] Teil, 1[te] Hälfte (Leipzig, 1907-1910)], p. 374.

Più recentemente CORRADO SEGRE si è occupato della trili-

(12) F. LONDON – *Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde*, [Math. Annalen Bd. 44 (1894]], p. 375.

(13) F. LONDON – *Die Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlechte 1 als Erzeugniss trilinearer Grundgebilde*, [Math. Annalen, Bd. 45 (1895)], p. 545.

(14) R. STURM – *Flächen III Ordnung*, (Leipzig, Teubner, 1867).

(15) R. STURM – *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschften*, (Leipzig, 1908), I[ter] Band, p. 319, § 33. Il termine «*trilinearità*» appare per la prima volta nei lavori dello stesso STURM.

nearità tra tre punteggiate indipendenti, nei suoi rapporti con la teoria dei complessi lineari di piani in S_5 [16].

Per il suo carattere precipuo di generalizzazione della corrispondenza proiettiva la teoria della trilinearità trova posto adeguato anche nei più ampi trattati scolastici moderni di geometria proiettiva. Mi sia consentito ricordare ad es. quello del prof. Comessatti [17].

Capitolo I.

Caso generale per forme qualsiasi

9. Date tre forme di prima specie qualsiasi Ξ, H, Z, in cui siano risp. prefissati i sistemi di coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), supponiamo che i loro elementi si corrispondano in una trilinearità di equazione

$$(1) \qquad f(x, y, z) \doteq \sum_{i, k, l = 1, 2} a_{ikl} x_i y_k z_l = 0 .$$

Le a_{ikl} si penseranno dapprima scelte genericamente (come preciseremo in seguito) in modo da non pregiudicare la generalità della corrispondenza.

Una coppia di elementi di due forme diverse *determina* in generale il corrispondente sull' altra forma, le cui coordinate si traggono linearmente dalla (1) dopo avervi sostituito quelle della coppia data.

Si viene così a costruire la corrispondenza come un insieme di ∞^2 *terne*, un *campo di terne*. Se la trilinearità è reale [18],

[16] C. Segre - *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni* [Annali di Matematica, serie III, Tomo XXVII (1917-18)], p. 75.

[17] A. Comessatti - *Geometria Analitica e Proiettiva* (Padova, 1931), II, n. 101, p. 92.

[18] Cioè quando le a_{ikl} sono proporzionali a numeri reali. (Quì ed in seguito parlando di trilinearità reali si suppongono implicitamente reali le forme e, su di esse, i sistemi di coordinate).

ad una coppia di elementi reali corrisponde un terzo elemento reale, cosicchè essa contiene ∞^2 terne reali.

La (1) si può anche scrivere:

$$(3) \qquad x_1 \sum_{k,\, l=1,\, 2} a_{1kl}\, y_k\, z_l + x_2 \sum_{k,\, l=1,\, 2} a_{2kl}\, y_k\, z_l = 0 \,,$$

o analogamente:

$$(3') \qquad y_1 \sum_{i,\, l} a_{i1l}\, x_i\, z_l + y_2 \sum_{i,\, l} a_{i2l}\, x_i\, z_l = 0 \,,$$

$$(3'') \qquad z_1 \sum_{i,\, k} a_{ik1}\, x_i\, y_k + z_2 \sum_{i,\, k} a_{ik2}\, x_i\, y_k = 0 \,.$$

Quindi ad un elemento (x_1, x_2) di una delle tre forme date, ad es. di Ξ, non corrisponde una sola coppia di elementi delle altre due, ma tutte le ∞^1 della proiettività «*corrispondente*» (x_1, x_2) del fascio (3).

Viceversa dalla (3) e dalle analoghe risulta che una corrispondenza trilineare può sempre pensarsi ottenuta facendo corrispondere proiettivamente ad una delle forme fondamentali un fascio di proiettività tra le altre due. Infatti, cambiato eventualmente il riferimento proiettivo nel fascio o nella forma per ottenere che ogni proiettività abbia i moltiplicatori uguali alle coordinate dell'elemento omologo, la corrispondenza è rappresentata da una equazione di tipo (3), e quindi è una trilinearità.

Dalla linearità delle trasformazioni proiettive e dalla forma della (1) risulta immediatamente che *forme proiettive a forme trilineari sono trilineari.*

10. Una coppia di elementi di due forme diverse, ad es. H e Z, non determina il corrispondente su Ξ solo quando è comune alle due proiettività (fondamentali)

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k,\, l=1,\, 2} a_{1kl}\, y_k\, z_l = 0 \,, \\ &\sum_{k,\, l=1,\, 2} a_{2kl}\, y_k\, z_l = 0 \,, \end{aligned} \right.$$

e quindi a tutte quelle del fascio (3). Una coppia siffatta dicesi *singolare* o *neutra*.

Le (4) hanno due coppie in comune. Infatti eliminando ad es. dalle (4) y_1 ed y_2 (il loro rapporto), si ottiene l'equazione:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_l a_{11l} z_l & \sum\limits_l a_{12l} z_l \\ \sum\limits_l a_{21l} z_l & \sum\limits_l a_{22l} z_l \end{vmatrix} = \sum_{r,l=1,2} (a_{11l} a_{22r} - a_{12l} a_{21r}) z_l z_r =$$

$$(5'') \qquad = (a_{111} a_{221} - a_{121} a_{211}) z_1^2 + (a_{111} a_{222} - a_{121} a_{212} + a_{112} a_{221} - a_{122} a_{211}) z_1 z_2 + \\ + (a_{112} a_{222} - a_{122} a_{212}) z_2^2 = 0 \,,$$

di secondo grado in $\frac{z_1}{z_2}$, che in generale avrà *due* radici distinte, i cui valori sostituiti in una delle (4) porgono *linearmente* le coordinate degli altri due elementi delle due coppie singolari.

Analogamente anche i fasci (3') e (3'') posseggono ognuno due coppie in comune, cosicchè in generale nella trilinearità vi sono *sei* coppie singolari.

Bisogna però osservare che su ogni forma vi sono solo *due elementi singolari*, tali cioè che appartengano ad una coppia singolare. Infatti ad es. le due coppie comuni alle proiettività del fascio (3) e le altre due comuni a quelle del fascio (3') hanno su Z gli stessi elementi singolari, giacchè eliminando x_1, x_2 dalle equazioni delle proiettività fondamentali del fascio (3') si perviene ancora alla (5''). Basta pensare che ciò equivale a mutare le veci di Ξ ed H, cioè a scambiare nei coefficienti della (5'') i primi indici coi secondi, scambio che la lascia evidentementi immutata (19).

(19) Ciò risulta anche immediatamente se si osserva che la (5'') si può scrivere:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_2} \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Cfr. Le Paige: *Mém. sur les courbes du 3me ordre*, [Mém. Acad. Belg. 43_2, mem. n. 7], p. 6.

11. Dal numero precedente risulta che su ciascuna forma ogni elemento singolare appartiene a due coppie neutre, cui è associato da due elementi singolari di forme diverse fra loro e dalla data.

In altre parole dato un elemento singolare c'è uno ed un solo elemento singolare di un'altra forma che con esso costituisca una coppia neutra, giacchè lo si determina linearmente servendosi del primo, ad es. mediante una delle proiettività fondamentali di uno dei fasci (3), (3'), (3'').

Quindi esistono e sono distinti su H e Z gli elementi singolari S_2', S_1'; S_2'', S_1'' che si accoppiano rispettivamente con

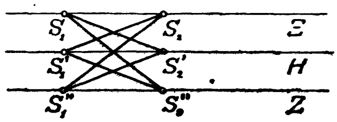


Fig. 1

quelli (distinti) S_1 ed S_2 di Ξ. Allora la trilinearità ammette le terne $S_1 S_1' S_2''$; $S_2 S_1' S_2''$, giacchè alle coppie singolari $S_1 S_2''$ ed $S_2 S_1'$ corrisponde un elemento qualsiasi della forma rimanente. Quindi anche $S_1' S_2''$ è una coppia singolare perchè ad essa corrispondono i due elementi distinti S_1 ed S_2 (e perciò anche ogni altro elemento di Ξ). Infine non resta altra possibilità per S_1'' diversa da quella di accoppiarsi con S_2'.

Concludendo: si possono sempre scegliere le notazioni in modo che gli elementi singolari S_1, S_2; S_1', S_2'; S_1'', S_2'' si accoppino com'è indicato nello schema della fig. 1. *In una coppia singolare entrano quindi solo lettere con apice ed indice diverso.*

È da notare la simmetria del comportamento degli elementi singolari $S_1^{(i)}$ ed $S_2^{(i)}$. Per essa è lecito cambiare contemporaneamente su ogni forma gli indici inferiori degli elementi singolari. Ad ogni proprietà di $S_1^{(i)}$ corrisponde perciò l'analoga di $S_2^{(i)}$.

Siamo risaliti dalle coppie neutre agli elementi singolari. Questi si potevano però caratterizzare anche indipendentemente, come *quelli la cui proiettività corrispondente è degenere.*

Infatti quando su di una forma l'elemento variabile cade in un elemento singolare, la proiettività corrispondente degenera, perchè l'elemento singolare delle altre due forme che col primo costituisce una coppia neutra ha l' omologo indeterminato. Per questa coppia nella trilinearità, per quell' elemento nella proiettività è allora indeterminato il corrispondente sulla terza forma.

Ne risulta anche che *appena una terna contiene un elemento singolare, contiene necessariamente una coppia singolare.*

Le due definizioni degli elementi singolari coincidono, giacchè ad es. la condizione cui devono soddisfare z_1 e z_2 perchè la proiettività (3″) sia degenere:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_t a_{11t} z_t & \sum\limits_t a_{12t} z_t \\ \sum\limits_t a_{21t} z_t & \sum\limits_t a_{22t} z_t \end{vmatrix} = 0 ,$$

è ancora la (5″)

12. Le equazioni analoghe alla (5″) degli elementi singolari di Ξ e di H sono:

$$\begin{aligned} (5) \qquad & \sum_{i,s} (a_{i11} a_{s22} - a_{i12} a_{s21}) x_i x_s = (a_{111} a_{122} - a_{112} a_{121}) x_1^2 + \\ & + (a_{111} a_{222} - a_{112} a_{221} + a_{211} a_{122} - a_{212} a_{121}) x_1 x_2 + \\ & + (a_{211} a_{222} - a_{212} a_{221}) x_2^2 = 0 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5') \qquad & \sum_{k,t} (a_{1k1} a_{2t2} - a_{2k1} a_{1t2}) y_k y_t = (a_{111} a_{212} - a_{211} a_{112}) y_1^2 + \\ & + (a_{111} a_{222} - a_{211} a_{122} + a_{121} a_{212} - a_{221} a_{112}) y_1 y_2 + \\ & + (a_{121} a_{222} - a_{221} a_{122}) y_2^2 = 0 . \end{aligned}$$

È da notare che esse si possono ottenere (come era prevedibile a priori) dalla (5″) scambiando una prima volta i terzi con i primi indici e z con x, una seconda volta z con y ed i terzi indici con i secondi. Ciò equivale infatti a mutare le voci delle forme fondamentali Z e Ξ, Z ed H.

Il discriminante della (5″) è:

$$\begin{aligned} \Delta(a) = {} & a_{111}^2 a_{222}^2 + (a_{112}^2 a_{221}^2 + a_{211}^2 a_{122}^2 + a_{212}^2 a_{121}^2) - \\ & - 2 a_{111} a_{222} (a_{112} a_{221} + a_{211} a_{122} + a_{212} a_{121}) - \\ (6) \qquad & - 2 (a_{112} a_{221} a_{211} a_{122} + a_{112} a_{221} a_{212} a_{121} + a_{211} a_{122} a_{212} a_{121}) + \\ & + 4 (a_{111} a_{122} a_{212} a_{221} + a_{112} a_{121} a_{211} a_{222}) . \end{aligned}$$

Nella sua espressione si osserva che gli addendi messi in evidenza rimangono inalterati qualora si scambino i terzi indici coi primi o coi secondi. Dunque anche i discriminanti della (5) e della (5′) hanno la stessa espressione (6) di quello della (5″).

Ciò vuol dire che *se in una forma gli elementi singolari coincidono, lo stesso accade nelle altre due.*

Nel caso delle *trilinearità reali*, si può precisare ulteriormente:

Se in una delle tre forme gli elementi singolari sono distinti e reali, o distinti, ma immaginari e coniugati, o coincidenti (e questi sono gli unici casi che si possono presentare, dato che su ciascuna forma gli elementi singolari costituiscono una « coppia reale »), lo stesso accade nelle altre due forme.

Chiameremo questi tre tipi di trilinearità reali rispettivamente: trilinearità *iperbolica*, trilinearità *parabolica*, trilinearità *ellittica*.

Ci riserviamo però di precisare ulteriormente quando annullandosi Δ, cha d'ora in poi diremo il *discriminante della corrispondenza* (o della forma) trilineare (1), si possono ancora parlare di elementi singolari nel significato finora acquisito dal termine.

13. Alla considerazione della relazione trilineare (1) conviene talvolta associare quella della *matrice cubica* ([20]) dei suoi 8 coefficienti a_{ikl}

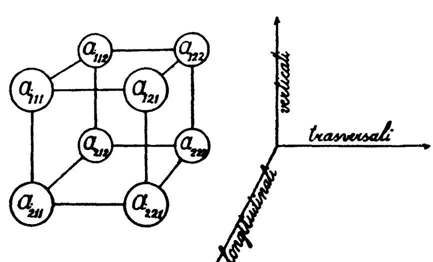


Fig. 2

che ben si presta a porne in luce alcune simmetrie.

([20]) Cfr. E. Pascal - *I Determinanti*, (Hoepli, 1897), pag. 241.

Osserviamo anzitutto che le sue « *facce* » sono [21] i moduli delle proiettività fondamentali dei fasci (3), (3′), (3″).

Operiamo sulle x la trasformazione lineare:

$$x_i = \sum_{r=1,2} \beta_{ir}\, \xi_r \,, \tag{8′}$$

ossia precisamente:

$$x = B^{-1}\xi \qquad \left(x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}\right),$$

dove $B = \| b_{ir} \|$ è la matrice della trasformazione diretta $\xi = Bx$.

La relazione trilineare trasformata delle (1) mediante le (8′) è:

$$f(\xi, y, z) = \sum_{ikl} a_{ikl} \sum_r \beta_{ir}\, \xi_r\, y_k\, z_l =$$

$$= \sum_{r,k,l} \sum_i a_{ikl}\, \beta_{ir}\, \xi_r\, y_k\, z_l = \sum_{r,k,l} \alpha_{rkl}\, \xi_r\, y_k\, z_l = 0 \,,$$

dove evidentemente i nuovi coefficienti α sono legati ai vecchi a dalle relazioni:

$$\alpha_{rkl} = \sum_i \beta_{ir}\, a_{ikl} \,,$$

che con le stesse convenzioni che in (8′) possiamo scrivere concisamente:

$$\alpha_{*kl} = B_{-1}^{-1}\, a_{*kl} \,. \tag{9′}$$

Nelle (9′) l' asterisco sta ad indicare l' indice che varia.

[21] Eventualmente a meno del segno, se si lavora esclusivamente nel campo reale. Se però come reale si intende una proiettività tale che i coefficienti della sua equazione siano *proporzionali* a numeri reali, il fattore di proporzionalità potendo anche essere complesso, il segno del modulo non è determinato.

In altre parole si è posto:

$$\alpha_{*kl} = \left\| \begin{array}{c} \alpha_{1kl} \\ \alpha_{2kl} \end{array} \right\| .$$

D' altra parte è noto ([22]) che se ad es. si pone:

$$(a_{*11}\, a_{*21}) = \left| \begin{array}{cc} a_{111} & a_{121} \\ a_{211} & a_{221} \end{array} \right| ,$$

tra simili determinanti si hanno, conseguentemente alle (9), le relazioni:

$$(10) \qquad (\alpha_{*kl}\, \alpha_{*mn}) = |\, B_{-1}^{-1} \,|\, (a_{*kl}\, a_{*mn}) ,$$

dove k, l; m, n sono due diverse disposizioni con ripetizione degli indici 1, 2. Poichè $|\, B_{-1}^{-1} \,| = |\, B \,|^{-1}$, con riguardo alla matrice cubica ed alla posizione che gli abbiamo dato in fig. 2, le (10) possono espressivamente enunciarsi:

Le sezioni « verticali » della matrice cubica dei coefficienti sono invarianti di peso — 1 *rispetto alle trasformazioni lineari delle x.*

Analogamente applicando alle y ed alle z delle generiche trasformazioni lineari C e D, cioè ponendo nella (1) una volta:

$$(8'') \qquad y_k = \sum_{s=1}^{2} \gamma_{ks}\, \eta_s , \quad \text{cioè} \quad y = C^{-1}\, \eta ,$$

ed un' altra volta:

$$(8''') \qquad z_l = \sum_{t=1}^{2}{}' \delta_{lt}\, \zeta_t , \quad \text{cioè} \quad z = D^{-1}\, \zeta ,$$

si prova che, essendo nei due casi i coefficienti della relazione trilineare trasformata legati ai vecchi dalle:

$$(9'') \qquad \alpha_{i*l} = C_{-1}^{-1}\, a_{i*l} ,$$

([22]) Cfr. ad es. Comessatti ([17]) II, pag. 8.

e risp. dalle:

(9''') $$\alpha_{ik*} = D_{-1}^{-1}\, a_{ik*},$$

le sezioni « *trasversali* »

$$(a_{i*l},\quad a_{m*n}),$$

e risp. « *longitudinali* »

$$(a_{ik*},\quad a_{mn*}),$$

della matrice cubica sono invarianti di peso -1 rispetto alle trasformazioni lineari delle y e delle z.

Ciò poteva anche dedursi immediatamente scambiando l' ufficio di Ξ, H, Z.

14. Osserviamo ora che in base alle precedenti convenzioni, le (5), (5'), (5'') possono scriversi:

(5_1) $$\sum_{i,s} (a_{i1*},\quad a_{s2*})\, x_i x_s = 0,$$

($5'_1$) $$\sum_{k,t} (a_{*k1},\quad a_{*t2})\, y_k y_t = 0,$$

($5''_1$) $$\sum_{r,l} (a_{1*l},\quad a_{2*r})\, z_l z_r = 0.$$

Quindi i loro coefficienti sono rispettivamente invarianti di peso -1 per trasformazioni lineari delle x, delle y e delle z.

Ma $\Delta(a)$, discriminante comune della (5), (5'), (5''), può pensarsi come un' espressione omogenea di 2° grado di quei coefficienti, e quindi è invariante di peso -2 sia rispetto alle trasformazioni lineari delle x, che a quelle delle y e delle z.

Il discriminante $\Delta(a)$ della trilinearità è dunque un *invariante di peso pari* di fronte alle trasformazioni lineari delle x, delle y e delle z.

15. Siamo ora in grado di precisare che per trilinearità *generale* intendiamo una trilinearità (*duplosingolare,* secondo Hauck), tale che il suo discriminante sia diverso da zero.

Diremo invece *singolare* una trilinearità tale che il suo discriminante sia nullo.

Poichè i coefficienti dell' equazione di una trilinearità singolare devono soddisfare alla condizione algebrica:

$$\Delta(a) = 0\,, \tag{11}$$

i suoi parametri essenziali sono 6 e non 7 come nel caso generale. Quindi, costituendo le trilinearità singolari un insieme ∞^6 di dimensione inferiore a quella della totalità ∞^7 di tutte le corrispondenze trilineari, risulta giustificata la qualifica di *generali* data alle corrispondenze non singolari.

16. Consideriamo una trilinearità generale, di equazione:

$$\sum_{i,k,l} a_{ikl}\, x_i\, y_k\, y_l = 0\,. \tag{1}$$

Operiamo sulle x, y, z le trasformazioni lineari (8′), (8″), (8‴).

Le nuove variabili ξ, η, ζ sono ancora legate trilinearmente fra loro, e la equazione della trilinearità trasformata della (1) mediante le (8) ([23]) si ottiene ponendo nella (1) stessa le espressioni delle x_i, y_k, z_l in funzione delle trasformate ξ_r, η_s, ζ_t:

$$\sum_{i,k,l} a_{ikl} \sum_r \beta_{ir}\, \xi_r \sum_s \gamma_{ks} \eta_s \sum_t \delta_{lt}\, \zeta_t = \sum_{r,s,t} \sum_{ikl} a_{ikl}\, \beta_{ir}\, \gamma_{ks}\, \delta_{lt}\, \xi_r\, \eta_s\, \zeta_t =$$

$$= \sum_{r,s,t=1,2} \alpha_{rst}\, \xi_r\, \eta_s\, \zeta_t = 0\,, \tag{1'}$$

dove

$$\alpha_{rst} = \sum_{i,k,l=1,2} a_{ikl}\, \beta_{ir}\, \gamma_{ks}\, \delta_{lt}\,, \qquad (r,\, s,\, t = 1,\, 2)\,. \tag{12}$$

([23]) Cioè, se si pensano le (8), (8′), (8″) come proiettività da Ξ, H, Z ad altre forme Ξ′ H′ Z′ (eventualmente sovrapposte alle precedenti), quella che conseguentemente alla (1) lega gli elementi ξ, η, ζ corrispondenti di x, y, z. Se le (8), (8′), (8″) si pensano come trasformazioni di coordinate, cioè se $x_i\, y_k\, z_l$ e $\xi_r\, \eta_s\, \zeta_t$ sono le coordinate di una stessa terna riferita a due differenti sistemi, la trilinearità rimane la stessa, e quello che si trasforma (formalmente come nella prima accezione) è la forma della sua equazione.

Confrontando la (12) con la (1) si riconosce che si ha $\alpha_{rst} = 0$ quando gli elementi «fondamentali» ([24]) (β_{1r}, β_{2r}), $(\gamma_{1s}, \gamma_{2s})$, $(\delta_{1t}, \delta_{2t})$ della trasformazione (8) costituiscono una terna della vecchia trilinearità (1).

Poichè le (8) sono arbitrarie poniamone gli elementi fondamentali (β_{1r}, β_{2r}), $(\gamma_{1s}, \gamma_{2s})$, $(\delta_{1t}, \delta_{2t})$ rispettivamente negli elementi singolari S_r, S'_s, S''_t di Ξ, H, Z. Nel caso da noi supposto che la trilinearità (1) sia generale, i sei elementi singolari di Ξ, H, Z formano le terne:

$$S_1\, S'_2\, S''_2 \qquad S_1\, S'_2\, S''_1 \qquad S_1\, S'_1\, S''_2 \qquad S_2\, S'_1\, S''_1 \qquad S_2\, S'_1\, S''_2 \qquad S_2\, S'_2\, S''_1$$

ed esse sole. Quindi nella (1′) sono nulli i coefficienti:

$$\alpha_{122}\,, \quad \alpha_{121}\,, \quad \alpha_{112}\,, \quad \alpha_{211}\,, \quad \alpha_{212}\,, \quad \alpha_{221}$$

cioè essa è del tipo:

$$\alpha_{111}\, \xi_1\, \eta_1\, \zeta_1 + \alpha_{222}\, \xi_2\, \eta_2\, \zeta_2 = 0\,. \tag{13}$$

Con una ulteriore trasformazione del tipo

$$\xi'_1 = \alpha_{111}\, \xi_1 \qquad \xi'_2 = -\,\alpha_{222}\, \xi_2$$

su una delle tre coppie di variabili la si può ridurre addirittura alla *forma canonica principale*:

$$\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1 - \xi_2\, \eta_2\, \zeta_2 = 0\,. \tag{13′}$$

Viceversa ogni corrispondenza trilineare la cui equazione sia del tipo (13′) è generale, ed in essa gli elementi fondamentali (1, 0), (0, 1) delle tre forme sono gli elementi singolari S_1, S_2; S'_1, S'_2; S''_1, S''_2. Inoltre i tre elementi unità costituiscono una terna di elementi corrispondenti.

([24]) Cioè, se si pensano le (8) come proiettività, quelli che hanno per corrispondenti gli elementi fondamentali delle coordinate; se si pensano le (8) come trasformazioni di coordinate, gli elementi fondamentali del nuovo sistema.

Se gli elementi fondamentali, cioè corrispondenti di:

$$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1 = 1; \quad \xi_2, \eta_2, \zeta_2 = 0), \quad (\xi_1, \eta_1, \zeta_1 = 0; \quad \xi_2, \eta_2, \zeta_2 = 1)$$

si pongono ancora negli elementi singolari $S^{(j)}$, ma non nella maniera dichiarata sopra, si giunge ancora ad una forma ridotta, che differisce dalla (13) per uno o più scambi *tra i due termini* degli indici di egual posto.

17 Noti gli elementi singolari ed una terna U, U', U'' di una trilinearità generale, se assumiamo quelli come elementi fondamentali e gli elementi di questa come elementi unità sulle tre forme, la sua equazione deve ridursi al tipo (23), anzi dovendo essere $\alpha_{111} = -\alpha_{222}$, addirittura al tipo (13'). Quindi è *determinata* ed *unica* la trilinearità di cui siano dati gli elementi singolari ed una terna di elementi corrispondenti.

In coordinate non omogenee la (13') si scrive:

$$\xi\,\eta\,\zeta = 1\,. \tag{13''}$$

Per quanto precede e per note ([25]) proprietà dei birapporti, la (13'') si può scrivere:

$$(P_1\,P_2\,U\,X)\;(P'_1\,P'_2\,U'\,Y)\;(P''_1\,P''_2\,U''\,Z) = 1\,, \tag{14}$$

dove P_1, P_2; P'_1, P'_2; P''_1, P''_2 sono gli elementi singolari ed U, U', U''; X, Y, Z due terne qualsiasi di elementi corrispondenti della trilinearità generale data ([26]).

La (14), che è indipendente dalle trasformazioni proiettive di Ξ, H, Z, può anche servire per una definizione sintetica della trilinearità generale. In particolare da essa risultano le proprietà già note degli elementi singolari, alle quali la (14) conferma il carattere dell'invarianza di fronte alle proiettività di Ξ, H, Z.

([25]) Cfr. Comessatti, op. cit., II, pag. 14.

([26]) Questa proprietà, già nota all'August ([2]), è elegantemente dimostrata dallo Schubert ([1]), pag. 460.

18. Data una trilinearità generale, per determinare le trasformazioni proiettive dei sostegni che la mutano nella trilinearità (13′) occorre dunque e basta conoscere le coordinate dei suoi elementi singolari. Queste si ottengono, dopo aver risolto *una* delle equazioni quadratiche (5), mediante operazioni lineari sulle sue radici.

Quindi nel campo complesso tutte le trilinearità generali sono proiettivamente ([27]) equivalenti.

Infatti, se B, C, D e B', C' D' sono le proiettività di Ξ, H, Z che trasformano in quella di equazione (13′) rispettivamente due trilinearità generali T_1 e T_2, le trasformazioni $B'^{-1} \cdot B$, $C'^{-1} \cdot C$, $D'^{-1} \cdot D$ mutano T_1 in T_2.

19. Per le trilinearità reali la possibilità della riduzione a forma canonica mediante trasformazioni di coordinate (a coefficienti) reali, cioè la possibilità di essere trasformate nella (13′) mediante proiettività reali, dipende dalla sola irrazionalità quadratica che si introduce risolvendo una delle (5), ed in definitiva dal segno positivo o meno del loro discriminante comune $\Delta(a)$ ([28]).

Abbiamo dimostrato che $\Delta(a)$ è un invariante fondamentale di peso pari di fronte alle trasformazioni proiettive. Se si tratta di proiettività reali, i loro moduli sono necessariamente dei numeri reali. Ma allora i quadrati dei moduli sono sempre positivi, assieme ai loro inversi. Quindi *il segno del discriminante* di una trilinearità reale è invariante di fronte alle proiettività reali. Possiamo perciò affermare che condizione *necessaria* perchè due trilinearità generali siano equivalenti rispetto alle proiettività reali è che i loro discriminanti abbiano lo stesso segno.

Vogliamo far vedere che questa condizione è anche *sufficiente.*

Consideriamo dapprima il caso di due *trilinearità iperboliche* T_1 e T_2. Allora le coordinate dei punti singolari sono reali, e quindi mediante proiettività reali T_1 e T_2 possono trasformarsi

([27]) Cioè di fronte alle trasf. proiettive dei sostegni (che si immaginano distinti) in sè.

([28]) Il segno di $\Delta(a)$, come risulta dalla sua espressione (6), non dipende dal fattore di proporzionalità a meno del quale i coefficienti della (1) sono determinati.

nella trilinearità (13'). Ma in tal caso si dimostra come in generale che esistono, e sono reali, le proiettività che mutano T_1 in T_2.

In altre parole T_1 e T_2 sono equivalenti fra loro difronte alle proiettività reali, in quanto lo sono singolarmente alla (13'), cioè all'unica e determinata trilinearità (reale) che abbia gli elementi singolari $S_i^{(j)}$ nei punti fondamentali $P_i^{(j)}$ delle coordinate, ed in cui gli elementi unità si corrispondano.

20. Consideriamo ora il caso delle *trilinearità ellittiche.*

Se T è una tale trilinearità, per la definizione di discriminante, dalle (5) si ricava che su ciascuna forma le coordinate non omogenee dei suoi elementi singolari sono immaginarie e coniugate.

Quelle omogenee sono:

$$(15)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1 \pm i b_1 \\ x_2 = c_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = a_2 \pm i b_2 \\ y_2 = c_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 = a_3 \pm i b_3 \\ z_2 = c_3 \end{cases},$$

dove a_i, b_i, c_i sono numeri reali.

Poichè T è reale ammette sempre almeno una terna reale. Con opportune trasformazioni proiettive reali trasformiamola nella terna dei punti fondamentali P_2, P'_2, P''_2 delle tre forme.

Successivamente con le proiettività reali;

$$(16)\qquad \begin{cases} \xi_1 = c_1 x_1 - a_1 x_2 \\ \xi_2 = \qquad\quad b_1 x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \eta_1 = c_2 y_1 - a_2 y_2 \\ \eta_2 = \qquad\quad b_2 y_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \zeta_1 = c_3 z_1 - a_3 z_2 \\ \zeta_2 = \qquad\quad b_3 z_2 \end{cases}$$

trasformiamo i punti singolari nei punti di coordinate $(\pm i, 1)$.

Le (16) lasciano fissi P_2, P'_2, P''_2. In definitiva siamo venuti a riconoscere che ogni trilinearità ellittica è equivalente a (può trasformarsi con proiettività reali in) quella unica e determinata avente gli elementi singolari $S_1^{(j)}$, $S_2^{(j)}$ negli elementi $(\pm i, 1)$, e in cui si corrispondono anche gli elementi impropri P_2, P'_2, P''_2. Quindi tutte le trilinearità ellittiche sono equivalenti di fronte alle proiettività reali.

Quanto precede, se le trasformazioni proiettive che vi intervengono si pensano come trasformazioni di coordinate, ci permette di dare, ricorrendo alla (14), una forma ridotta a cui nel campo reale si possono ridurre le equazioni di tutte le trilinearità ellittiche. Infatti, nel nostro caso, usando coordinate non omogenee, la (14) diviene:

$$(i, -i, \infty, \xi)\ (i, -i, \infty, \eta)\ (i, -i, \infty, \zeta) = 1,$$

cioè:

$$\frac{\xi + i}{\xi - i} \cdot \frac{\eta + i}{\eta - i} \cdot \frac{\zeta + i}{\zeta - i} = 1,$$

che ridotta a forma intera si scrive:

$$(17) \qquad \xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi = 1.$$

È da notare che il ragionamento precedente cadrebbe in difetto quando nelle (15) fosse nullo uno dei c_k $(k = 1, 2, 3)$. Ma ciò non può essere, chè appena un elemento singolare fosse improprio, sarebbe reale, e quindi la trilinearità non potrebbe essere ellittica.

21. Interpretiamo le variabili che compaiono nella equazione della trilinearità:

$$a_{111} x_1 y_1 z_1 + a_{211} x_2 y_1 z_1 + a_{121} x_1 y_2 z_1 + a_{112} x_1 y_1 z_2 + a_{122} x_1 y_2 z_2 +$$
$$+ a_{212} x_2 y_1 z_2 + a_{221} x_2 y_2 z_1 + a_{222} x_2 y_2 z_2 = 0$$

come *ascisse* omogenee nelle tre forme Ξ, H, Z, e cerchiamo di determinare le più notevoli proprietà della corrispondenza che rimangono invariate di fronte alle trasformazioni lineari (cambiamenti di ascisse o similitudini) che lasciano fisso l'elemento improprio del riferimento.

Queste proprietà chiameremo metriche, e per esse adotteremo il linguaggio della geometria metrica.

Ad es., poichè è sempre vero che l'annullarsi di un coefficiente a_{ikl} esprime la condizione necessaria e sufficiente che nella trilinearità si corrispondano gli elementi fondamentali $P_i\ P'_k\ P''_l$ $(i, k, l = 1, 2)$ di Ξ, H, Z, così la relazione $a_{111} = 0$

che esprime il corrispondersi degli elementi impropri sarà metricamente invariante nel senso suddetto.

Si osservi anzitutto che la (14) può scriversi:

$$\frac{(S_1\, S_2\, U)}{(S_1\, S_2\, X)} \cdot \frac{(S_1'\, S_2'\, U')}{(S_1'\, S_2'\, Y)} \cdot \frac{(S_1''\, S_2''\, U'')}{(S_1''\, S_2''\, Z)} = 1\,,$$

dove ogni parentesi indica come al solito il rapporto semplice della terna ordinata che contiene ([29]).

Se immaginiamo la trilinearità generale determinata mediante i suoi elementi singolari e la terna $U\, U'\, U''$, ogni altra terna $X\, Y Z$ è astretta dalla relazione:

$$(14') \qquad (S_1\, S_2\, X)\; (S_1'\, S_2'\, Y)\; (S_1''\, S_2''\, Z) = K\,,$$

dove evidentemente:

$$(14'') \qquad K = (S_1\, S_2\, U)\; (S_1'\, S_2'\, U')\; (S_1''\, S_2''\, U'')\,.$$

Come la (14) esprime la proprietà proiettiva fondamentale della corrispondenza trilineare generale, così la (14′), attesa l'invarianza dei rapporti semplici che vi compaiono di fronte alle similitudini, ne è la relazione metrica fondamentale e caratteristica.

22. Di quei rapporti non si altera il valore se si opera sulle forme una similitudine od un cambiamento di ascisse, quindi K può pensarsi come un invariante metrico fondamentale della trilinearità generale.

Lo diremo con Hauck *caratteristica* della corrispondenza.

Perchè i rapporti semplici che compaiono nella (14) abbiano un valore determinato, occorre fissare a priori quale dei due elementi singolari si debba su ciascuna forma chiamare $S_1^{(i)}$ e quale $S_2^{(i)}$. Tuttavia, come abbiamo già osservato al n. 11, e come viene confermato dalla (14′), è in nostro potere scambiare contemporaneamente gli indici degli elementi singolari di ciascuna

([29]) Cfr. ad es. per la retta: Comessatti ([17]), I, pag. 7.

forma, senza che la trilinearità venga alterata. Infatti se $X\,Y\,Z$ è una terna della trilinearità T determinata (n. 17) dagli elementi singolari $S_1\,S_2$, $S_1'\,S_2'$, $S_1''\,S_2''$ e dalla terna U, U', U'', essa soddisferà alla (14′), essendo K dato dalla (14″).

Mutando contemporaneamente l'ufficio dei due elementi singolari di ogni sostegno, la (14′) diviene:

$$(S_2\,S_1\,X)\;(S_2'\,S_1'\,Y)\;(S_2''\,S_1''\,Z) = \frac{1}{K}.$$

Inoltre la (14″) porge:

$$\frac{1}{K} = (S_2\,S_1\,U)\;(S_2'\,S_1'\,U')\;(S_2''\,S_1''\,U'').$$

Dunque $X\,Y\,Z$ è anche una terna della trilinearità T' determinata dagli elementi singolari $S_2\,S_1$, $S_2'\,S_1'$, $S_2''\,S_1''$ (nell'ordine) e dalla terna $U\,U'\,U''$. Perciò T e T' coincidono terna a terna, come volevamo dimostrare.

Abbiamo veduto che con lo scambio contemporaneo degli indici degli elementi singolari di ciascuna forma il valore della caratteristica K si muta nel suo reciproco $\frac{1}{K}$. Da quanto precede risulta quindi che è vero che la caratteristica si può assumere come invariante metrico, ma ciò non va inteso nel senso di una corrispondenza *biunivoca* tra i tipi metricamente *distinti* di trilinearità generali ed i suoi valori, in quanto che ad una stessa omografia trilineare pertingono i due valori diversi K ed $\frac{1}{K}$ (ed essi soli).

Vi sono perciò ∞^1 tipi di trilinearità metricamente *distinte*, in corrispondenza [1, 2] coi valori di K. Non è però detto che tutte le trilinearità di un tipo siano metricamente equivalenti, come vedremo in seguito.

23. Il significato geometrico della caratteristica lo si consegue dalla (14′), osservando che quando si fanno tendere due elementi della terna corrispondente, ad es. Y e Z, all'elemento improprio, allora i rapporti relativi tendono a l' unità. Quindi, se chiamiamo *elemento di fuga* su ciascuna forma l' elemento corrispondente agli elementi impropri delle altre due [30], avremo:

Il rapporto semplice degli elementi singolari e dell' elemento di fuga di ognuna delle tre forme è costante ed uguale alla caratteristica.

È da notare che l' indeterminazione dell' ordine in cui si debbono prendere gli elementi singolari non pregiudica, per quanto precede, il valore dell' enunciato.

Dalla (14'), che si può anche assumere come definizione per le trilinearità generali, risultano in particolare immediatamente le note proprietà degli elementi singolari.

Di più, se ad es. Y_1 e Z_1 sono i coniugati armonici di Y e di Z rispetto alle coppie $S'_1\, S'_2$, $S''_1\, S''_2$, allora com' è noto [31]:

$$(S'_1\, S'_2\, Y) = -(S'_1\, S'_2\, Y_1)\,, \quad (S''_1\, S''_2\, Z) = -(S''_1\, S''_2\, Z_1)\,.$$

Dunque:

$$(S_1\, S_2\, X)\; (S'_1\, S'_2\, Y_1)\; (S''_1\, S''_2\, Z_1) = K\,.$$

Quindi, se due elementi di forme diverse sono associati ad un elemento della terza forma, lo sono anche i loro coniugati armonici rispetto agli elementi singolari.

È evidente che questa proprietà ha carattere proiettivo piuttosto che metrico. Così la si poteva ricavare anche facilmente dalla (14).

24. Nel caso delle trilinearità reali, poichè queste ammettono sempre (almeno) una terna reale, dalla (14), o dal teorema del n. prec. sugli elementi di fuga (che sono reali come corrispondenti di elementi reali) si ricava che la caratteristica è sempre reale nelle trilinearità *iperboliche*, e può essere reale o immaginaria nel caso delle *ellittiche*.

In questa ultima alternativa, poichè le ascisse degli elementi singolari di ciascuna forma sono immaginarie e coniugate, K è

(30) Cfr. Hauck (11), pag. 32.
(31) Cfr. Comessatti (17), II, pag. 22.

un numero complesso del tipo $\dfrac{a - b}{a - \bar{b}}$, dove a è reale e $\bar{b}$ è il coniugato di b ([32]).

Scambiando contemporaneamente i nomi degli elementi singolari, K si muta in: $\dfrac{a - \bar{b}}{a - b} = \dfrac{1}{K} = \bar{K}$, dove $\bar{K}$ è il coniugato di K.

Dunque: $$K\bar{K} = 1 .$$

Quindi nelle trilinearità iperboliche la caratteristica è sempre reale, in quelle ellittiche se è reale vale ± 1, se è immaginaria è un numero complesso di modulo 1 del tipo $e^{-i\theta}$. In tal caso anche il suo coniugato $e^{-i\theta}$ può pensarsi come la caratteristica dello stesso tipo di trilinearità.

25. Particolarmente notevole per la simmetria della relazione (14′) rispetto agli elementi singolari è il caso in cui sia $K = \pm 1$.

Se $K = -1$ risulta immediatamente dalla definizione che su ogni forma il punto di fuga è il coniugato armonico dell'elemento improprio rispetto ai due elementi singolari.

Se $K = +1$ e gli elementi singolari di una forma sono (distinti e) propri, di coordinate non omogenee a e b, le coordinate x_1, x_2 dell'elemento di fuga relativo soddisferanno alla condizione ([33]):

$$x_1 - a x_2 = x_1 - b x_2 .$$

Quindi, dovrà essere: $x_2 = 0$, e l'elemento di fuga sarà improprio (a meno che non sia indeterminato ([34])).

Viceversa, se gli elementi singolari di una forma sono (di-

([32]) Ciò esprime il teorema sugli elementi di fuga enunciato al n. 23.

([33]) Cfr. nota ([32]).

([34]) Se fosse indeterminato, gli elementi impropri delle altre due forme costituirebbero una coppia singolare. Allora sarebbe indeterminata anche la caratteristica. (Cfr. n. 30, 6).

stinti e) propri e l'elemento di fuga relativo è determinato e improprio, allora la caratteristica è uguale ad 1 ([35]).

Dunque quando gli elementi singolari della corrispondenza sono almeno su di una forma (distinti e) propri, condizione necessaria e sufficiente perchè gli elementi impropri si corrispondano è che sia $K = 1$ ([36]).

26. Da quanto vedremo trattando i casi più notevoli di corrispondenze metricamente specializzate, risulta che quando qualcuno degli elementi singolari è improprio la eguaglianza ([37]) della caratteristica, sebbene per quanto precede sia necessaria, non è viceversa condizione sufficiente per l'equivalenza metrica di due trilinearità generali (complesse).

Invece *quando gli elementi singolari sono* (distinti e) *propri, e quindi la caratteristica è diversa da zero, l'uguaglianza della caratteristica è condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza metrica.*

Che sia necessaria, già si sa. Per la sufficienza osserviamo che, trasformati gli elementi singolari S_1, S_1', S_1''; S_2, S_2', S_1'' di due trilinearità aventi la medesima caratteristica K negli elementi delle tre forme rispettivamente di coordinate non omogenee a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 ([38]), le coordinate x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2 di una terna *generica* della trasformata tanto dell'una che dell'altra corrispondenza soddisfano alla relazione (14'):

$$\frac{x_1 - a_1 x_2}{x_1 - b_1 x_2} \cdot \frac{y_1 - a_2 y_2}{y_1 - b_2 y_2} \cdot \frac{z_1 - a_3 z_2}{z_1 - b_3 z_2} = K \,.$$

([35]) Inoltre nessuno degli altri due elementi impropri può essere singolare (Cfr. nota ([34])).

([36]) In tal caso anche gli elementi singolari delle altre due forme sono propri.

([37]) Qui ed in seguito, quando si parla di eguaglianza della caratteristica di due trilinearità, va inteso che le due caratteristiche possono anche essere una reciproca dell'altra.

([38]) Ciò si può fare con sole similitudini, poichè gli elementi singolari sono propri.

Ciò vuol dire che ambedue sono metricamente equivalenti alla trilinearità di equazione:

$$
\begin{gathered}
(1-K)\, x_1 y_1 z_1 - (a_1 - K b_1)\, x_2 y_1 z_1 - (a_2 - K b_2)\, x_1 y_2 z_1 - \\
-(a_3 - K b_3)\, x_1 y_1 z_2 + (a_2 a_3 - K b_2 b_3)\, x_1 y_2 z_2 + (a_1 a_3 - K b_1 b_3)\, x_2 y_1 z_2 + \\
+ (a_1 a_2 - K b_1 b_2)\, x_2 y_2 z_1 - (a_1 a_2 a_3 - K b_1 b_2 b_3)\, x_2 y_2 z_2 = 0 . \qquad (18)
\end{gathered}
$$

27. Poichè il segno di $\Delta(a)$ è invariante di fronte a tutte le proiettività reali (n. 20), lo sarà anche di fronte alle similitudini. Quindi, se restringiamo le nostre considerazioni al campo reale, converrà distinguere il caso iperbolico dal caso ellittico.

Poichè con similitudini reali è sempre possibile trasformare su ciascuna forma due elementi reali in altri due prefissati e reali, tutte le trilinearità iperboliche cogli elementi singolari propri e di caratteristica K sono equivalenti fra loro ed a quella che ha gli elementi singolari $S_1^{(j)}$ ed $S_2^{(j)}$ negli elementi di coordinate:

$$a_j = 0 , \qquad b_j = 1 \qquad\qquad (j = 1,\ 2,\ 3),$$

e la cui equazione omogenea è (n. 26):

$$
\begin{gathered}
(1-K)\, x_1 y_1 z_1 + K (x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 + x_1 y_1 z_2) - \\
- K (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + K x_2 y_2 z_2 = 0 ,
\end{gathered}
$$

dove K è reale e diverso da zero. In coordinate non omogenee:

$$\frac{1-K}{K} xyz + yz + xz + xy - x - y - z + 1 = 0 . \qquad (18')$$

La forma del primo coefficiente conferma l'ultimo enunciato del n. 25.

Analogamente le trilinearità ellittiche di caratteristica $K = e^{i\theta}$ sono tutte equivalenti fra loro e a quella in cui le coordinate degli elementi singolari sono:

$$a_k = +i \qquad b_k = -i \qquad\qquad (k = 1,\ 2,\ 3) .$$

Infatti vale anche qui il risultato conseguito al n. 20, dove le (16) sono appunto similitudini.

Le sue equazioni omogenea e non omogenea sono (n. 26):

$$(1-e^{i\theta})\, x_1 y_1 z_1 - i(1+e^{i\theta})\,(x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 + x_1 y_1 z_2) -$$
$$-(1-e^{i\theta})\,(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + i(1+e^{i\theta})\, x_2 y_2 z_2 = 0\,,$$

$$(18'')\qquad \begin{aligned} &(1-e^{i\theta})\, xyz - i(1+e^{i\theta})\,(yz + xz + xy) - \\ &-(1-e^{i\theta})\,(x+y+z) + i(1+e^{i\theta}) = 0\,. \end{aligned}$$

È da notare però, poichè la caratteristica di una trilinearità iperbolica è sempre reale e quella di una ellittica sempre immaginaria, a meno che non sia ± 1, che i due casi interferiscono solo per $K = \pm 1$ (cfr. n. 34).

28. Non abbiamo ancora considerato il caso in cui qualcuno degli elementi singolari sia improprio. In questo, come anche in quello già implicitamente trattato, che la terna impropria senza contenere elementi singolari appartenga alla trilinearità, chiameremo la corrispondenza *metricamente specializzata* o *speciale*.

Torna opportuno ricordare che (cfr. ultima linea del n. 20) quando uno degli elementi singolari è improprio, e la trilinearità è generale e reale, non può essere che iperbolica. Quindi le considerazioni che faremo sulle corrispondenze speciali e le loro equazioni ridotte, ottenute di solito trasformando gli elementi singolari propri in elementi reali ([39]), valgono anche nel campo reale.

Poichè le similitudini sono caratterizzate dalla proprietà di lasciar fissi gli elementi impropri delle coordinate, così saranno invarianti le eventuali proprietà della corrispondenza relative ad essi.

Da questo punto di vista possiamo distinguere i seguenti tipi essenzialmente distinti di corrispondenze speciali metricamente equivalenti:

([39]) Anche le (18), qualora le trasformazioni lineari che vi intervengono si pensino come cambiamenti del sistema di ascisse, assumono il significato di equazioni ridotte nel campo metrico.

29. A) I tre elementi impropri sono singolari e :

a) non costituiscono fra loro alcuna coppia singolare.

Chiamatili $S_{1\infty}$, $S'_{1\infty}$, $S''_{1\infty}$ si può sempre con una similitudine trasformare S_2, S'_2, S''_2 negli elementi fondamentali P_2, P'_2, P''_2, e porre nell'elemento unità di una forma il corrispondente degli elementi unità delle altre due. Sappiamo che allora la trilinearità si trasforma in quella di equazione:

$$x_1\, y_1\, z_1 = x_2\, y_2\, z_2\,. \tag{19}$$

Dalla (14') si riconosce che come valore della caratteristica può assumersi indifferentemente 0 oppure ∞.

b) costituiscono due coppie singolari.

Possiamo sempre chiamarli, scambiando eventualmente l'ufficio delle forme e gl' indici degli elementi singolari di ciascuna forma: $S_{2\infty}$, $S'_{1\infty}$, $S''_{1\infty}$.

Allora trasformando S_1 S'_2 S''_2, rispettivamente in P_2, P'_2, P''_2 e spostando come in a) uno degli elementi unità, si può trasformare la trilinearità in quella di equazione omogenea:

$$x_2\, y_1\, z_1 = x_1\, y_2\, z_2\,, \tag{19'}$$

che si ottiene, com'è richiesto dal ragionamento, scambiando nella (19) i primi indici dei due termini.

Su due forme il punto di fuga è indeterminato.

Anche in questo caso, metricamente distinto dal precedente, $K = \infty$, $\dfrac{1}{K} = 0$.

30. B) Dei tre elementi impropri due sono singolari e:

a) non costituiscono una coppia singolare.

Possiamo sempre supporre che siano $S_{1\infty}$ ed $S'_{1\infty}$.

Allora, trasformati S_2, S'_2, S''_2 in P_2, P'_2, P''_2 si riconosce che si annullano i coefficienti cogli indici:

$$121 \quad 122 \quad 112 \quad 211 \quad 212\,.$$

La equazione della trasformata è quindi del tipo:

$$a_{111}\, x_1\, y_1\, z_1 + a_{221}\, x_2\, y_2\, z_1 + a_{222}\, x_2\, y_2\, z_2 = 0\,,$$

ma trasformando S_1'' nell'elemento unità di Z ed una coppia della proiettività corrispondente a P_1'' nella coppia degli elementi unità di Ξ ed H, si ottengono altresì le condizioni:

$$a_{221} + a_{222} = 0 \qquad a_{111} + a_{221} = 0\,,$$

che la riducono alla forma:

(20) $$x_1\, y_1\, z_1 - x_2\, y_2\, z_1 + x_2\, y_2\, z_2 = 0\,.$$

La caratteristica è anche ora uguale a zero, oppure ad ∞.

b) Costituiscono una coppia singolare.

Possiamo sempre supporre che si tratti di $S_{1\infty}$ ed $S'_{2\infty}$.

Allora, trasformati S_2, S_1', S_1'' in P_2, P_2', P_2'', due elementi corrispondenti a P_1'' negli elementi unità U ed U' di Ξ e di H ed S_2'' nell'elemento unità di Z, si vede che nella equazione della trilinearità trasformata si annullano i coefficienti aventi gli indici:

$$111 \quad 112 \quad 212 \quad 221 \quad 222\,.$$

Inoltre, dovendo essere:

$$a_{121} + a_{122} = 0\,, \qquad a_{211} + a_{121} = 0\,,$$

essa si riduce alla forma:

(20') $$x_2\, y_1\, z_1 - x_1\, y_2\, z_1 + x_1\, y_2\, z_2 = 0\,.$$

La caratteristica è indeterminata, come risulta dalla (14'). In due forme l'elemento di fuga è improprio, nella terza indeterminato.

31. *C*) Dei tre elementi impropri solo uno è singolare.

Possiamo sempre supporre che si tratti di $S_{1\infty}$.

Allora possiamo mediante opportune similitudini trasformare la nostra trilinearità ad es. in quella unica e determinata che ha gli elementi singolari S_2, S_2', S_1'' in P_2, P_2', P_2'' ed in cui l'elemento di fuga di Ξ è l'elemento unità, mentre nelle altre due forme gli elementi unità coincidono con S_1', S_2''. Nelle sua equazione mancano i coefficienti dagli indici:

$$121 \quad 122 \quad 222 \quad 212 .$$

Inoltre, dovendo essere:

$$a_{111} + a_{121} = 0 \qquad a_{111} + a_{112} = 0 \qquad a_{211} + a_{221} = 0 ,$$

essa è del tipo:

$$(21) \qquad x_1 y_1 z_1 - x_2 y_1 z_1 - x_1 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1 = 0 .$$

Anche per questo tipo di trilinearità si riconosce che $K = 0$, oppure ∞.

32. Degli elementi impropri nessuno è singolare, ma costituiscono una terna della corrispondenza.

In questo caso sappiamo (n. 25) che la caratteristica della corrispondenza è uguale ad 1. Inoltre vale il teorema del n. 26. Perciò nel campo complesso tutte le corrispondenze di questo tipo sono metricamente equivalenti fra loro ed in particolare a quella di equazione non omogenea:

$$(22) \qquad yz + xz + xy - x - y - z + 1 = 0 ,$$

che si ottiene dalla (18′) per $K = 1$. Si può pervenire ad una forma ridotta ([40]) più semplice ponendo gli elementi singolari S_2, S_1', S_1''; S_1, S_2', S_2'' rispettivamente negli elementi unità ed in P_2, P_2', P_2''. Allora si annullano i coefficienti dagli indici:

$$111 \quad 221 \quad 222 \quad 212 .$$

Inoltre, dovendo essere:

$$a_{211} + a_{121} = 0 , \qquad a_{211} + a_{112} = 0 , \qquad a_{112} + a_{122} ,$$

([40]) Cfr. n. ([39]).

essa è del tipo:

$$(22') \qquad x_2 y_1 z_1 - x_1 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_2 = 0 .$$

Data la asimmetria del procedimento è chiaro che rappresentano lo stesso caso di trilinearità metricamente specializzata le equazioni che si ottengono dalla (22') cambiando una volta x con y ed un' altra volta x con z.

Ad una equazione caratteristica simmetrica si può giungere prendendo come P_2, P'_2, P''_2 tre elementi tali che a due di essi corrisponda sempre sulla terza forma l' elemento improprio.

Allora si annullano i coefficienti dagli indici:

$$111 \quad 122 \quad 212 \quad 221 .$$

Se poi si scelgono anche gli elementi unità in modo che a due di essi corrisponda sempre sulla terza forma l' elemento $P_2^{(i)}$, devono essere soddisfatte le relazioni:

$$a_{211} + a_{222} = 0 \qquad a_{121} + a_{222} = 0 \qquad a_{112} + a_{222} = 0 ,$$

per modo che l' equazione trasformata è del tipo:

$$x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 + x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_2 = 0 ,$$

cioè:

$$(22'') \qquad yz + xz + xy - 1 = 0 .$$

33. Tale riduzione è subordinata alla risoluzione del problema:

Dati tre elementi A, A', A'' di forme diverse, determinare altri tre elementi B, B', B'', anch' essi di forme diverse e tali che in una trilinearità data a $B' B''$, $B B''$, $B B'$ corrispondano rispettivamente A, A', A''.

Questo problema è in generale risolubile ed ammette due soluzioni.

Infatti ad es. si può pensare che nella trilinearità ad A corrisponde una proiettività π_1 di H e Z, e ad A'' una proiettività π_3 di Ξ ed H. Esse generano, associando le coppie di elementi omologhi in Ξ e in Z allo stesso elemento di H, una proiettività π_2 tra Ξ e Z. Anche ad A' è associata una proiettività π'_2 tra Ξ e Z, che ha due coppie (in generale distinte)

B_1, B_1''; B_2, B_2'' in comune con π_2. Ognuna di esse porge assieme all'elemento B_1' o B_2' corrispondente in π_3 su H a B_1 o risp. a B_2 (e quindi in π_1 a B_1'', B_2'') una terna di quelle cercate.

Nel ragionamento abbiamo dato alla forma H una posizione particolare. A prima vista sembrerebbe che scambiando l'ufficio di H con Z o con Ξ si potessero ottenere altre quattro soluzioni. Ma si riconosce immediatamente che non sono distinte dalle due precedenti.

Consegue dal penultimo alinea del n. 23 che gli elementi di una delle due soluzioni sono coniugati armonici di quelli dell'altra rispètto agli elementi singolari dei relativi sostegni.

Il problema così posto è quadratico, come quello della ricerca delle coppie comuni a due proiettività. Nel caso però che $A\,A'\,A''$ si corrispondano nella trilinearità, poichè una soluzione è la terna $A\,A'\,A''$ stessa, il problema diviene lineare e gli elementi incogniti sono i coniugati armonici di $A\,A'\,A''$ rispetto agli elementi singolari.

33. bis Analiticamente, se con ξ_i, η_k, $\zeta_l\,(i,\ k,\ l=1,\ 2)$ si indicano le coordinate di A, A', A'', e con x_i, y_k, z_l quelle di B, B', B'', queste ultime devono essere tali da soddisfare contemporaneamente alle relazioni:

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\, a_{ikl}\ \xi_i\ y_k\, z_l = 0 \\ \Sigma\, a_{mno}\, x_m\, \eta_n\, z_o = 0 \\ \Sigma\, a_{rst}\ x_r\ \ y_s\ \zeta_t = 0 \end{array}\right. \qquad (i,\ k,\ l,\ m,\ n,\ o,\ r,\ s,\ t=1,\ 2)\,.$$

Eliminando dalle prime due il rapporto $\dfrac{z_1}{z_2}$ si ottiene:

$$\left|\begin{array}{ll} \Sigma\, a_{ik1}\ \xi_i\, y_k & \Sigma\, a_{ik2}\ \xi_i\ y_k \\ \Sigma\, a_{mn1}\, x_m\, \eta_n & \Sigma\, a_{mn2}\, x_m\, \eta_n \end{array}\right| = 0\,,$$

cioè:

$$\Sigma_{k,\,m}\, x_m\, y_k\, \Sigma_{i,\,n}\, \xi_i\, \eta_n\, (a_{ik1}\, a_{mn2} - a_{ik2}\, a_{mn1}) = 0\,.$$

Eliminando $\dfrac{y_1}{y_2}$ tra questa e la terza delle (23), che si può scrivere:

$$\Sigma_s\, y_s\, \Sigma_{r,\,t}\, x_r\, \zeta_t\, a_{rst} = 0\,,$$

si ottiene la seguente equazione *quadratica* in $x = \frac{x_1}{x_2}$:

$$(24) \quad \sum_{mr} x_m x_r \sum_{i,n,t} \xi_i \eta_n \zeta_t \begin{vmatrix} a_{i11} a_{mn2} - a_{i12} a_{mn1} & a_{i21} a_{mn2} - a_{i22} a_{mn1} \\ a_{r1t} & a_{r2t} \end{vmatrix} = 0.$$

Le sue due radici sostituite nella 2ª e sulla 3ª delle (23) porgono *linearmente* i valori di $y = \frac{y_1}{y_2}$ e $z = \frac{z_1}{z_2}$ che soddisfano al problema. Dunque esso *ammette due soluzioni.*

Inoltre è facile vedere che *tra queste vi è la stessa* (ξ, η, ζ) *quando* A, A', A'' *si corrispondono nella trilinearità.* Infatti, posti ad es. A, A', A'' nell'elemento $(0, 1)$ di ciascuna forma, nella (24) scompaiono i termini in cui non sia $i = n = t = 2$.

Quindi, a meno del fatt. cost. $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$, la (24) si scrive:

$$(25) \qquad \Sigma_{m,r}\, x_m x_r \begin{vmatrix} a_{211} a_{m22} - a_{212} a_{m21} & a_{221} a_{m22} - a_{222} a_{m21} \\ a_{r12} & a_{r22} \end{vmatrix} = 0,$$

ed il suo termine noto (coefficiente di x_2^2)

$$\begin{vmatrix} a_{211} a_{222} - a_{212} a_{221} & 0 \\ a_{212} & a_{222} \end{vmatrix}$$

si annulla appunto quando è $a_{222} = 0$, cioè quando A, A', A'' si corrispondono.

34. Consideriamo ora le cose nel campo reale. Secondo quanto si è già osservato al n. 28, poichè i casi A), B), C) conducono sempre a trilinearità iperboliche, per esse i ragionamenti fatti e le formule ridotte ricavate ponendo gli elementi singolari negli elementi reali $(1, 1)$ e $(0, 1)$ sono ancora validi.

Perciò il caso A) da luogo a due tipi di trilinearità iperboliche essenzialmente distinte, le cui equazioni si possono con soli cambiamenti reali di ascisse ridurre ([41]) ai tipi (19), (19'),

([41]) Ciò infatti equivale a dire che tutte le trilinearità di ciascun tipo sono nel campo reale metricamente equivalenti a quelle di equazioni (19), (19'). Analogamente per gli altri casi. Cfr. nota ([39]).

ossia in coordinate non omogenee:

$$xyz - 1 = 0, \tag{19}$$

$$yz - x = 0. \tag{19'}$$

Analogamente per il caso B), di cui i due tipi metricamente distinti hanno le seguenti equazioni ridotte non omogenee:

$$xyz - z + 1 = 0 \tag{20}$$

$$yz - xz + x = 0. \tag{20'}$$

Lo stesso dicasi per C), che dà luogo ad un solo tipo essenzialmente distinto di trilinearità iperbolica, di equazione ridotta non omogenea:

$$xyz - yz - xy + z = 0. \tag{21}$$

Invece per D) occorre distinguere il caso iperbolico da quello ellittico. Infatti, mentre in quello iperbolico vale la (18'), e quindi la trilinearità può trasformarsi realmente nella (22), in quello ellittico ciò non è possibile. Analogamente, poichè occorre anche allora portare gli elementi singolari negli elementi reali (1, 1) e (0, 1), pure la (22') può conseguirsi solo nel caso iperbolico. In coordinate non omogenee si scrive:

$$yz - xz - xy + 1 = 0. \tag{22'}$$

Nel caso ellittico, per $e^{i\theta} = 1$, la (18'') fornisce:

$$yz + xz + xy - 1 = 0, \tag{22''}$$

che manifestamente coincide con la (22'') del n. 32.

Dunque il procedimento seguito per ottenerla è equivalente a quello usato per ottenere la (18''), basato sul trasporto degli elementi singolari nei punti di coordinate $\pm i$; perciò non è effettuabile realmente nel caso delle trilineatità iperboliche.

Ciò significa che anche gli elementi in cui si devono portare gli elementi unità per ottenere la (22″) hanno coordinate reali nel caso ellittico, ed immaginarie nel caso iperbolico ([42]).

La (22′) e la (22″) possono quindi pensarsi come le equazioni ridotte dei due tipi metricamente distinti di fronte alle trasformazioni metriche reali, cui ci dà luogo il caso D). La caratteristica tanto in un tipo come nell' altro vale sempre 1.

([42]) Ciò risulta immediatamente dalla (25) del n. 33 bis. Infatti, scelti [come si può fare in un sol modo (n. 33 bis), e quindi realmente] gli elementi (0, 1) delle tre forme come al n. 32, nella equazione della trilinearità sarà ancora:

$$a_{111} = a_{122} = a_{212} = a_{221} = 0 \,. \tag{26}$$

Quindi per la (6) del n. 12 il discriminante $\Delta(a)$ sarà dato dalla:

$$\Delta(a) = 4\, a_{112}\, a_{121}\, a_{211}\, a_{222} \,.$$

Inoltre la (25) del n. 33bis si scrive, tenendo presenti le (26):

$$\Sigma_{mr}\, x_m\, x_r \begin{vmatrix} a_{211}\, a_{m22} & -\, a_{222}\, a_{m21} \\ a_{r12} & a_{r22} \end{vmatrix} = 0 \,.$$

In essa è nullo il coefficiente B di $x_1 x_2$. Quelli A di x_1^2 e C di x_2^2 sono:

$$A = a_{112}\, a_{121}\, a_{222} \,,$$

$$C = a_{211}\, a_{222}^2 \,.$$

Il discriminante D della (25) assume quindi la forma:

$$D = -\, 4\, a_{112}\, a_{121}\, a_{211}\, a_{222}^3 = -\, a_{222}^2\, \Delta(a) \,,$$

ed è perciò nel campo reale sempre di segno opposto a quello di $\Delta(a)$.

Capitolo II.

Corrispondenze trilineari singolari e degeneri.

35. Andiamo a considerare il caso finora escluso delle trilinearità singolari cioè tali che sia: $\Delta(a) = 0$.

Supponiamo dapprima che la forma trilineare sia riducibile, e si spezzi in due fattori in una delle tre maniere seguenti:

$$(1) \qquad f \equiv (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)(\gamma_1 y_1 z_1 + \delta_1 y_1 z_2 + \varepsilon_1 y_2 z_1 + \varphi_1 y_2 z_2)$$

$$(2) \qquad f \equiv (\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2)(\gamma_2 x_1 z_1 + \delta_2 x_1 z_2 + \varepsilon_2 x_2 z_1 + \varphi_2 x_2 z_2)$$

$$(3) \qquad f \equiv (\alpha_3 z_1 + \beta_3 z_2)(\gamma_3 x_1 y_1 + \delta_3 x_1 y_2 + \varepsilon_3 x_2 y_1 + \varphi_3 x_2 y_2)\,.$$

Nel primo caso si ha:

$$\begin{aligned}
a_{111} &= \alpha_1 \gamma_1 \\
a_{211} &= \beta_1 \gamma_1 \\
a_{121} &= \alpha_1 \varepsilon_1 \\
a_{112} &= \alpha_1 \delta_1 \\
a_{122} &= \alpha_1 \varphi_1 \\
a_{212} &= \beta_1 \delta_1 \\
a_{221} &= \beta_1 \varepsilon_1 \\
a_{222} &= \beta_1 \varphi_1
\end{aligned}$$

ossia, non essendo nulli entrambi α_1 e β_1 e avendosi:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned}
a_{111}\beta_1 - a_{211}\alpha_1 &= 0 \\
a_{121}\beta_1 - a_{221}\alpha_1 &= 0 \\
a_{112}\beta_1 - a_{212}\alpha_1 &= 0 \\
a_{122}\beta_1 - a_{222}\alpha_1 &= 0\,,
\end{aligned} \right.$$

deve essere:

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} & a_{121} \\ a_{211} & a_{212} & a_{222} & a_{221} \end{matrix} \right\| = 0\,,$$

cioè sono nulle (tre sezioni verticali indipendenti, e quindi) tutte le sezioni verticali della matrice cubica della forma trilineare data (cfr. n. 13). Inoltre è nullo $\Delta(a)$ (n. 14), e quindi la trilinearità è singolare.

Viceversa, se sussiste la (5) (la trilinearità è singolare; inoltre) sono risolubili le (4), ed $\cdot_1$, β_1 non sono contemporaneamente nulli. Si può sempre supporre che sia $\alpha_1 \neq 0$. Allora, posto:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \tau ,$$

si ha:

$$a_{2kl} = \tau\, a_{1kl} \qquad (k, l = 1, 2),$$

$$f(x\,y\,z) = \sum_{ikl} a_{ikl}\, x_i\, y_k\, z_l = x_1 \sum_{k,l} a_{1kl}\, y_k\, z_l +$$

$$+ \tau\, x_2 \sum_{k,l} a_{1kl}\, y_k\, z_l = (x_1 + \tau x_2) \sum a_{1kl}\, y_k\, z_l .$$

Dunque f è riducibile e del tipo (1).

Analogamente, l' annullarsi delle sezioni transversali:

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{111} & a_{211} & a_{112} & a_{212} \\ a_{121} & a_{221} & a_{122} & a_{222} \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

o delle longitudinali:

$$(7) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{111} & a_{121} & a_{\cdot 21} & a_{211} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} & a_{212} \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

è condizione necessaria e sufficiente per l' annullarsi di Δ ed il verificarsi della (2) o rispettivamente della (3).

36. È da notare che quando è verificata la (5) svaniscono identicamente le equazioni (5') e (5'') del Cap. I. che nel caso delle trilinearità generali dànno gli elementi singolari di H e di Z. Quindi ogni punto di H e di Z può pensarsi come singolare, e vedremo in che senso.

Così se sussistono la (6) o la (7) svaniscono le equazioni che nel caso generale dànno gli elementi singolari di Ξ e di Z, o rispett. di Ξ e di H.

Viceversa, supponiamo che si annulli identicamente una delle equazioni che nel caso generale dànno gli elementi singolari ([43]), ad es. quella :

$$(8)\qquad \begin{aligned}\Sigma \equiv (a_{111}\,a_{221} - a_{121}\,a_{211})\,z_1^2 + (a_{111}\,a_{222} - a_{121}\,a_{212} + a_{112}\,a_{221} -\\ - a_{122}\,a_{211})\,z_1\,z_2 + (a_{112}\,a_{222} - a_{122}\,a_{212})\,z_2^2 = 0\,,\end{aligned}$$

che dà gli elementi singolari di Z. Cioè sia :

$$(9)\qquad \begin{cases} A = a_{111}\,a_{221} - a_{121}\,a_{211} = 0 \\ C = a_{112}\,a_{222} - a_{122}\,a_{212} = 0\,, \end{cases}$$

$$(10)\qquad B = a_{111}\,a_{222} - a_{121}\,a_{212} + a_{112}\,a_{221} - a_{122}\,a_{211} = 0\,.$$

37. Allora evidentemente $\Delta = B^2 - 4\,A\,C = 0$. Inoltre possono darsi i seguenti casi :

I) $a_{221} = 0$. Allora dalle (9) risulta che deve essere o :

1) $a_{121} = 0$, e quindi : $B = a_{111}\,a_{222} - a_{122}\,a_{211} = 0$.

Le tre sezioni verticali contenenti la colonna : $\left\| \begin{matrix} a_{121} \\ a_{221} \end{matrix} \right\|$ sono nulle.

L'altra diagonale verticale è B, che è pure nulla; un'altra faccia è C, che è pure nulla. Da ciò segue che anche l' ultima faccia verticale è nulla ([44]), e quindi sussiste la decomposizione

([43]) Il Le Paige dimostra coi metodi di Gordan che queste equazioni sono dei covarianti della forma trilineare, e trova con un procedimento simile al nostro che quando una di quelle equazioni svanisce identicamente la $f(x\,y\,z)$ si spezza in due o tre fattori. Cfr. la citata *Mém. sur les courbes du III^me ordre* ([6]), p. 10.

([44]) Infatti se son nulle due sezioni aventi un lato in comune, e gli elementi di quel lato non sono nulli, si annulla anche la sezione che congiunge i due lati opposti a quello comune ; giacchè da :

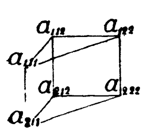


Fig. 3

$$\begin{cases} B = a_{111}\,a_{222} - a_{211}\,a_{122} = 0 \\ C = a_{112}\,a_{222} - a_{212}\,a_{122} = 0\,. \end{cases}$$

se non è $a_{222} = a_{122} = 0$, segue

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{211} \\ a_{112} & a_{212} \end{vmatrix} = 0.$$

(1), a meno che non sia contemporaneamente anche $a_{122} = a_{222} = 0$, nel qual caso la f è divisibile per y_1, e quindi sussiste la decomposizione (2).

2) Oppure $a_{211} = 0$, e allora $B = a_{111}\, a_{222} - a_{121}\, a_{212} = 0$.

Le tre sezioni trasversali contenenti la riga $\| a_{211} \quad a_{221} \|$ sono nulle, l'altra sezione diagonale trasversale è B, che è nulla, altra faccia trasversale è C che è pure nulla. Da $B = 0$, $C = 0$ segue che anche l'ultima faccia trasversale deve essere nulla, e quindi sussiste la decomposizione (2), a meno che non sia contemporaneamente $a_{212} = a_{222} = 0$, nel qual caso essendo f divisibile per x_1 sussisterebbe già la decomposizione (1).

II.) $a_{112} = 0$. Allora dalle (9) consegue l'alternativa:

1) $a_{122} = 0$, e quindi $B = a_{111}\, a_{222} - a_{121}\; a_{212} = 0$.

Le tre sezioni trasversali contenenti la riga $\| a_{112} \quad a_{122} \|$ sono nulle. L'altra sezione diagonale trasversale è B, che è pure nulla. Inoltre è nullo anche A, che è un'altra faccia trasversale. Da $B = 0$, $A = 0$ consegue allora l'annullarsi dell'ultima faccia trasversale, per modo che tutte le sezioni trasversali sono nulle, e sussiste la decomposizione (2), a meno che non sia contemporaneamente $a_{111} = a_{121} = 0$, nel qual caso, essendo f divisibile per x_2, sussiste già la decomposizione (1).

2) $a_{212} = 0$, e quindi $B = a_{111}\, a_{222} - a_{122}\, a_{211} = 0$.

Le tre sezioni verticali contenenti la colonna $\left\| \begin{matrix} a_{112} \\ a_{122} \end{matrix} \right\|$ sono nulle, l'altra sezione diagonale verticale coincide con B, che è nullo. Essendo nulla anche la faccia verticale A, da $A = 0$, $B = 0$ consegue l'annullarsi dell'ultima faccia verticale, nel qual caso, essendo tutte le sezioni verticali nulle, sussisterebbe la decomposizione (1), a meno che non sia contemporaneamente $a_{111} = a_{211} = 0$, nel qual caso sussisterebbe la decomposizione (2), essendo la f divisibile per y_2.

III) $a_{221} \neq 0 \quad a_{112} \neq 0$. Allora osserviamo che, tenendo conto della (9), si può sostituire alla (10) la equazione equivalente:

$$
\begin{aligned}
& a_{221}\, a_{112}\, B = a_{121}\, a_{211}\, a_{212}\, a_{122} - a_{221}\, a_{112}\, a_{121}\, a_{212} + \\
& + a_{221}\, a_{112}\, a_{112}\, a_{221} - a_{221}\, a_{112}\, a_{122}\, a_{211} = \\
(11) \qquad & = (a_{121}\, a_{212} - a_{112}\, a_{221})\,(a_{211}\, a_{122} - a_{221}\, a_{112}) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Quindi può accadere che sia contemporaneamente alle (9):

1)

(11') $$a_{121}\, a_{212} - a_{112}\, a_{221} = 0 .$$

Dalla (11') e dalla (9) consegue allora, essendo $a_{221} \neq 0$, $a_{112} \neq 0$, che sono nulle tutte le sezioni verticali della matrice cubica, e quindi sussiste la decomposizione (1).

2)

(11'') $$a_{211}\, a_{122} - a_{221}\, a_{112} = 0 .$$

Poichè $a_{221} \neq 0$, $a_{112} \neq 0$, dalle (11'') e dalle (9) consegue allora l'annullarsi di tutte le sezioni trasversali della matrice cubica, e quindi la decomposizione (2).

In ogni caso dunque, se una delle equazioni che danno gli elementi singolari su Ξ, H, Z svanisce identicamente, sono nulle tutte le sezioni della matrice cubica concordi con una delle due direzioni che possono venire attribuite ai suoi coefficienti. Quindi svanisce identicamente anche l'altra equazione analoga, i cui coefficienti possono pensarsi (come sezioni della matrice cubica) ugualmente diretti, e la forma trilineare è riducibile in uno dei modi (1), (2), (3).

38. Come caso particolare può accadere che svaniscano identicamente tutte le tre equazioni degli elementi singolari. Allora sono nulle tutte le facce della matrice cubica e quattro sezioni diagonali appartenenti e due diverse direzioni. Quindi sono nulle anche le altre due sezioni diagonali. Infatti, se per ipotesi potesse esservene una diversa da zero, gli elementi dell'altra sarebbero tutti nulli come conseguenza dell'annullarsi delle facce della matrice, di direzione concorde con quella della sezione diagonale non nulla ([45]).

([45]) Infatti, assieme al teorema della nota ([43]) del n. 37, si dimostra viceversa facilmente applicando note proprietà dei sistemi di equazioni lineari ed omogenee che:

Se sono nulle due sezioni aventi un lato in comune, e per di più è diversa da zero la sezione che congiunge i lati opposti a quello comune, devono essere nulli gli elementi del lato comune.

Per l' annullarsi delle altre due facce devono essere nulli due elementi della sezione diagonale supposta diversa da zero. Inoltre questa dovrebbe avere un terzo elemento nullo, diverso dai precedenti, affinchè le altre quattro sezioni diagonali potessero essere anch' esse nulle. Quindi, contro l' ipotesi, che risulta assurda, sarebbe essa stessa uguale a zero.

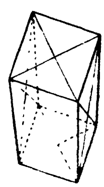


Fig. 4

Perchè svaniscono identicamente tutte le equazioni che danno gli elementi singolari è perciò *necessario* e *sufficiente* che siano nulle tutte le possibili sezioni della matrice. Ma allora sussistono contemporaneamente le decomposizioni (1), (2), (3), e quindi, (essendo evidentemente i fattori contenenti una sola serie di variabili primi fra loro) la forma stessa è doppiamente riducibile. Vale cioè l' identità:

$$(12) \quad f(x, y, z) \equiv (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)(\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2)(\alpha_3 z_1 + \beta_3 z_2),$$

dove α_i e β_i non sono contemporaneamente nulli.

Viceversa se sussiste l' identità (12), poichè essa in particolare contiene la (1), la (2), la (3), sono nulle tutte le possibili sezioni della matrice cubica della forma trilineare data, e quindi svaniscono identicamente le tre equazioni che danno gli elementi singolari di Ξ, H, Z.

39. Diremo che la corrispondenza trilineare rappresentata dall' equazione:

$$f(x, y, z) = 0$$

è *degenere* nel caso in cui sussista una delle (1), (2), (3), e *doppiamente degenere* nel caso che sussista la (12). Da quanto precede risulta che una corrispondenza semplicemente o doppiamente degenere è sempre singolare.

Esaminiamo dapprima il caso delle corrispondenze semplicemente degeneri. Poichè la forma trilineare si spezza allora nel prodotto di un fattore lineare e di uno bilineare, si può subito affermare che all' elemento « singolare », radice della equazione che si ottiene uguagliando a zero il fattore lineare, corrisponde una coppia qualsiasi di elementi delle altre due forme. D'altra parte ad una coppia qualsiasi della proiettività « fondamentale » che si ottiene uguagliando a zero il fattore bilineare corrisponde un elemento arbitrario della prima forma. Perchè una corrispondenza degenere sia doppiamente degenere occorre e basta che sia nullo il modulo della proiettività « fondamentale », che in tal caso quindi è anch'essa degenere. Infatti allora il fattore bilineare si spezza in due fattori lineari.

È chiaro che le trasformazioni proiettive dei sostegni mutano una corrispondenza degenere in una corrispondenza degenere, in quanto che, data l'indipendenza e la linearità delle trasformazioni proiettive su ciascuna forma, una espressione del tipo (1), (2), (3) si muta ancora in una espressione del tipo (1), (2), (3).

Inoltre le trasformazioni proiettive dei sostegni non possono mutare una corrispondenza degenere in una doppiamente degenere, attesa l'invarianza del modulo di una proiettività per trasformazioni proiettive delle forme su cui essa è indotta. Nè viceversa una corrispondenza doppiamente degenere può venir mutata proiettivamente in una semplicemente degenere, altrimenti le trasformazioni inverse muterebbero una corrispondenza degenere in una doppiamente degenere.

40. Sia ad esempio:

$$(13)\quad f(x\,y\,z) \equiv (\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2)(\gamma_1 y_1 z_1 + \delta_1 y_1 z_2 + \varepsilon_1 y_2 z_1 + \varphi_1 y_2 z_2) = 0$$

l'equazione della nostra corrispondenza trilineare degenere, dove

$$D = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \varepsilon_1 & \varphi_1 \end{vmatrix} \neq 0 \,.$$

L'equazione che nel caso generale dà gli elementi singolari di Ξ, come quelli la cui proiettività corrispondente è degenere, ora diviene:

$$(\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2)^2 D = 0 \,.$$

Da ciò il nome di « singolare » che abbiamo conservato per l'elemento di Ξ di coordinate $x_1 = \beta_1$, $x_2 = \alpha_1$.

In realtà però il concetto di elemento singolare quale erasi finora acquisito è del tutto scomparso. Quello che prima era il fascio delle proiettività corrispondenti agli elementi di Ξ, è ora costituito dalla sola proiettività fondamentale, non degenere, di equazione:

$$(14) \qquad \gamma_1 y_1 z_1 + \delta_1 y_1 z_2 + \varepsilon_1 y_2 z_1 + \varphi_1 y_2 z_2 = 0 \, ,$$

che corrisponde ad un punto generico di Ξ, e dall'insieme delle coppie di elementi di H e Z che corrispondono al punto singolare.

Viceversa ogni corrispondenza (singolare) degenere si può generare associando ad una proiettività non degenere tra due forme di 1ª specie ogni elemento di una terza forma, e ad un elemento fisso di questa tutte le proiettività degeneri delle altre due.

Con una trasformazione lineare delle x si può portare l'elemento singolare (β_1, α_1) in un punto qualsiasi, in particolare in quello $(0, 1)$. Trasformando poi nei punti $(0, 1)$; $(1, 0)$; $(1, 1)$ di H e Z tre coppie di elementi corrispondenti nella (14), la sua equazione si riduce a:

$$(14') \qquad y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0 \, ,$$

e quindi quella della trilinearità alla:

$$(15) \qquad x_1 y_1 z_2 - x_1 y_2 z_1 \, ,$$

dove non compare alcun parametro, per modo che tutte le trilinearità degeneri del tipo (13) sono proiettivamente equivalenti ([46]).

41. Nel campo reale si può notare che le coordinate β_1, α_1 dell'elemento singolare sono sempre reali. Infatti, dovendo essere reali i coefficienti della f, si deve avere:

$$\alpha_1 \gamma_1 = \rho \, \overline{\alpha}_1 \overline{\gamma}_1 \qquad \beta_1 \gamma_1 = \rho \, \overline{\beta}_1 \overline{\gamma}_1 \, ,$$

([46]) Perchè al solito le trasformazioni lineari che intervengono nel ragionamento si possono anche interpretare come trasformazioni proiettive (cfr. nota ([23]) e segg.).

(dove $\overline{\alpha}_1$ è il coniugato di α_1, ecc.); quindi moltiplicando membro a membro:

$$\alpha_1 \overline{\beta}_1 = \overline{\alpha}_1 \beta_1 .$$

Dunque $\alpha_1 \overline{\beta}_1$ è reale. Perciò β_1 è proporzionale ad α_1, ed il coefficiente di proporzionalità è reale. Infatti, se:

$$\alpha_1 = a + i b , \qquad \overline{\beta}_1 = c - i d ,$$

allora:

$$\alpha_1 \overline{\beta}_1 = a c + b d + i (a d - b c) ,$$

e quindi essendo $\alpha_1 \overline{\beta}_1$ reale, deve essere: $a d - b c = 0$, cioè $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = t$, dove t è reale come a, b, c, d. Dunque:

$$c = t a , \qquad d = t b ,$$

e infine

$$\beta_1 = c + i d = t (a + i b) = t \alpha_1 .$$

Ma allora, poichè sono proporzionali ai numeri reali 1 e t, le coordinate β_1 ed α_1 del punto singolare possono sempre immaginarsi reali c. v. d.

Da ciò discende che nelle trilinearità degeneri reali i coefficienti della proiettività (14) sono sempre (proporzionali a) numeri reali. Inoltre, poichè una proiettività reale ammette infinite coppie reali, la sua equazione può sempre ridursi alla forma (14′) con opportune trasformazioni lineari reali delle y e delle z.

Anche reale è la trasformazione lineare delle x che muta (β_1, α_1) in $(0, 1)$.

Quindi tutte le trilinearità degeneri reali del tipo (13) sono equivalenti fra loro ed alla (15) di fronte alle proiettività reali ([47]).

42. Di fronte alle similitudini occorre distinguere il caso che l'elemento singolare di Ξ sia improprio, da quello che sia proprio, e il caso in cui gli elementi limiti (corrispondenti degli elementi impropri) della (14) siano propri o no.

([47]) Cfr. nota ([46]).

Se sono propri, trasformatili negli elementi (0, 1) di H e di Z e trasformati gli elementi di una coppia della (14) negli elementi unità (1, 1), la proiettività si trasforma nella :

$$(14'') \qquad y_1 z_1 - y_2 z_2 = 0 .$$

Se sono impropri la (14) si può trasformare come prima nella (14′), ponendo i punti (0, 1) ed (1, 1) in due coppie di elementi corrispondenti.

Combinando questi due casi con l' improprietà o meno di (α_1, β_1) si vede che si possono presentare 4 casi di trilinearità degeneri metricamente distinte, equivalenti fra loro e rispettivamente a quelle di equazione :

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 y_1 z_1 - x_1 y_2 z_2 = 0 \\ x_1 y_1 z_2 - x_1 y_2 z_1 = 0 \\ x_2 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_2 = 0 \\ x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 = 0 . \end{array} \right.$$

Questa classificazione vale evidentemente anche quando si considerino solo trilinearità reali e similitudini reali. Infatti sono reali gli elementi limiti, corrispondenti di elementi reali in una proiettività reale, e si possono sempre trovare due o tre coppie di elementi reali corrispondenti nella (14), che è reale.

Quanto è stato detto per la (13) si ripete parola per parola scambiando l' ufficio delle forme per le analoghe trilinearità degeneri :

$$(13') \quad (\alpha_2 y_1 - \beta_2 y_2)(\gamma_2 x_1 z_1 + \delta_2 x_1 z_2 + \varepsilon_2 x_2 z_1 + \varphi_2 x_2 z_2) = 0 ,$$

$$(13'') \quad (\alpha_3 z_1 - \beta_3 z_2)(\gamma_3 x_1 y_1 + \delta_3 x_1 y_2 + \varepsilon_3 x_2 y_1 + \varphi_3 x_2 y_2) = 0 ,$$

le cui equazioni ridotte nel campo proiettivo ed in quello metrico si ottengono dalla (15) e delle (16) cambiando rispettivamente x in y od in z.

43. Andiamo ora a considerare le trilinearità (singolari) doppiamente degeneri. Per definizione la loro equazione è del tipo :

$$(17) \quad f(x\, y\, z) \equiv (\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2)(\alpha_2 y_1 - \beta_2 y_2)(\alpha_3 z_1 - \beta_3 z_2) = 0 .$$

Quindi esse sono tali che su ogni forma all' elemento che diremo ancora « singolare » (β_i, α_i) corrisponde una coppia generica di elementi delle altre due, e ad un elemento generico una coppia della proiettività degenere che ha per elementi singolari (β_k, α_k), (β_l, α_l) (per k, $l \neq i$).

Dalla forma stessa della (17), in cui i fattori lineari contengono una sola coppia di variabili di una serie, risulta che la nozione di trilinearità doppiamente degenere è invariante di fronte alle trasformazioni proiettive dei sostegni.

Trasformati gli elementi (β_i, α_i) nei punti (0, 1) delle coordinate, la (17) si muta nella:

$$x_1 \, y_1 \, z_1 = 0 \, . \tag{17'}$$

Quindi tutte le trilinearità doppiamente degeneri sono equivalenti fra loro ed alla (17'). La stessa cosa vale nel campo reale, giacchè il ragionamento che sopra ci ha permesso di affermare la realtà di (β_1, α_1), si può ripetere anche per (β_2, α_2), (β_3, α_3).

Per l'equivalenza di fronte alle trasformazioni metriche occorre distinguere il caso che (β_i, α_i) sia improprio dall'altro.

Conseguentemente, qualora si prescinda anche dallo scambio delle forme, si possono dividere le trilinearità doppiamente degeneri in quattro tipi diversi di corrispondenze metricamente equivalenti fra loro e rispettivamente a quelle di equazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \, y_1 \, z_1 = 0 \\ x_1 \, y_1 \, z_2 = 0 \\ x_1 \, y_2 \, z_2 = 0 \\ x_2 \, y_2 \, z_2 = 0 \, . \end{array} \right. \tag{18}$$

Anche la classificazione metrica rimane la stessa se considerata nel solo campo reale.

44. Poichè i coefficienti della equazione della trilinearità debbono soddisfare, affinchè questa sia degenere, oltre alla relazione:

$$\Delta(a) = B^2 - 4\,A\,C = 0 \, ,$$

ad almeno due altre condizioni indipendenti, ad es. $A = 0$, $C = 0$, così la dimensione dell'insieme delle corrispondenze degeneri è 4.

L'insieme ad esso subordinato delle corrispondenze doppiamente degeneri ha dimensione tre, dovendo i coefficienti soddisfare ad una ulteriore relazione, indipendente dalle prime tre, che annulli tutte le sezioni possibili della loro matrice cubica. Poichè una corrispondenza doppiamente degenere è individuata dai tre elementi singolari, è chiaro che il loro insieme è in corrispondenza biunivoca colla varietà delle terne di punti di tre spazi lineari ad una dimensione, o, se si vuole, delle terne ordinate dei punti della retta.

Abbiamo già osservato che la dimensione dell'insieme delle corrispondenze trilineari singolari è 6. Quindi tra queste il caso che ora andremo ad esaminare delle corrispondenze trilineari singolari non degeneri o *monosingolari* ([48]) è quello generale.

Con trasformazioni proiettive dei sostegni non si può trasformare una corrispondenza monosingolare in una degenere, altrimenti con le trasformazioni inverse sarebbe possibile mutare una corrispondenza degenere in una non degenere, ciò che come abbiamo già notato è impossibile.

Le equazioni degli elementi singolari di ciascuna forma non possono svanire identicamente, ed essendo d'altra parte nullo il loro discriminante comune Δ, così su ogni forma esiste un unico e determinato elemento singolare $S^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2$). Nel caso delle trilinearità reali si può anche affermare che esso è reale. Diremo una tale corrispondenza reale monosingolare *parabolica*.

45. Poichè la forma dell'equazione della corrispondenza non si spezza, così è sempre vero che ad una coppia di elementi generici di due forme corrisponde un unico e determinato elemento sulla terza.

Se la trilinearità è reale, poichè è determinato linearmente mediante i coefficienti dell'equazione e le coordinate dei suoi corrispondenti, se questi sono reali esso pure è reale, per modo

([48]) Secondo G. Hauck ([11]), § 7.

che anche una trilinearità parabolica ammette ∞^2 terne di elementi corrispondenti reali.

All' elemento variabile sur una forma corrispondono sempre tutte le coppie di una proiettività delle altre due, variabile in un fascio. Però tutte le proiettività di questo fascio hanno ora una sola coppia comune, essendo $\Delta = 0$.

Vi sono quindi solo tre coppie singolari o neutre.

Esse sono costituite dai tre elementi singolari S, S', S'', che anche ora possono pensarsi come quelli la cui proiettività corrispondente è degenere. Inoltre i punti singolari della proiettività degenere corrispondente sono gli altri due punti singolari della trilinearità. Quindi appena una terna contiene un elemento singolare, ne contiene anche un' altro (che in ogni caso forma col primo una coppia neutra).

La terna singolare $S\ S'\ S''$ appartiene al campo.

46. Trasformati S, S', S'' negli elementi fondamentali (1, 0) di Ξ, H, Z, e gli elementi di una terna della corrispondenza in quelli (0, 1), si annullano i coefficienti della equazione trasformata dagli indici :

$$111 \quad 112 \quad 121 \quad 211 \quad 222\,,$$

e quindi essa diviene tipo:

$$a_{122}\, x_1\, y_2\, z_2 + a_{212}\, x_2\, y_1\, z_2 + a_{221}\, x_2\, y_2\, z_1 = 0\,, \tag{19$_1$}$$

dove nessuno dei coefficienti può esser nullo (altrimenti la trilinearità sarebbe degenere). Con una successiva trasformazione, ad es. del tipo:

$$x_1' = \frac{a_{122}}{a_{221}}\, x_1\,, \qquad x_2' = \frac{a_{212}}{a_{221}}\, x_2\,,$$

essa si riduce alla:

$$x_1\, y_2\, z_2 + x_2\, y_1\, z_2 + x_2\, y_2\, z_1 = 0\,, \tag{19}$$

ossia in coordinate omogenee:

$$x + y + z = 0\,. \tag{19$'$}$$

Quindi (cfr. nota ([46])) tutte le corrispondenze monosingolari sono proiettivamente equivalenti fra loro ed in particolare a quella definita dalla (19), nella quale la terna singolare è la terna degli elementi impropri, ed in cui si corrispondono anche gli elementi (0, 1) delle coordinate.

47. Ad un' altra forma ridotta notevole si può giungere trasformando ancora gli elementi singolari negli elementi fondamentali (1, 0) delle tre forme, ma in modo che gli elementi (0, 1) ed (1, 1) formino una sestupla associata ([49]). Cioè ponendo gli elementi (0, 1) in tre elementi generici non corrispondenti, e scegliendo gli (1, 1) in modo che ognuno di essi corrisponda agli (0, 1) delle altre due forme. Allora si annullano i coefficienti dagli indici:

$$111, \quad 112 \quad 121 \quad 211\,,$$

e inoltre sussistono le relazioni:

$$\begin{cases} a_{122} + a_{222} = 0 \\ a_{212} + a_{222} = 0 \\ a_{221} + a_{222} = 0\,, \end{cases}$$

per modo che l' equazione della trilinearità si riduce al tipo:

$$(20) \qquad x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1 - x_2 y_2 z_2 = 0\,.$$

In coordinate non omogenee:

$$(20') \qquad x + y + z = 1\,.$$

In una sestupla associata diremo con Hauck *fondamentali* gli elementi che si scelgono ad arbitrio, come quelli che abbiamo posto in (0, 1), e *secondari* gli altri, dai primi univocamente determinati. Chiamatili rispettivamente P_1, P_2, P_3; P_{23}, P_{13}, P_{12}, se con X X' X'' indichiamo una terna generica di elementi corrispondenti, per quanto precede la (20) si può

([49]) Cfr. G. Hauck ([11]), § 7.

anche scrivere:

$$(21)\qquad (S P_1 P_{23} X) + (S' P_2 P_{13} X') + (S'' P_3 P_{12} X'') = 1 .$$

La (21) esprime concisamente, ed in forma invariante difronte alle trasformazioni proiettive dei sostegni le relazioni che intercedono tra gli elementi singolari, quelli di una sestupla associata e quelli di una terna di una corrispondenza monosingolare.

La (21) si può assumere come definizione della corrispondenza stessa.

Le cose dette, valide nel campo complesso, si trasportano tal quale nel campo reale, dove quindi tutte le trilinearità paraboliche sono proiettivamente equivalenti. Infatti sono reali gli elementi singolari, ed in una trilinearità reale vi sono sempre ∞^3 sestuple associate ed ∞^2 terne reali.

48. Supponiamo ora (cfr. n. 21) di tener fermo l'elemento «improprio» (1, 0) del riferimento proiettivo di ognuna delle tre forme date. Se la corrispondenza monosingolare considerata non è speciale, cioè se non si corrispondono gli elementi impropri nè è improprio alcun punto singolare, allora, posti P_1, P_2, P_3 negli elementi impropri stessi, per modo che P_{23}, P_{13}, P_{12} vengano ad essere gli elementi di fuga di Ξ, H, Z, la (21) si scrive:

$$(22)\qquad (P_{23} X S) + (P_{13} X' S') + (P_{12} X'' S'') = 1 .$$

La (22) è, a differenza della (21), una relazione metrica, anzi la relazione metrica fondamentale della trilinearità monosingolare generale (non speciale). Vi compaiono infatti solo rapporti semplici e vi occorre la considerazione dei punti impropri.

Poichè nella (22) non compare alcuna costante essenziale, così possiamo affermare che tutte le trilinearità monosingolari non speciali sono metricamente equivalenti.

Ciò vale anche nel campo reale per le trilinearità paraboliche non speciali. Infatti, essendo gli elementi di fuga reali, anche per esse vale la (22).

Ponendo gli elementi singolari negli elementi (0, 1) di Ξ, H, Z e gli elementi di fuga in quelli (1, 1), si giunge ad una forma ridotta conseguibile con sole trasformazioni metriche e valida per le trilinearità monosingolari non speciali:

$$x_1 y_1 z_1 - x_2 y_1 z_1 - x_1 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_2 = 0 \tag{23}$$

che in coordinate non omogenee si scrive:

$$x y z - y z - x z - x y = 0 \tag{23'}$$

e può immaginarsi dedotta dalla (22), ove si pensi che i rapporti semplici che vi compaiono rappresentano appunto l'inverso delle coordinate (non omogenee) di X, X', X'' relative al sistema suddetto, oppure dalla (20) cambiando 1 in 2 negli indici di x, y, z.

49. Supponiamo che la corrispondenza sia metricamente specializzata. Possono allora darsi i seguenti casi essenzialmente distinti:

A) Un elemento singolare è improprio, gli altri no.

La trilinearità può trasformarsi con sole similitudini in (è metricamente equivalente a) quella che ha gli elementi singolari propri negli elementi (0, 1), ed in cui l'elemento di fuga della forma in cui l'elemento singolare è improprio cade anch'esso in (0, 1). Se ad esempio è improprio S (a questo caso ci si può sempre ridurre scambiando eventualmente i nomi dei sostegni), allora si annullano i coefficienti dagli indici:

$$121 \quad 122 \quad 112 \quad 222 \quad 211,$$

e la equazione della trilinearità diviene:

$$a_{111} x_1 y_1 z_1 + a_{212} x_2 y_1 z_2 + a_{221} x_2 y_2 z_1 = 0,$$

dove i coefficienti son tutti diversi da zero. Con una successiva similitudine su una delle tre forme, ad es. su Ξ, del tipo:

$$x_1' = \frac{a_{111}}{a_{221}} x_1 \qquad x_2' = \frac{a_{212}}{a_{221}} x_2,$$

essa si riduce alla:

$$(24) \qquad x_1 y_1 z_1 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1 = 0\,,$$

cioè in coordinate non omogenee:

$$x y z + y + z = 0.$$

È da notare che la (24) si può ottenere dalla (19) scambiando 1 in 2 negli indici di y e di z.

Nelle due forme dove gli elementi singolari sono propri, con essi coincidono gli elementi di fuga.

50. *B*) Sono impropri due elementi singolari e non il terzo.

Si può sempre supporre siano S' ed S''. Allora, posti in $(0, 1)$ risp. su Ξ, H, Z l'elemento singolare S ed una coppia della proiettività corrispondente all'elemento improprio di Ξ, si annullano i coefficienti cogli indici:

111, 211, 221, 212, 122,

ed essi soli, per modo che spostando opportunatamente l'elemento unità di uno dei sostegni, la equazione della trilinearità si riduce alla:

$$(25) \qquad x_1 y_2 z_1 + x_1 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_2 = 0$$

cioè:

$$x z + x y + 1 = 0\,.$$

La (25) si può ottenere dalla (19) scambiando 1 in 2 negli indici di x.

È da notare che gli elementi di fuga delle forme con gli elementi singolari impropri coincidono con essi, e quindi sono impropri, mentre nella terza forma l'elemento di fuga è indeterminato.

C) I tre elementi singolari sono impropri.

Allora sappiamo che, posti negli elementi $(0, 1)$ gli elementi di una terna della corrispondenza, e scelto opportunamente il punto unità, tutte le trilinearità di questo tipo possono trasformarsi in quelle le cui equazioni risp. omogenea e non omogenea sono le (19), (19').

Gli elementi di fuga sono su ogni forma indeterminati.

51. *D*) I tre elementi singolari sono propri, i tre elementi impropri si corrispondono. Tutte le trilinearità di questo tipo sono metricamente equivalenti a quella che ha gli elementi singolari coincidenti con quelli di coordinate (0, 1). Scegliendo opportunatamente gli elementi unità le sue equazioni omogenea e non omogenea si riducono alle:

$$x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 + x_1 y_1 z_2 = 0 \tag{26}$$

$$y z + x z + x y = 0$$

che si possono, e la ragione ne è evidente, ottenere dalla (19) scambiando 1 in 2 negli indici di x, y, z.

Gli elementi di fuga sono ora tutti e tre impropri.

Concludendo, abbiamo riconosciuto che (quando si prescinda dallo scambio delle forme) vi sono quattro tipi essenzialmente distinti di trilinearità specializzate metricamente equivalenti, cui corrispondono le equazioni ridotte (24), (25), (19), (26). Inoltre questa classificazione vale tanto nel campo complesso che in quello reale, giacchè si riconosce immediatamente che le trasformazioni che conducono alle forme ridotte sono sempre reali.

Capitolo III.

Determinazione della trilinearità

52. Nella equazione di una *trilinearità generale* compaiono linearmente *sette* costanti essenziali, ad es. i rapporti di sette dei coefficienti al rimanente (non nullo). Se una terna $X^{(j)}\ Y^{(j)}\ Z^{(j)}$ appartiene al campo, quei coefficienti a_{ikl} debbono soddisfare alla condizione lineare di appartenenza:

$$(1)\left\{\begin{aligned} & a_{111}\, x_1^{(j)} y_1^{(j)} z_1^{(j)} + a_{211}\, x_2^{(j)} y_1^{(j)} y_1^{(j)} + a_{121}\, x_1^{(j)} y_2^{(j)} z_1^{(j)} + a_{112}\, x_1^{(j)} y_1^{(j)} z_2^{(j)} + \\ & + a_{122} x_1^{(j)} y_2^{(j)} z_2^{(j)} + a_{212} x_2^{(j)} y_1^{(j)} z_2^{(j)} + a_{221} x_2^{(j)} y_2^{(j)} z_1^{(j)} + a_{222} x_2^{(j)} y_2^{(j)} z_2^{(j)} = 0. \end{aligned}\right.$$

Date sette terne della corrispondenza, quando, come in generale, sia uguale a sette la caratteristica della matrice:

$$
(2)\qquad \left\| \begin{matrix}
x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & x_2^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & x_1^{(1)}y_2^{(1)}z_1^{(1)} & x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_2^{(1)} & x_1^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)} & x_2^{(1)}y_1^{(1)}z_2^{(1)} & x_2^{(1)}y_2^{(1)}z_1^{(1)} & x_2^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)} \\
x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_1^{(2)} & x_2^{(2)}y_1^{(2)}z_1^{(2)} & x_1^{(2)}y_2^{(2)}z_1^{(2)} & x_1^{(2)}y_1^{(2)}z_2^{(2)} & x_1^{(2)}y_2^{(2)}z_2^{(2)} & x_2^{(2)}y_1^{(2)}z_2^{(2)} & x_2^{(2)}y_2^{(2)}z_1^{(2)} & x_2^{(2)}y_2^{(2)}z_2^{(2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_1^{(7)}y_1^{(7)}z_1^{(7)} & x_2^{(7)}y_1^{(7)}z_1^{(7)} & x_1^{(7)}y_2^{(7)}z_1^{(7)} & x_1^{(7)}y_1^{(7)}z_2^{(7)} & x_1^{(7)}y_2^{(7)}z_2^{(7)} & x_2^{(7)}y_1^{(7)}z_2^{(7)} & x_2^{(7)}y_2^{(7)}z_1^{(7)} & x_2^{(7)}y_2^{(7)}z_2^{(7)}
\end{matrix} \right\|
$$

formata con le coordinate $x_i^{(j)}$, $y_k^{(j)}$, $z_l^{(j)}$ $(i, k, l = 1, 2\,; j = 1, \dots 7)$ dei loro elementi, mediante la (1) risultano determinati e non tutti nulli i rapporti di sette dei coefficienti ad un ottavo, cioè le sette costanti essenziali, e quindi la trilinearità stessa. Dunque:

In generale è unica e determinata la trilinearità cui appartengano sette terne date ([50]).

Le coordinate x_i, y_k, z_l di ogni altra terna XYZ di elementi corrispondenti, dovendo anch'esse soddisfare alla (1), saranno necessariamente tali che sia ([51]):

$$
(3)\qquad \left\| \begin{matrix}
x_1 y_1 z_1 & x_2 y_1 z_1 & x_1 y_2 z_1 & x_1 y_1 z_2 & x_1 y_2 z_2 & x_2 y_1 z_2 & x_2 y_2 z_1 & x_2 y_2 z_2 \\
x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & x_2^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)} & x_1^{(1)}y_2^{(1)}z_1^{(1)} & x_1^{(1)}y_1^{(1)}z_2^{(1)} & x_1^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)} & x_2^{(1)}y_1^{(1)}z_2^{(1)} & x_2^{(1)}y_2^{(1)}z_1^{(1)} & x_2^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_1^{(7)}y_1^{(7)}z_1^{(7)} & x_2^{(7)}y_1^{(7)}z_1^{(7)} & x_1^{(7)}y_2^{(7)}z_1^{(7)} & x_1^{(7)}y_1^{(7)}z_2^{(7)} & x_1^{(7)}y_2^{(7)}z_2^{(7)} & x_2^{(7)}y_1^{(7)}z_2^{(7)} & x_2^{(7)}y_2^{(7)}z_1^{(7)} & x_2^{(7)}y_2^{(7)}z_2^{(7)}
\end{matrix} \right\| = 0.
$$

Viceversa la (3) è anche condizione sufficiente per l'appartenenza di XYZ alla trilinearità, per modo che può pensarsi come equazione della corrispondenza trilineare individuata da sette terne di elementi corrispondenti. Essa è evidentemente ancora del tipo:

$$\Sigma\, a_{ikl}\, x_i\, y_k\, z_l = 0\,,$$

dove il coefficiente a_{ikl} è uguale (a meno del segno) al minore di ordine 7 della matrice (2) ottenuto escludendo la colonna in cui gli indici delle variabili sono i, k, l.

([50]) Cfr. London ([12]), § 1, 2.

([51]) Cfr. Folie e Le Paige, *Mém. sur les courbes du III^{me} ordre* ([6]), pag. 13.

53. Date tre forme di prima specie Ξ, H, Z, abbiamo veduto (n. 9) che una loro corrispondenza trilineare può pensarsi ottenuta riferendo proiettivamente gli elementi di una di esse, ad es. Ξ, agli elementi di un fascio di proiettività fra le altre due, H e Z. Per individuare una tale corrispondenza proiettiva π tra due forme di prima specie occorreranno come al solito tre coppie di elementi omologhi, cioè nel nostro caso tre elementi a, b, c di Ξ e tre proiettività A, B, C tra H e Z appartenenti al medesimo fascio Φ. È però da notare che Φ è individuato, da due qualsiasi sue proiettività, ad es. A e B, ed ogni altra di esse C è tale che la sua equazione:

$$C \equiv \lambda_1 A + \lambda_2 B = 0$$

è una combinazione lineare di quelle $A = 0$ e $B = 0$ di A e B.

La corrispondenza proiettiva π può ad esempio porsi in modo che le coordinate x_1, x_2 degli elementi di Ξ siano proporzionali ai parametri λ_1 e λ_2 delle proiettività corrispondenti. Perciò bisogna portare in a ed in b gli elementi $(1, 0)$ e $(0, 1)$ del riferimento proiettivo di Ξ; contemporaneamente se ne può portare in c l'elemento unità $(1, 1)$. Allora, volendo che a c corrisponda in π la proiettività $C = 0$, occorre fissare i fattori di proporzionalità a meno dei quali son determinate le forme A e B delle proiettività corrispondenti ad a e b, in modo che si abbia per $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$C \equiv A + B\,.$$

Ma per questo basta dare una coppia generica di elementi corrispondenti in $C = 0$, le cui coordinate sostituite in A e B determinano linearmente mediante la $A + B = 0$ il rapporto incognito di quei fattori di proporzionalità.

È dunque individuata una trilinearità quando, fissati tre elementi di una forma, siano date le proiettività corrispondenti a due di essi ed una coppia generica della proiettività corrispondente al terzo (52).

(52) Cfr. London (12), § 3, 6.

È chiaro che, essendo necessarie per la determinazione tanto di A quanto di B tre coppie di elementi omologhi,

$$\begin{array}{ccccccc|l}
a_1'' & a_2'' & a_3'' & b_3'' & b_2'' & b_1'' & c'' & \mathrm{Z} \\ \hline
a_1' & a_2' & a_3' & b_3' & b_2' & b_1' & c' & \mathrm{H} \\ \hline
 & a & & & b & & c & \Xi \\ \hline
\end{array}$$

per la determinazione della trilinearità anche ora occorrono sette terne di elementi corrispondenti.

In particolare si può supporre che tra le coppie date per determinare A e B vi siano una od entrambe le coppie «neutre» $S_1'' S_2'$, $S_2'' S_1'$, comuni a tutte le proiettività del fascio.

$$\begin{array}{l|cccccc}
\mathrm{Z} & a_1'' & a_2'' & S_1'' & b_2'' & b_1'' & c'' \\ \hline
\mathrm{H} & a_1' & a_2' & S_2' & b_2' & b_1' & c' \\ \hline
\Xi & a & & & b & & c \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc|l}
a_1'' & S_1'' & S_2'' & b_1'' & c'' & & \mathrm{Z} \\ \hline
a_1' & S_2' & S_1' & b_1' & c' & & \mathrm{H} \\ \hline
a & & & b & c & & \Xi \\ \hline
\end{array}$$

Scambiando l'ufficio di Ξ con quello di H e di Z ed i nomi degli elementi singolari su ciascuna forma, nel primo caso risulta che una trilinearità è individuata quando oltre ad una coppia singolare ne siano date cinque terne, di cui due e due abbiano un elemento in comune sulla terza forma, la quinta sia generica. Nel secondo caso da due coppie singolari costituite cogli elementi singolari di due sostegni e da tre terne generiche.

54. Diremo *indipendenti* n terne quando una trilinearità che contenga alcune di esse non contenga necessariamente anche le altre.

In particolare, se sette terne sono indipendenti è uguale a 7 la caratteristica K della matrice (2) formata con le loro coordinate, e quindi esse individuano una trilinearità. Infatti se fosse ad es. $K = 6$, essendo per una di esse i prodotti $x_i^{(j)} y_k^{(j)} z_l^{(j)}$ linearmente dipendenti da (combinazioni lineari di) quelli omologhi relativi alle altre sei terne, ogni trilinearità contenente queste ultime conterrebbe necessariamente anche la prima, contro all'ipotesi che le terne siano indipendenti.

Viceversa se sette terne individuano una trilinearità, esse sono indipendenti, giacchè altrimenti, se ad es. lo fossero solo le prime sei, dovendo tutte le soluzioni a_{ikl} del sistema (1) (per $j = 1, 2, \ldots, 6$) essere comuni anche alla:

$$\Sigma\, a_{ikl}\, x_i^{(7)}\, y_k^{(7)}\, z_l^{(7)} = 0\,,$$

sarebbe 6 la caratteristica della (2), e quindi le sette terne date non individuerebbero una trilinearità.

In modo analogo (con la considerazione di n equazioni di tipo (1)) si riconosce che *se n (≤ 7) terne sono indipendenti, allora è uguale ad n la caratteristica della matrice analoga alla* (2) *formata con i prodotti $x_i\, y_k\, z_l$ delle loro coordinate. Viceversa, se la caratteristica di quella matrice è n, le n terne considerate sono indipendenti.*

Consideriamo ora tutte le terne che è possibile formare con una coppia singolare, ad es. quella $S_1\, S_2'$. Ogni terna siffatta si ottiene associando ad $S_1\, S_2'$ un elemento qualsiasi A'' di Z.

Siano ξ_i, η_k le coordinate di S_1, S_2' e $z_l^{(1)}$, $z_l^{(2)}$ quelle (non proporzionali) di due elementi distinti di Z. Le coordinate di A'' si possono allora esprimere come combinazioni lineari di $z_l^{(1)}$ e $z_l^{(2)}$, cioè saranno del tipo:

$$z_l = \lambda_1\, z_l^{(1)} + \lambda_2\, z_l^{(2)}\,.$$

Quindi i prodotti $x_i\, y_k\, z_l$ per le terne considerate son tutti della forma:

$$\xi_i\, \eta_k\, (\lambda_1\, z_l^{(1)} + \lambda_2\, z_l^{(2)}) = \lambda_1\, \xi_i\, \eta_k\, z_l^{(1)} + \lambda_2\, \xi_i\, \eta_k\, z_l^{(2)}$$

e tra n di quelle terne *due sole* saranno indipendenti nel senso precisato sopra, tali che sia ad es.:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\, z_1^{(1)} + \lambda_2\, z_1^{(2)} & \lambda_1\, z_2^{(1)} + \lambda_2\, z_2^{(2)} \\ \lambda_1'\, z_1^{(1)} + \lambda_2'\, z_1^{(2)} & \lambda_1'\, z_2^{(1)} + \lambda_2'\, z_2^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1' & \lambda_2' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1^{(1)} & z_2^{(1)} \\ z_1^{(2)} & z_2^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

cioè, essendo per ipotesi:

$$\begin{vmatrix} z_1^{(1)} & z_2^{(1)} \\ z_1^{(2)} & z_2^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

tali che sia

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1' & \lambda_2' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

È dunque lecito affermare che:

Nella determinazione della trilinearità una coppia singolare può sostituire due terne ([53]). È da notare però che quando sia già data una coppia neutra, il darne un' altra che abbia con la prima un elemento singolare in comune equivale a dar solo una terna indipendente dalle precedenti. Infatti tra le terne contenenti la prima coppia singolare ve n' è già una contenente la seconda.

55. Per quanto precede è dunque unica e determinata una trilinearità quando siano dati:

A) * *Una coppia singolare e 5 terne* generiche di elementi corrispondenti.

B) *Due coppie singolari aventi un elemento in comune e 4 terne* generiche di elementi corrispondenti.

C) * *Due coppie singolari senza elementi comuni e tre terne* generiche di elementi corrispondenti. In questo caso rientra anche, allorchè gli elementi singolari delle due coppie neutre non stiano in due sole forme, quello in cui la trilinearità sia determinata da tre coppie singolari, di cui una abbia un elemento in comune con ciascuna delle altre due, e da tre terne generiche di elementi corrisponenti. Infatti una delle coppie singolari « *dipende* » completamente dalle altre due ([54]).

D) *Due coppie singolari con un elemento comune; un' altra senza alcun elemento in comune con le prime, e due terne* generiche di elementi corrispondenti.

([53]) Cfr. London ([12]), § 3. Egli mette in evidenza solo i casi di determinazione segnati con l' asterisco al n. 55. Il caso *C*) è considerato parzialmente, mentre invece è considerato completalmente dal Castelnuovo, come preciseremo parlando della costruzione della trilinearità.

([54]) Nel senso che le terne che la contengono dipendono tutte da quelle contenenti le altre due.

In *D*) rientra anche il caso che siano date le 4 coppie neutre congiungenti cinque elementi singolari e due terne generiche di elementi corrispondenti. Infatti una coppia neutra viene a «dipendere» completamente dalle altre, di cui due hanno proprio un elemento in comune.

E) * *Tre coppie singolari senza elementi comuni ed una terna* generica di elementi corrispondenti. Allora le altre tre coppie singolari «dipendono» dalle prime, che dunque porgono gli elementi singolari e la loro legge di associazione; ricadiamo nel noto teorema: *È unica e determinata la trilinearità di cui siano dati gli elementi singolari* (con la loro legge di associazione) *ed una terna di elementi corrispondenti.* Anche scrivendo la (3) per le 7 terne indipendenti che così si vengono a dare, si riconosce che la sua equazione è del tipo (14) del n. 17. Nella *E*) rientra il caso che siano date 5 coppie neutre ed una terna di elementi corrispondenti, giacchè due coppie dipendono completamente dalle altre tre che non hanno elementi in comune.

I casi *A*), *C*), *E*) si possono enunciare complessivamente: *È unica e determinata la trilinearità di cui siano date n coppie singolari* **distinte** ($n = 1, 2, 3$) *e* $7 - 2n$ *terne generiche* [55],

Se un elemento di uno dei sostegni è singolare, esso soddisfa ad una delle equazioni (5), (5′), (5″) dei nn. 10-12. Viceversa se si impone alla trilinearità di avere un elemento prefissato come singolare, i suoi coefficienti debbono soddisfare ad una delle condizioni algebriche quadratiche, (5), (5′), (5″), dove si riguardino la a_{ikl} come variabili. Quindi i casi *A*), *B*), *C*), *D*), *E*) rientrano nel teorema più generale: *È determinata la trilinearità di cui siano dati n elementi singolari e 7–n terne* di elementi corrispondenti [56]. La determinazione non sarà

(55) Cfr. Sturm (15), § 33, p. 327.

(56) Cfr. Schubert (1), § 3. È evidente che quando si impongano ai coefficienti k condizioni algebriche indipendenti, la corrispondenza trilineare è individuata da $7-k$ terne generiche. La determinazioме è però unica solo allorquando le condizioni sono lineari od equivalgono nel complesso a condizioni lineari.

però sempre unica, come lo è invece in *A*), *B*), *C*), *D*), *E*). In questi casi si può ancora prendere come equazione della trilinearità la (3), ove si pongono le coordinate delle 7 terne indipendenti di elementi corrispondenti che implicitamente si vengono a dare. L'attributo di *generiche* dato alle m terne non contenenti elementi singolari significa appunto che queste, assieme alle $7-m$ terne indipendenti che è possibile costruire con gli elementi singolari dati, siano ancora indipendenti.

56. Dalla (14′) del n. 21 risulta inoltre che *è unica e determinata la trilinearità di cui sian noti gli elementi singolari* (con la loro legge di associazione) *ed il valore della caratteristica* ([57]). Come equazione della corrispondenza trilineare così ottenuta si può assumere la (14′) stessa.

Se la corrispondenza non è speciale, e quindi su ogni forma risulta determinato l'elemento di fuga, da quanto abbiamo già visto in proposito al n. 23, risulta che per la determinazione della corrispondenza basta conoscere, oltre gli elementi singolari con la loro legge di associazione, *l'elemento di fuga di* un sostegno.

Invece se la trilinearità è speciale, nel senso che gli elementi impropri si corrispondano senza essere singolari, allora per la determinazione basta conoscere questi ultimi (con la loro legge di associazione), poichè $K = 1$. Tenendo presente che $a_{111} = 0$, dalla (1) si ricava che una tale corrispondenza è anche individuata da sei terne generiche di elementi corrispondenti. La sua equazione è analoga alla (3), ma con una riga (l'ultima) ed una colonna (la prima) in meno.

Più in generale, se delle terne che in ogni caso si vengono a dare per la determinazione della trilinearità, k sono costituite dagli elementi fondamentali P_r, P'_s, P''_t delle tre forme, si annullano i coefficienti a_{rst} della sua equazione. Quindi questa può ulteriormente determinarsi mediante la (3), tolte le k colonne corrispondenti agli indici r, s, t ed altrettante righe, sostituendovi le coordinate delle $7-k$ terne rimanenti.

([57]) Cfr. Hauck ([11]), § 4.

57. In particolare supponiamo che la corrispondenza trilineare sia singolare, cioè che i suoi coefficienti soddisfino alla condizione $\Delta(a) = 0$ che è algebrica e di 4^0 grado. Per determinarla sarà necessario imporle altre sei condizioni. È da notare che il fatto che i tre elementi singolari costituiscano tre coppie neutre è caratteristico delle corrispondenze monosingolari, cioè equivale alla condizione $\Delta = 0$. Infatti appena li si pongano negli elementi fondamentali (1, 0) del riferimento, di cui si possono portare anche gli (0, 1) in una terna di elementi corrispondenti, la equazione della trilinearità assume la forma caratteristica (19_1) del n. 46. Le due costanti essenziali che ancora vi compaiono possono essere determinate linearmente mediante due altre terne generiche di elementi corrispondenti. Dunque *è unica e determinata la corrispondenza trilineare monosingolare di cui siano dati gli elementi singolari e tre terne generiche di elementi corrispondenti* ([58]). Senza alterare il riferimento proiettivo delle tre forme, la sua equazione si può dedurre ancora come nel caso generale dalla (3). Infatti le tre coppie singolari equivalgono a quattro terne indipendenti, che si possono concretare nella terna singolare stessa e nelle terne congiungenti ciascuna coppia singolare con un punto arbitrario della terza forma, ad es. un elemento di una delle tre altre terne date. La determinazione ottenuta è unica, perchè siamo riusciti a sostituire alla condizione algebrica $\Delta(a) = 0$ l'altra equivalente che la terna singolare generi tre coppie neutre, e questa impone alla corrispondenza solo il passaggio per certe terne, cioè solo delle condizioni lineari nei coefficienti. In particolare le tre terne ulteriori possono essere costituite coi sei elementi di una sestupla associata. Con ciò non si viene a diminuire sfavorevolmente la loro genericità, giacchè la (21) del n. 47 ci dice che *è unica e determinata la corrispondenza trilineare monosingolare di cui siano date la terna singolare ed una sestupla associata* ([59]). La sua equazione è addirittura la stessa (21), quando ai birapporti degli elementi si sostituiscano quelli delle loro coordinate. Ad essa si potrebbe

([58]) Cfr. Schubert ([1]), § 7.
([59]) Cfr. Hauck ([11]), § 8.

pervenire anche dalla (3) sostituendovi le coordinate delle 7 terne indipendenti di elementi corrispondenti che si vengono a dare. Se la trilinearità monosingolare non è speciale, essa rimane anche, a norma della (22) (n. 48), univocamente determinata qualora siano dati gli *elementi singolari e gli elementi di fuga.*

58. Supponiamo infine che la trilinearità sia degenere. Se è semplicemente degenere, per determinarla univocamente basta conoscerne l' *elemento singolare e la proiettività fondamentale*, dopo di chè la sua equazione sarà di uno dei tipi (13), (13'), (13") dei numeri 40 e 42. Poichè per determinare una proiettività bastano tre coppie di elementi corrispondenti, ed ogni coppia della proiettività fondamentale si comporta come una coppia neutra, quelle tre coppie, congiunte con due punti generici della terza forma determinano 6 terne indipendenti. Inoltre il possedere sei terne cosiffatte, cioè tre coppie neutre costituite con elementi distinti di due sole forme è caratteristico delle corrispondenze semplicemente degeneri. Infatti, se ad es. quelle forme sono H e Z, poste quelle coppie in (0, 1), (1, 0), (1, 1), si annullano nella equazione i coefficienti dagli indici 111 211 122 222, e si ha inoltre:

$$a_{212} + a_{221} = 0\,, \qquad a_{121} + a_{112} = 0\,,$$

per modo che l'equazione si riduce proprio al tipo caratteristico:

$$\begin{aligned} & a\,x_1\,y_2\,z_1 - a\,x_1\,y_1\,z_2 + b\,x_2\,y_1\,z_2 - b\,x_2\,y_2\,z_1 = \\ (4) \qquad & = (a\,x_1 - b\,x_2)\,(y_1\,z_2 - y_2\,z_1) = 0\,. \end{aligned}$$

La costante essenziale $\frac{b}{a}$ che ancora vi appare può essere determinata quando siano date le coordinate dell' elemento singolare di Ξ, o, se si vuole, una terna (contenente l' elemento singolare) indipendente da quelle già date, cioè i cui elementi su H e Z non si corrispondano nella proiettività fondamentale $y_1\,z_2 - y_2\,z_1 = 0$, le cui coppie sono già per la (4) tutte neutre.

La determinazione di una trilinearità semplicemente degenere mediante *tre coppie della proiettività fondamentale ed una* *terna generica* è unica, perchè alle tre condizioni quadratiche indipendenti che assicurano l'annullarsi delle sezioni unidirezionali della matrice cubica dei coefficienti abbiamo sostituito le equivalenti condizioni lineari di passaggio per sette terne indipendenti, di cui sei tali da definire tre coppie neutre distinte su due sole forme.

Senza ricercare dapprima la equazione della proiettività fondamentale, per poi scrivere quella della trilinearità nella forma (13) del n. 40, e senza alterare il riferimento proiettivo dei sostegni, la equazione della corrispondenza si può ancora ricavare direttamente dalla (3), ove si sostituiscano le coordinate delle sette terne indipendenti e caratteristiche suddette.

59. Se la trilinearità è doppiamente degenere, essa è perfettamente individuata, come risulta dalla (17) del n. 43 *dai suoi elementi singolari*, che ne determinano l'equazione. Alle quattro condizioni quadratiche che assicurano l'annullarsi di tutte le sezioni della matrice cubica dei coefficienti ed alle altre tre che determinano la corrispondenza, si sono sostituite, se P_2, P_2', P_2'' sono gli elementi singolari e P_1, P_1', P_1'' tre elementi qualsiasi le sette condizioni lineari indipendenti di passaggio per le sette terne:

$$P_2 P_2' P_2'' \; ; \quad P_2 P_2' P_1'' \; ; \quad P_2 P_1' P_2'' \; ; \quad P_1 P_2' P_2'' \; ;$$
$$P_2 P_1' P_1'' \; ; \quad P_1 P_2' P_1'' \; ; \quad P_1 P_1' P_2'' \; ,$$

che caratterizzano la corrispondenza doppiamente degenere di elementi singolari $P_2 P_2' P_2''$. Infatti, posti $P_2^{(i)}$ e $P_1^{(i)}$ negli elementi fondamentali omonimi di Ξ, H, Z, nella equazione della trilinearità si annullano i coefficienti dagli indici:

$$222 \quad 221 \quad 212 \quad 122 \quad 211 \quad 121 \quad 112 \, ,$$

e quindi essa è proprio del tipo caratteristico (17') del n. 48.

Senza alterare il riferimento proiettivo di Ξ, H, Z la equazione della trilinearità si può ancora dedurre come in generale dalla (3), sostituendovi le coordinate degli elementi delle sette terne indipendenti e caratteristiche suddette.

60. Possiamo domandarci quando la trilinearità che abbiamo determinato sia reale. Abbiamo veduto come una trilinearità reale possegga sempre ∞^2 terne reali. Dalla (3) risulta che viceversa, *appena una trilinearità ammette sette terne indipendenti reali è reale.* Infatti sono allora reali i minori di ordine 7 della (2), quindi i coefficienti della (3). Quei minori sono però reali (proporzionali ai coniugati) anche quando gli elementi di due righe appartenenti alle stesse colonne sono immaginari e coniugati. Quindi se diciamo coniugata di una terna quella che contiene gli elementi coniugati, si ha che è reale anche la trilinearità determinata da $7-2h$ terne reali e da $2h$ terne immaginarie ($h=1, 2, 3$), purchè queste siano a coppie coniugate.

Con questo criterio si può riconoscere che è reale la trilinearità in cui ad un elemento immaginario corrisponda una proiettività immaginaria, al coniugato la coniugata, ed ammetta una terna reale. Oppure che è reale la trilinearità generata ponendo una proiettività reale tra un fascio di proiettività reali ed una forma di 1ª specie.

Con riguardo agli elementi singolari, risulta dalla (14) del del n. 17 che è reale (iperbolica) una trilinearità generale che abbia gli elementi singolari reali ed ammetta una terna reale. Ciò si poteva riconoscere anche esaminando le 7 terne indipendenti che si vengono a dare. Analogamente, dall'esame di 7 terne indipendenti, o dalla forma ridotta (17) del n. 20 risulta che è reale (ellittica) una trilinearità generale che abbia su ogni forma gli elementi singolari immaginari e coniugati, ed ammetta una terna reale. Tanto in questo caso che nel precedente alla terna reale potevasi sostituire il valore della caratteristica, reale nel primo caso, immaginaria e di modulo 1 nel secondo, o l'ascissa di un elemento di fuga, sempre reale.

Nei casi A), B), C), D) del n. 55 la realtà o meno della trilanearità generale determinata si può riconoscere, conformemente ai principi generali enunciati sopra, dall'esame delle 7 terne indipendenti che in ogni caso si vengono a dare.

Quando la trilinearità determinata è singolare, allora per essere reale deve necessariamente avere gli elementi singolari reali (n. 44). Dalla (3) col solito principio si può riconoscere che per la realtà della corrispondenza è sufficiente che siano reali tutte le tre altre terne necessarie per la determinazione, oppure una sola, quando le altre due siano immaginarie e coniugate.

Quando le ultime tre terne sono formate a partire da una sestupla associata, la trilinearità è certamente reale se tutti gli elementi della sestupla sono reali. In particolare, se i punti principali sono impropri, è reale la trilinearità monosingolare che abbia gli elementi singolari e gli elementi di fuga reali.

Infine, mentre a norma del n. 41 è necessario che l'elemento singolare e la proiettività fondamentale di una trilinearità reale semplicemente degenere siano reali, dalla (13) del n. 40 e dalle analoghe (13′), (13″) risulta che tale condizione è anche sufficiente per assicurare la realtà della corrispondenza.

Quando poi la trilinearità determinata è doppiamente degenere, per la sua realtà occorre e basta che i tre elementi singolari siano reali. È evidente che le condizioni in discorso per le trilinearità iperboliche, paraboliche od ellittiche, pur essendo sufficienti, non sono sempre necessarie. In generale *perchè la trilinearità determinata da 7 terne indipendenti sia reale, è solo necessario* (e sufficiente) *che siano* (proporzionali a numeri) *reali* (i coefficienti della (3), cioè) *i minori d'ordine massimo della* (2).

Capitolo IV.

Casi notevoli di trilinearità tra particolari forme di prima specie.

61. Finora abbiamo considerato la corrispondenza trilineare senza riguardare alla particolare natura delle forme di prima specie da essa legate. Conviene prima di procedere dare uno sguardo alle corrispondenze più semplici e più notevoli tra rette, fasci di rette e fasci di piani, sempre supponendo le forme distinte e considerandole dal punto di vista della geometria elementare.

Siano $\Xi \equiv u$, $H \equiv u'$, $Z \equiv u''$ tre rette distinte, e sia O un punto generico dello spazio. Consideriamo la corrispondenza tra u, u', u'', che si ottiene associando tre punti ogni qual volta essi siano complanari con O ([60]). Essa è evidentemente algebrica, ottenendosi per sezione coi piani della stella di centro O. Due punti generici di due delle rette date individuano il piano che li congiunge con O, e quindi il terzo punto corrispondente, che è dunque unico. Si tratta perciò di una corrispondenza trilineare (n. 3).

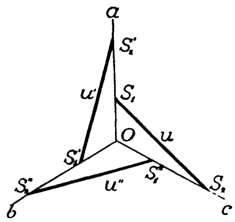


Fig. 5

Quando (fig. 5) le intersezioni a, b, c dei tre piani $(O\,u)$, $(O\,u')$, $(O\,u'')$ sono distinte, e quindi u, u', u'' non sono appoggiate ad una stessa retta per O, allora la trilinearità ottenuta è di tipo generale, ed essendo reale, iperbolica. Infatti, se con S_1, S_2'; S_1', S_2''; S_1'' S_2 indichiamo i punti di u ed u'; u' ed u''; u'' ed u giacenti su a, b, c, essa possiede le sei coppie neutre $S_1\,S_2'$, $S_1'\,S_2''$, $S_1''\,S_2$; $S_2\,S_1'$, $S_2'\,S_1''$, $S_2''\,S_1$, ed esse sole.

La indeterminazione dell' elemento corrispondente proviene tre volte dall' essere i punti della coppia allineati con O, e tre volte dal giacere nel piano congiungente O con l' altra retta.

Risulta immediatamente che ad un punto di una delle tre rette corrisponde una proiettività, anzi una prospettività delle altre due, segata dai piani che passano per la congiungente quel punto con O. Facendo muovere il punto, la prospettività corrispondente descrive un sistema ∞^1 che è un fascio, come quello descritto dall' asse del fascio di piani che la taglia (cfr. n. 9).

Risulta chiaramente il carattere di coppie comuni a tutte le prospettività del fascio, che pertinge com'è noto alle coppie singolari delle altre due rette (cfr. n. 10).

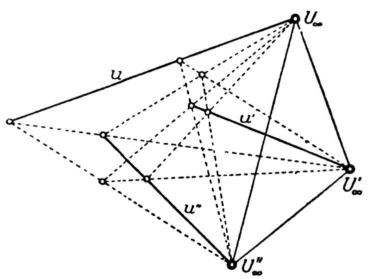
In ogni fascio vi sono solo due prospettività degeneri, corrispondenti agli elementi singolari, essendo la congiungente di ognuno di essi con O incidente ad una delle altre due rette date. È chiaro come sia indifferente scambiare contemporaneamente i nomi dei punti singolari di ciascuna retta (cfr. n. 11).

([60]) Cfr. Schubert ([1]), § 1.

Su ogni retta il punto di fuga è tagliato dal piano congiungente O coi punti impropri delle altre due. Esso è anche complanare coi punti di mezzo dei segmenti singolari (segmenti finiti compresi tra gli elementi singolari) delle altre due rette, essendo questi coniugati armonici degli elementi impropri rispetto agli elementi singolari stessi (n. 23).

62. Se la caratteristica vale -1, allora O è complanare con i tre punti di mezzo dei segmenti singolari (n. 25).

Se O è improprio, allora i punti impropri si corrispondono e la caratteristica vale $+1$ (n. 25). Ciò accade anche per O generico se i tre punti impropri sono allineati.



Eig. 6

Gli altri casi metrici speciali intervengono quando O cade in uno dei sei piani che congiungono ciascuna retta coi punti impropri delle altre due, ed in particolare nelle loro 12 intersezioni distinte dalle tre rette date (fig. 6). Di queste solo tre, che congiungono i punti impropri di u, u', u'' sono improprie.

Si riconosce facilmente che si ottiene una trilinearità parabolica quando O appartiene alla quadrica rigata generata dalle rette appoggiate ad u, u', u'' [61]. Infatti allora u, u', u'' sono appoggiati ad una medesima retta per O (fig. 7). I punti di appoggio S, S', S'' costituiscono la terna singolare. Ad ognuno di essi corrisponde una prospettività degenere (cfr. n. 45), essendo la sua congiungente con O appoggiata alle altre due rette. Inoltre le coppie SS', $S'S''$, $S''S$ sono neutre, perchè essendo allineate con O e con S, S', S'', per esse passano ∞^1 piani, ed in particolare uno che contiene tutta la u'', u, u'.

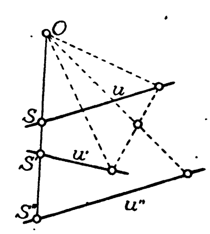


Fig. 7

(61) Cfr. Schubert (1), § 7.

Anche ora ai punti di una retta corrispondono un fascio di prospettività tra le altre due, ma esse sono tali da ammettere una sola coppia in comune, che è poi la coppia singolare.

Se O non è improprio, i tre punti di fuga sono propri, a meno che i tre punti impropri non siano allineati, cioè che il piano improprio non sia tangente alla quadrica rigata individuata da u, u', u''.

Sempre essendo arbitraria la posizione di u, u', u'', quando O cade in una delle tre rette, la corrispondenza diviene semplicemente degenere. Infatti, mentre ad O corrispondono tutte le ∞^2 coppie di punti delle altre due rette (segate dai piani della stella di centro O), ad un punto qualsiasi di quella retta diverso da O corrisponde sempre la stessa prospettività π segata sulle altre due dai piani passanti per la prima (cfr. n. 39).

Infine π è degenere, e quindi è doppiamente degenere la trilinearità quando una delle altre due rette è incidente a quella su cui giace O. Se ad es. quella è u', e questa u, ed esse si tagliano in P, i punti singolari sono O, P ed il punto di intersezione Q del piano $(u\ u')$ con u''.

63. Con le considerazioni duali di quelle già svolte si prova che è una corrispondenza trilineare quella detta dall' August *prospettiva* (62), che si ottiene fra tre fasci di piani di S_3 quando si associno i piani che proiettano uno stesso punto di un piano fisso ω. Per essa valgono le proprietà duali di quelle enunciate nel caso precedente. Così ad es. i piani singolari sono quelli che congiungono ogni asse con le intersezioni degli altri due con ω.

Ad un piano di uno dei fasci che intersechi ω in a corrispondono tutte le coppie della prospettività che si ottiene proiettando dagli assi degli altri due fasci i punti di a.

È utile pel seguito osservare che le intersezioni dei tre piani di una terna non riempiono solo ω, ma anche la quadrica rigata delle rette appoggiate ai tre assi. Infatti, appena un piano di uno dei tre fasci passa per un punto della conica segata su ω dalle sue generatrici, contiene tutta la generatrice per quel punto.

(62) Cfr. nota (2).

Dualmente, nel caso precedente gli spazi congiungenti i tre punti di una terna non descrivono solo la stella (di piani) di centro O, ma anche, quando i punti sono allineati, tutte le generatrici della rigata quadrica che ha per direttrici u, u', u''.

Tornando ai nostri tre fasci di piani, se i tre assi sono sghembi a due a due, la trilinearità ottenuta è parabolica allorchè ω è tangente alla quadrica delle rette appoggiate ai tre assi. In tal caso le intersezioni degli assi con ω sono allineate. La loro retta s congiunta con ciascun asse dà l'elemento singolare di ogni fascio, ed è senz'altro evidente perchè le prospettività corrispondenti siano degeneri ed i loro elementi singolari siano i piani singolari della trilinearità.

Quando ω contiene uno degli assi la trilinearità è semplicemente degenere, l'elemento singolare è ω stesso, e la prospettività fondamentale quella ottenuta proiettando dagli altri due assi il primo giacente in ω. Questa prospettività è degenere quando l'asse giacente in ω è complanare con uno degli altri due. Allora la trilinearità è doppiamente degenere.

Supponiamo ancora che ω sia generico. In esso i tre fasci di piani dati segano tre fasci di rette, tra i quali intercede la corrispondenza trilineare prospettiva della precedente, in cui sono associate le terne di raggi che proiettano un punto mobile in ω. Questo caso particolare di corrispondenza trilineare è molto importante, sia per la semplicità con cui si può costruire il relativo campo di terne, sia perchè si presta a metterne in evidenza alcune interessanti proiettività.

Prima di parlarne diffusamente accenniamo al caso duale (nel piano) della trilinearità che si ottiene fra tre rette complanari quando si associno tre punti che siano allineati.

64. La corrispondenza «*allineata*» [63] che così si ottiene non è ovviamente che un caso particolare di quella messa già in evidenza al n. 61 tra tre rette sghembe, e ottenuta per sezione coi piani per O. Infatti quando le tre rette sono complanari, essa non dipende dalla posizione di O, ed i tre punti di una

[63] Cfr. SCHUBERT [1], § 1.

terna godono della proprietà caratteristica di essere allineati. I punti singolari cadono allora nelle tre intersezioni di u, u', u''. Si può ad es. supporre (fig. 8) che coincidano S_1 ed S_2', S_1' ed S_2'', S_1'' ed S_2. Le sei coppie neutre si hanno o quando due punti singolari sono sovrapposti, nel qual caso la loro congiungente è indeterminata, o quando la congiungente i due punti singolari coincide con la terza retta, per modo che è indeterminata la sua intersezione con questa [64].

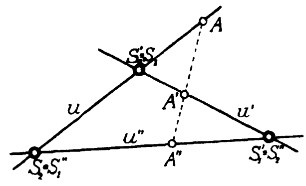


Fig. 8

Ad un punto $A^{(j)}$ di una delle tre rette corrispondono le coppie della prospettività segata sulle altre due dai raggi del fascio $(A^{(j)})$, e poichè la corrispondenza tra tali prospettività ed i punti $A^{(j)}$ di $u^{(j)}$ è biunivoca, è evidente che esse descrivono un fascio.

Risulta chiaramente che due prospettività del medesimo fascio hanno in comune solo le 2 coppie neutre corrispondenti. Inoltre ad ogni elemento singolare corrisponde una prospettività degenere, giacchè c' è un raggio del relativo fascio che coincide con una delle due altre rette date.

(64) Questo metodo per costruire corrispondenze trilineari fra tre punteggiate complanari è un caso particolare del seguente:

Siano u_1, u_2, u_3 tre rette complanari incidenti in A, B, C. Si consideri un sistema lineare di dimensione $3m+2$ di curve algebriche piane di ordine $m+1$, i cui punti base cadano fuori di u_1, u_2, u_3. Si riduca quel sistema ad una rete imponendo alla curva variabile di passare per m punti scelti genericamente fuori di A, B, C su ogni retta. Si viene così a segare su u_1, u_2, u_3, fuori dei punti fissi una corrispondenza algebrica, tale che è determinato ed unico il corrispondente sulla terza retta di due punti generici delle altre due. Dunque è una trilinearità. Si riconosce immediatamente che gli elementi singolari cadono ancora in A, B, C,

Questa costruzione lascia intravedere notevoli generazioni di corrispondenze algebriche di tipo più generale delle trilineari, ad es. tra un certo numero m di curve algebriche piane $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, ... $C_{(m)}$, di ordini rispettivi n_1, n_2, ... n_m, quando si pensino come omologhi gli $n(n_1+n_2+\dots n_m)-l$ punti variabili tagliati su $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, ... $C_{(m)}$ fuori di $l=l_1+\dots+l_m$ punti fissi da un' altra curva algebrica piana C, di ordine n, variabile in un sistema ∞^r.

Se le tre rette non passano per uno stesso punto, su ognuna di esse gli elementi singolari sono distinti e la trilinearità, essendo reale, è iperbolica. I punti impropri si corrispondono, essendo staccati sulle tre rette dalla retta impropria del piano. Quindi la caratteristica della corrispondenza vale $+1$.

La nota proprietà elementare dei triangoli che la congiungente i punti di mezzo di due lati sia parallela al terzo, ci fa chiaramente riconoscere come ogni punto improprio corrisponda anche ai coniugati armonici degli altri due rispetto agli elementi singolari.

65. Più in generale sappiamo che se tre punti si corrispondono, ognuno di essi corrisponde pure ai coniugati armonici degli altri due rispetto agli elementi singolari [65]. Ciò risulta qui immediatamente dalle note proprietà dei quadrangoli piani completi. Infatti siano A, B, C tre elementi corrispondenti, e quindi allineati. Congiungiamo A con S_2'', B con S_1'', e la intersezione D delle due rette così ottenute con S_1. Si ottiene su u'' il punto C_1, coniugato armonico di C rispetto ad S_1'', S_2''. Del gruppo armonico $S_1'' S_2'' C C_1$, $S_1 B D A$ è il quadrangolo costruttore. Dico che $C_1 B$ incontra u nel coniugato armonico A_1 di A rispetto ad S_2 ed S_1. Infatti ciò risulta immediatamente considerando il quadrangolo $B D C_1 S_1'$. Dunque A_1, B, C_1 sono corrispondenti, perchè allineati.

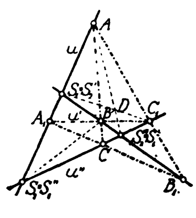


Fig. 9

Scambiando l' ufficio delle forme è chiaro che risulteranno allineati, cioè corrispondenti anche $A_1 C B_1$ (dove B_1 è il coniugato armonico di B rispetto ad $S_2' S_1'$) ed $A C_1 B_1$. Del resto ciò risulta anche dalla figura, considerando opportuni quadrangoli.

Risulta così evidente la notevole simmetria del gruppo delle 4 terne generate da sei elementi A, B, C, A_1, B_1, C_1. Esso è individuato da una qualsiasi delle sue terne, quindi due gruppi siffatti non possono avere alcuna terna in comune.

[65] Se i primi sono reali sono reali anche i secondi, tanto nelle trilinearità iperboliche che nelle ellittiche.

Ad un altro notevole insieme (infinito) di terne, e quindi di punti, si perviene dalla considerazione della sestupla associata, che ci è già servita al n. 47 per studiare le trilinearità monosingolari:

Si parta da tre punti generici delle tre rette u, u', u'', che *non si corrispondano* e che indicheremo con 1, 1', 1''. Si determinino i corrispondenti 2, 2', 2'' di 1' ed 1'', 1 ed 1'', 1 ed 1' (punti secondari della sestupla avente gli elementi principali in 1, 1', 1''), quindi i corrispondenti 3, 3', 3'' di 2' 2'', 2 2'', 2 2', e così via. Su ciascuna retta si viene a formare una successione infinita di punti, discontinua, e tale che (come risulta dalla costruzione) mentre i punti indicati con cifre dispari tendono a confondersi con un punto singolare (ad es. $S_1^{(j)}$) quelli indicati con cifre pari tendono a coincidere con l'altro ($S_2^{(j)}$). Inoltre ciascun insieme occupa solo uno dei due segmenti proiettivi in cui ciascuna retta è divisa dai suoi punti singolari.

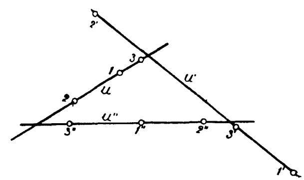


Fig. 10

Sappiamo già che tutte le trilinearità generali sono proiettivamente equivalenti, e tra loro impareremo a trasformare ogni trilinearità generale in una trilinearità allineata (o nella duale, che è lo stesso). Perciò tali gruppi notevoli finiti o infiniti di terne e di di elementi esistono e si possono mettere in evidenza in ogni trilinearità generale. Implicitamente ne abbiamo data la costruzione.

66. Sia data una trilinearità iperbolica tra rette reali qualsiasi. Se i segmenti singolari sono tali che nessuno di essi superi la somma degli altri due si possono sempre trasportare rigidamente le tre rette in un piano in modo che nelle loro tre intersezioni cadano rispettivamente i punti singolari S_1 ed S_2'; S_2 ed S_1''; S_1 ed S_2''. Ci si può allora chiedere se quella corrispondenza trilineare risulti in generale allineata. Evidentemente no, giacchè sappiamo che per individuare una trilinearità iperbolica oltre agli elementi singolari occorre dare una terna di punti corrispondenti, e questi si possono sempre scegliere in modo tale che a trasporto avvenuto non risultino allineati. Però, appena la trilinearità sia tale che *una* terna non contenente elementi singolari risulti allineata, avendo in comune con la corrispondenza allineata gli elementi singolari ed una terna, coincide con essa e tutte le sue terne sono allineate. In particolare è allineata quando la caratteristica è uguale ad 1, essendo allora corrispondenti i punti impropri, che sono allineati perchè giacciono sulla retta impropria del piano.

Ciò si poteva anche conseguire ([66]) servendosi del teorema di Menelao ([67]), e della (14′) e (14″) del n. 21.

La corrispondenza allineata è parabolica quando le tre rette complanari u, u', u'' si tagliano in un solo punto. Si riconosce immediatamente che in esso coincidono i tre elementi singolari della corrispondenza. Come nel caso già trattato al n. 62 tra tre rette sghembe, dove in particolare rientra anche questo, si possono riconoscere direttamente le principali proprietà già note della trilinearità monosingolare. Può interessare sapere quando una corrispondenza trilineare parabolica fra tre rette sia tale che, trasportatele rigidamente in un piano in modo da avere i punti singolari sovrapposti, essa risulti allineata. Come sopra, sfruttando i criteri di determinazione delle trilinearità monosingolari, possiamo affermare che occorre e basta che tre terne non contenenti elementi singolari risultino allineate. In particolare le tre terne di una sestupla associata.

67. Nel piano la duale della corrispondenza trilineare allineata fra tre rette punteggiate è la trilinearità « *concorrente* » fra tre fasci di raggi complanari R, R', R'' ottenuta associando in una terna tre raggi passanti per un punto, ed a cui abbiamo già accennato. Essa gode naturalmente delle proprietà duali.

Così accade due volte che una coppia di raggi di due fasci non determini il raggio corrispondente: quando la loro intersezione cade nel centro del terzo fascio, o quando la loro interse-

([66]) Cfr. ad es. Schuhert ([1]), § 4.
([67]) Cfr. ad es. Comessatti ([17]), I, pag. 46.

zione è indeterminata perchè essi sono sovrapposti. Dunque gli elementi singolari sono i raggi che congiungono i centri dei fasci. E poichè le coppie singolari sono formate nel modo suddetto, possiamo supporre che siano sovrapposti s_1 ed s_2' ad RR', s_1'' ed s_2 ad RR'', s_1' ed s_2'' a $R'R''$.

Ad un raggio generico di uno dei tre fasci corrisponde la prospettività degli altri due che lo ha come asse di prospettiva, e tali prospettività formano un fascio, come i loro assi. Le coppie singolari sono comuni a tutte le prospettività del fascio. Agli elementi singolari (e ad essi soli) corrisponde una prospettività degenere.

Se come riferimento proiettivo assumiamo uno di quelli metrici che si possono pensare sulle congiungenti i centri (ai cui punti possiamo riferire prospettivamente i raggi del fascio opposto) in ogni caso gli elementi «impropri» sono le parallele ai lati del triangolo, coniugate armoniche delle rispettive mediane, ed è noto che due tali parallele concorrono sempre in un punto con la terza mediana. Se poi quel riferimento si pensa come un riferimento metrico (nel senso del n. 21), la nota proprietà che le mediane di un triangolo si incontrano nel baricentro, combinata col teorema di Ceva (cfr. nota ([67])), ci dice che i coniugati armonici degli elementi impropri rispetto agli elementi singolari si corrispondono e che la caratteristica della corrispondenza è uguale a -1. Ciò conferma le proprietà già più volte messe in evidenza degli elementi coniugati di tre elementi corrispondenti (n. 23), assieme a quelle delle corrispondenze di caratteristica -1.

Altre due terne notevoli sono quelle delle altezze e delle bisettrici. Le coniugate armoniche di queste ultime rispetto ai raggi singolari sono le bisettrici degli angoli esterni, normali alle precedenti, ed è noto che, come vuole la teoria della trilinearità, due di esse concorrono sempre con la bisettrice dell'altro angolo interno in un punto. Dal criterio *E*) del n. 55 risulta che appena una corrispondenza trilineare tra fasci di raggi complanari sia tale che gli elementi singolari coincidano nel modo anzidetto con le congiungenti i centri, ed i raggi di una terna concorrano in un punto (che non cada sui lati del triangolo $RR'R''$), tutte le sue terne sono formate di raggi concorrenti.

Consideriamo ora la configurazione (duale di quella del n. 65) generata dall'insieme dei tre raggi $a\ b\ c$ di una terna e dei loro coniugati armonici a_1, b_1, c_1 rispetto agli elementi singolari.

Prima le rette che tagliavano le quattro terne del « gruppo associato » su u, u', u'' erano i lati di un quadrilatero piano completo, di cui i sei punti A, A_1, B, B_1, C, C_1 erano i vertici, gli elementi singolari i punti diagonali ed u, u', u'' le tre rette diagonali.

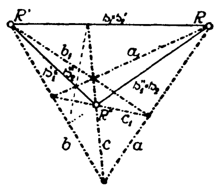


Fig. 11

Adesso i punti di intersezione delle 4 terne del gruppo associato sono i vertici di un quadrandolo piano completo, di cui i sei lati sono gli elementi a, b, c, a_1, b_1, c_1; i punti diagonali sono i sostegni R, R', R'' dei tre fasci e le rette diagonali le rette singolari.

Osservazione: Consideriamo un sistema di coordinate proiettive nel piano, di cui siano R, R', R'' i punti fondamentali ed U il punto unità. La trilinearità concorrente dei tre fasci di rette (R), (R'), (R'') è determinata, se u_1, u_2, u_3 sono i raggi proiettanti U, ed $x_1\ x_2\ x_3$ quelli proiettanti un punto X del piano, dalla relazione fondamentale (n. 17):

$$(s_1\ s_2\ u_1\ x_1)\ (s_1'\ s_2'\ u_2\ x_2)\ (s_1''\ s_2''\ u_3\ x_3) = 1\ . \tag{5}$$

Ma i birapporti che vi compaiono non sono altro che le (i rapporti delle) coordinate proiettive di X relative al sistema $R\ R'\ R''\ U$, di cui la (5) com'è noto è la condizione di compatibilità [68]. Dunque le terne dei valori (dei rapporti) delle coordinate proiettive dei punti di un piano descrivono una corrispondenza trilineare generale.

68. Se i tre fasci sono distinti, la corrispondenza trilineare concorrente è sempre iperbolica, a meno che i tre centri R, R', R'' non siano allineati, nel qual caso solamente essa è parabolica. Allora la congiungente i centri coincide con l'elemento

([68]) Comessatti ([17]), II, pag. 141.

singolare di ogni fascio. Tutte le prospettività del fascio delle corrispondenti agli elementi di $R^{(3)}$ hanno in comune la sola coppia singolare delle altre due forme.

La prospettività corrispondente ad un elemento singolare è degenere perchè ad un raggio generico corrisponde sempre l'elemento singolare dell'altro fascio.

La duale nello spazio della corrispondenza concorrente è la trilinearità che si ottiene tra tre fasci di rette non complanari ma aventi il centro in comune quando si associno tre raggi appartenenti al medesimo piano per il centro. I raggi singolari coincidono colle tre intersezioni dei piani dei tre fasci.

La duale nello spazio della corrispondenza allineata è la trilinearità che si ottiene tra tre fasci di piani i cui assi passino per uno stesso punto O quando si associno i tre piani passanti per una retta della stella di centro O. Piani singolari sono quelli congiungenti gli assi.

69. G. Hauck (69) genera una corrispondenza trilineare tra tre punteggiate complanari tagliandole coi raggi che da tre centri fissi $O_1\ O_2\ O_3$ proiettano i punti P del piano.

Si tratta evidentemente della corrispondenza ottenuta per sezione da quella concorrente dei tre fasci di raggi di centri $O_1\ O_2\ O_3$. Perciò gli elementi singolari saranno le intersezioni delle tre rette $u\ u'\ u''$ con le $O_1\ O_2$, $O_2\ O_3$, $O_3\ O_1$.

Inoltre date tre rette trilineari e postele in un piano con gli elementi singolari allineati su tre punti O_1, O_2, O_3, perchè la trilinearità coincida con quella di Hauck occorre e basta che i tre raggi $x\ x'\ x''$ proiettanti da essi i punti di una terna concorrano in un punto P. Quando la trilinearità è iperbolica ciò è sempre possibile. Infatti basta ad es. disporre le rette u, u', u'' in un piano in modo che si taglino in un punto P cui siano sovrapposti i punti X, X', X'' di una terna. Le congiungenti le coppie singolari determinano poi con le loro intersezioni O_1, O_2, O_3.

I punti di fuga possono determinarsi facilmente, sia mediante

(69) l. cit. (11), § 1.

gli elementi impropri, che i punti di mezzo dei segmenti singolari, loro coniugati armonici rispetto agli elementi singolari stessi (fig. 12) ([70]).

Quando la caratteristica della corrispondenza è — 1, allora, se ogni segmento singolare è minore della somma degli altri due, trasportate le tre rette in un piano con S_1 ed S'_2, S'_1 ed S''_2, S''_1 ed S_2 sovrapposti rispett. a tre punti O_1, O_2, O_3, poichè i punti di mezzo dei segmenti singolari si corrispondono (n. 25) e d'altra parte le mediane di un triangolo si tagliano nel baricentro, la trilinearità coincide con quella tagliata sulle rette date dai tre fasci concorrenti O_1, O_2, O_3.

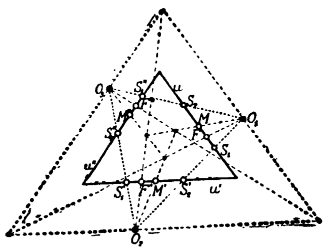


Fig. 12

([70]) Si viene così a mettere in evidenza un notevole gruppo di 9 elementi, costituenti per quanto precede 6 terne della trilinearità. A partire da un gruppo analogo è facile costruire un gruppo di 12 elementi reali costituenti fra loro *altrettante* terne.

Riferiamoci per semplicità (fig. 13) alla corrispondenza concorrente tra tre fasci di rette complanari U_1 U_2 U_3 e partiamo da tre rette p_1, p_2, p_3 di fasci diversi, non corrispondenti. Costruiamo le rette secondarie r_1, r_2, r_3 della sestupla associata (n. 47) colle rette principali p_1, p_2, p_3; indi le coniugate armoniche q_1, q_2, q_3 di p_1, p_2, p_3 rispetto agli elementi singolari dei loro fasci. Poichè anche la sestupla associata con le rette principali q_1, q_2, q_3 ha per elementi secondari r_1, r_2, r_3 (come discende dal n. 23, penultimo alinea; cfr. anche il n. 33), le 9 rette considerate costituiscono le 6 terne:

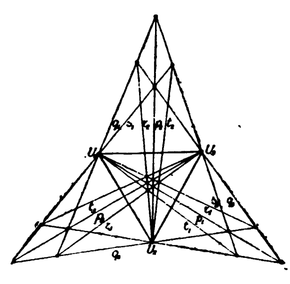


Fig. 13

$$r_1 p_2 p_3, \quad p_1 r_2 p_3, \quad p_1 p_2 r_3, \quad r_1 q_2 q_3, \quad q_1 r_2 q_3, \quad q_1 q_2 r_3.$$

Ancora dal n. 23, come pure dalla figura, risulta immediatamente che su di u_1 la corrispondente di p_2 e q_3 e quella di p_3 e q_2 coincidono con la coniugata armonica s_1 di r_1 rispetto agli elementi singolari. Considerazioni analoghe valgono per le coniugate armoniche s_2 ed s_3 di r_2 ed r_3 rispetto agli elementi singolari dei sostegni relativi. Quindi, se alle nove rette pre-

Invece quando una trilinearità iperbolica tra tre rette ha caratteristica uguale a $+1$, poichè i punti impropri si corrispondono, per generare la trilinearità col metodo di Hauck basta portarle nel medesimo piano e disporle parallelamente (col punto improprio in comune).

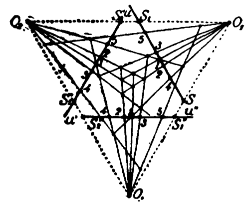


Fig. 14

Ecco infine (fig. 14) la interessante figura generata dall' insieme infinito di terne messo in luce al n. 65, nel caso che la trilinearità sia quella concorrente dei fasci (O_1), (O_2), (O_3), oppure la sua sezione secondo Hauck delle tre rette u, u', u''. Le successive terne (non corrispondenti) di raggi dell' insieme generano una successione infinita di triangoli circoscritti ad $O_1 O_2 O_3$, ciascuno inscritto nel successivo, e tali che proseguendo indefinitamente la costruzione il triangolo variabile tende a sovrapporsi ad $O_1 O_2 O_3$.

70. Poichè l' esser parabolica non dipende dalle trasformazioni proiettive dei sostegni, la trilinearità di Hauck sarà parabolica solo allorchè lo sia quella concorrente dei tre fasci O_1, O_2, O_3, e questo accade solamente quando O_1, O_2, O_3 sono allineati. Quindi perchè una trilinearità parabolica tra tre punteggiate complanari si possa generare col metodo di Hauck, occorre per quanto precede che i tre elementi singolari siano allineati e che tre terne siano proiezione di tre punti del piano da tre centri O_1, O_2, O_3 allineati con gli elementi singolari.

cedenti aggiungiamo s_1, s_2 ed s_3, alle sei terne già considerate si aggiungono le altre sei:

$$s_1\, p_2\, q_3, \quad s_1\, q_2\, p_3, \quad q_1\, s_2\, p_3, \quad p_1\, s_2\, q_3, \quad q_1\, s_2\, p_3, \quad p_1\, s_2\, q_3, \quad \text{c. v. d.}$$

Così procedendo è facile vedere che è possibile costruire gruppi di n elementi reali che costituiscano fra loro *più di n* terne corrispondenti. Basta ad es. aggiungere alle precedenti le tre rette secondarie t_1, t_2, t_3 della sestupla colle rette principali s_1, s_2, s_3, coniugate armoniche di r_1, r_2, r_3 rispetto agli elementi singolari dei loro sostegni. Alle 12 terne già viste si aggiungono quindi le altre sei:

$$t_1\, r_2\, r_3, \quad r_1\, t_2\, r_3, \quad r_1\, r_2\, t_3, \quad t_1\, s_2\, s_3, \quad s_1\, t_2\, s_3, \quad s_1\, s_2\, t_3,$$

e si hanno in totale 18 terne corrispondenti formate solo con 15 elementi.

È sempre possibile trasportare tre rette parabolicamente trilineari in un piano in modo che soddisfino alla condizione richiesta. Ad esempio se A, A', A''; B, B', B'', C, C', C'' sono le tre terne date, si porti, facendo scorrere S' ed S'' sulla retta d, A' a sovrapporsi ad A e B'' a B. Allora (fig. 15) O_2 ed O_3 sono determinati rispettivamente dalle intersezioni di d con BB' ed AA'', G dalla intersezione di $C'O_2$ e $C''O_3$; O_1 da quella di d con CG (71).

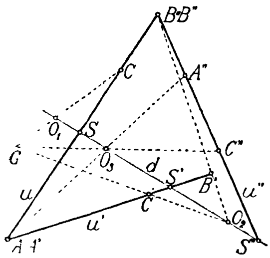


Fig. 15

71. Anche se non ci servirà per le costruzioni, non possiamo fare a meno di ricordare l' elegante generazione della corrispondenza trilineare tra tre rette indipendenti data da C. SEGRE (72),

In uno spazio lineare astratto qualsiasi S_n (73) ($n \geq 5$) tre rette m, n, p diconsi indipendenti quando il loro spazio congiungente è un S_5 (74). Assumiamone su tali rette i punti fondamentali 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6 delle coordinate. Tre punti qualunque di m, n, p avranno per coordinate (omogenee):

$$\begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 & v_6 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 & 0 & 0 & w_6, \end{matrix}$$

dove le u, le v e le w sono dei parametri arbitrari.

(71) Cfr. HAUCK (11), § 8.

(72) C. SEGRE, *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni* [Annali di Matematica pura e appl. Serie III, Tomo XXVII (1917)], n. 5.

(73) Cfr. E. BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi.* (Messina, 1923) p. 1 e seg.

(74) Cfr. BERTINI (73), pag. 14.

Il piano che congiunge quei tre punti avrà otto delle sue venti coordinate grassmanniane p_{hkl} [75] espresse così:

$$
(6) \quad \begin{cases} p_{123} = u_1 v_2 w_3 & p_{234} = u_4 v_2 w_3 & p_{315} = u_1 v_5 w_3 \\ p_{126} = u_1 v_2 w_6 & p_{156} = u_1 v_5 w_6 & p_{264} = u_4 v_2 w_6 \\ p_{345} = u_4 v_5 w_3 & p_{456} = u_4 v_5 w_6 & \end{cases}
$$

e le 12 rimanenti uguali a zero.

Un complesso lineare di piani è definito in S_5 dalla equazione:

$$
(7) \qquad \Sigma\, c_{hkl}\, p_{hkl} = 0\,,
$$

dove la sommatoria è estesa alle 20 combinazioni ternarie $h\,k\,l$ dei sei indici 1, 2, . . . 6. Se esso è generico (non sono nulle le 8 c_{hkl} corrispondenti alle (6) e quindi) i suoi piani segnano su m, n, p le terne di una corrispondenza trilineare di equazione:

$$
(8) \quad \begin{cases} c_{123}\, u_1 v_2 w_3 + c_{234}\, u_4 v_2 w_3 + c_{315}\, u_1 v_5 w_3 + c_{126}\, u_1 v_2 w_6 + \\ + c_{156}\, u_1 v_5 w_6 + c_{264}\, u_4 v_2 w_6 + c_{345}\, u_4 v_5 w_3 + c_{456}\, u_4 v_5 w_6 = 0, \end{cases}
$$

che si ottiene dalla (7) sostituendovi le espressioni (6) delle coordinate del piano congiungenti tre punti generici di m, n, p.

Presi su m, n, p i rapporti $u = \dfrac{u_1}{u_4}$, $v = \dfrac{v_2}{v_5}$, $w = \dfrac{w_3}{w_6}$ come coordinate non omogenee di punto, la (8) si scrive:

$$
(8') \quad \begin{cases} c_{123}\, u\, v\, w + c_{234}\, v\, w + c_{315}\, w\, u + c_{126}\, u\, v + c_{156}\, u + \\ \qquad + c_{264}\, v + c_{345}\, w + c_{456} = 0\,. \end{cases}
$$

Viceversa una stessa corrispondenza trilineare è tagliata su m, n, p dai piani di ∞^{12} diversi complessi lineari che hanno 8 c_{hkl} uguali (o proporzionali) a quelle che figurano nella (8) e le altre 12 arbitrarie.

[75] Minori di ordine 3 ottenuti dalla matrice delle coordinate di 3 punti indipendenti prendendo le colonne $h\,k\,l$. In S_5 ve ne sono tante distinte quante sono le combinazioni ternarie di 1, 2, . . . 6, cioè 20, legate da 10 relazioni quadratiche indip.

CAPITOLO V.

Costruzioni fondamentali

72. Servendoci del procedimento di HAUCK abbiamo riconosciuto che si possono facilmente mediante soli movimenti rigidi dei sostegni risolvere i due problemi fondamentali:

Costruire ogni altra terna di una trilinearità iperbolica fra tre rette, di cui siano dati gli elementi singolari ed una terna.

Costruire ogni altra terna di una trilinearità parabolica fra tre rette, di cui sia data la terna singolare e tre terne corrispondenti.

Più in generale, tenendo conto che (n. 9) forme proiettive a forme trilineari sono ancora trilineari, ci sarà facile costruire ogni terna di una qualsiasi trilinearità, comunque essa sia determinata, servendoci delle costruzioni della proiettività e dei campi di terne particolari che abbiamo più sopra messo in evidenza.

Trattiamo dapprima la costruzione delle corrispondenze trilineari generali. Più semplice dal punto di vista costruttivo si presenta il caso, già risolto con HAUCK per tre rette, che la trilinearità sia determinata come in *E*) al n. 55 mediante gli elementi singolari $S_i^{(j)}$ (con la loro legge di associazione) ed una terna di elementi corrispondenti, U, U', U''. Infatti, dato un elemento qualsiasi A di una delle tre forme, ad es. di Ξ, si può senz'altro determinare linearmente ogni coppia della proiettività che gli corrisponde. Due ne sono già note, essendo le coppie singolari $S_1' S_2''$; $S_2' S_1''$. Per trovarne una terza osserviamo che è determinata la proiettività corrispondente ad U', di cui si conoscono le tre coppie $S_1 S_2''$; $S_2 S_1''$; $U U''$. Quindi la relazione:

$$(S_1\, S_2\, U\, A) \barwedge (S_2''\, S_1''\, U''\, A''),$$

fornirà linearmente A'', corrispondente ad A. Poichè $A\, U'\, A''$ sono corrispondenti, risulta determinata la proiettività

$$(S_1',\ S_2',\ U', \ldots) \barwedge (S_2'',\ S_1'',\ A'', \ldots),$$

che è quella cercata, di cui ogni coppia costituisce con A una terna del campo ([76]).

73. La costruzione del campo di terne determinato come in E) al n. 55 poteva anche farsi mediante uno dei casi particolarmente semplici di trilinearità visti sopra, ad es. mediante la trilinearità concorrente di tre fasci di raggi R, R', R'', complanari, i cui centri non siano allineati ([77]). Allora, posto:

$$s_1 \equiv s_2' \equiv R R' , \qquad s_1' \equiv s_2'' \equiv R' R'' , \qquad s_1'' \equiv s_2 \equiv R'' R ,$$

ed indicati con u, u', u'' i raggi rispettivamente di R, R', R'' proiettanti un medesimo punto generico P del piano, le proiettività:

$$(9) \qquad \begin{cases} (S_1 , S_2 , U , \ldots) \barwedge (s_1 , s_2 , u , \ldots) , \\ (S_1' , S_2' , U' , \ldots) \barwedge (s_1' , s_2' , u' , \ldots) , \\ (S_1'' , S_2'' , U'' , \ldots) \barwedge (s_1'' , s_2'' , u'' , \ldots) , \end{cases}$$

trasformano Ξ in R, H in R', Z in R'' e la trilinearità generale determinata dagli elementi singolari $S_1^{(j)} S_2^{(j)}$ e dalla terna $U\ U'\ U''$ in quella concorrente determinata da $s_1^{(j)}$, $s_2^{(j)}$ e dalla terna u, u', u''.

Data una coppia qualsiasi di elementi di due forme, ad es. A ed A' di Ξ ed H, e determinati i loro corrispondenti a, a' in R ed R' mediante le relazioni:

$$(S_1\, S_2\, U\, A) \barwedge (s_1\, s_2\, u\, a) , \qquad (S_1'\, S_2'\, U'\, A') \barwedge (s_1'\, s_2'\, u'\, a') ,$$

il punto (a, a') congiunto con R'' determina il raggio a'' che li associa in una terna. Quindi la proiettività:

$$(s_1''\, s_2''\, u''\, a'') \barwedge (S_1''\, S_2''\, U''\, A'') ,$$

fornisce linearmente il corrispondente A'' di A ed A'.

([76]) Cfr. London ([12]), § 7, 1) *a*).
([77]) Cfr. London ([12]), § 7, 1) *b*).

Nel caso che Ξ, H, Z siano tre rette di S_3. SCHUBERT [78] si serve della trilinearità allineata tra tre rette complanari. Il procedimento è affatto analogo a quello descritto sopra, però è da notare che una proiettività tra due rette sghembe si può sempre pensare come una prospettività, tagliata da un fascio di piani il cui asse sia appoggiato alle congiungenti le tre coppie di punti omologhi che la determinano. Lo SCHUBERT dà quindi addirittura la costruzione delle tre prospettività analoghe alle (9), per modo che il problema appare risolto in ogni dettaglio.

74. Passiamo ora a considerare il caso che la trilinearità sia determinata mediante 5 elementi singolari e 2 terne, come al n. 55, *D*). Possiamo supporre che gli elementi singolari noti siano S_1 ed S_2; S_1' ed S_2'; S_2'', e le due terne $U U' U''$, $V V' V''$. Si osserva subito che sono determinate le proiettività $\pi_{U''}$ e $\pi_{V''}$ corrispondenti ad U'' e V'', mediante le coppie $S_1 S_2'$, $S_2 S_1'$, che sono comuni ad entrambe, $U U'$ e risp. $V V'$. Quindi, se A è un elemento non singolare di Ξ, della proiettività ad esso corrispondente conosciamo la coppia $S_1' S_2''$; inoltre le proiettività $\pi_{U''}$ e $\pi_{V''}$:

$$(S_1\, S_2\, U\, A) \barwedge (S_2'\, S_1'\, U'\, A_1') \,,$$

$$(S_1\, S_2\, V\, A) \barwedge (S_2'\, S_1'\, V'\, A_2') \,,$$

ci forniscono linearmente A_1' ed A_2', cioè altre due coppie distinte $A_1' U''$, $A_2' V''$ di π_A, che risulta determinata.

Analogamente (scambiando l'ufficio di Ξ e di H) si può determinare la proiettività $\pi_{B'}$ corrispondente ad un generico elemento B' di H.

L'elemento singolare S_1'' che ancora manca è il corrispondente di S_2' in π_A o di S_2 in $\pi_{B'}$ e si può quindi determinare linearmente, con che ci si riconduce al caso precedente. Altrimenti dobbiamo ancora determinare la proiettività $\pi_{C''}$ corrispondente ad un qualsiasi elemento C'' di Z, e ciò si può fare osservando che di essa si conoscono le due coppie $S_1 S_2'$, $S_2 S_1'$. Inoltre il corrispondente C' di C'' in π_A costituisce con A la terza coppia necessaria e sufficiente per la sua determinazione.

([78]) l. cit. ([1]), § 5.

75. Anche in questo caso la costruzione del campo di terne può effettuarsi riferendo proiettivamente Ξ, Π, Z a tre fasci di rette complanari R, R', R'', in modo che la corrispondenza trilineare data si trasformi in quella concorrente. Presi ad arbitrio in un piano i punti R, R', R'', P, e posto:

$$s_1 \equiv s_2' \equiv RR' \qquad s_2 \equiv R\,R'' \qquad s_1' \equiv s_2'' \equiv R'\,R''$$
$$R\,P \equiv u \qquad R'\,P \equiv u' \qquad R''\,P \equiv u'',$$

si leghino Ξ ed R, Π ed R' colle proiettività:

$$(S_1\,S_2\,U\ldots) \barwedge (s_1\,s_2\,u\ldots)\,, \tag{10}$$

$$(S_1'\,S_2'\,U'\ldots) \barwedge (s_1'\,s_2'\,u'\ldots)\,. \tag{10'}$$

In esse a V, V' corrisponderanno rispettivamente v e v', che si taglieranno in Q. Posto $v'' \equiv R''\,Q$, la proiettività:

$$(S_2''\,U''\,V''\ldots) \barwedge (s_2''\,u''\,v''\ldots)\,, \tag{10''}$$

assieme alle due precedenti trasforma la nostra trilinearità in una trilinearità tra R, R', R'' che ha in comune con quella concorrente i cinque elementi singolari s_1, s_2; s_1', s_2'; s_2'' e le due terne $u\;u'\;u''$, $v\;v'\;v''$, e quindi non può che coincidere con questa (n. 55, D)). Per ottenere il terzo elemento corrispondente a due altri nella trilinearità data basterà di questi determinare i raggi corrispondenti mediante le $(10^{(\omega)})$. La loro intersezione congiunta col terzo centro darà il raggio che attraverso le inverse delle $(10^{(\omega)})$ fornirà il terzo elemento cercato.

76. Consideriamo ora il caso che la trilinearità sia determinata come in C) al n. 55 e supponiamo dapprima che i quattro elementi singolari dati stiano in due sole forme, cioè siano ad es. S_1, S_2; S_1', S_2'.

Inoltre siano date le terne (79) $U\,U'\,U''$, $V\,V'\,V''$, $W\,W'\,W''$.

(79) Cfr. London (12), § 3, 2) a); Castelnuovo (9), p. 1071.

Si può subito osservare che sono determinate le proiettività:

$$\pi_{U''}: \quad (S_1\, S_2\, U \ldots) \barwedge (S'_2\, S'_1\, U' \ldots),$$
$$\pi_{V''}: \quad (S_1\, S_2\, V \ldots) \barwedge (S'_2\, S'_1\, V' \ldots),$$
$$\pi_{W''}: \quad (S_1\, S_2\, W \ldots) \barwedge (S'_2\, S'_1\, W' \ldots),$$

corrispondenti ad U'', V'', W''. Quindi dato un elemento A di Ξ [o B' di H], se A'_1, A'_2, A'_3 [oppure B_1, B_2, B_3] sono gli elementi che gli corrispondono in $\pi_{U''}$, $\pi_{V''}$, $\pi_{W''}$, è determinata la proiettività

$$\pi_A: \quad (A'_1\, A'_2\, A'_3 \ldots) \barwedge (U''\, V''\, W'' \ldots),$$

[o rispettivam. $\pi_{B'}: \quad (B_1\, B_2\, B_3 \ldots) \barwedge (U''\, V''\, W'' \ldots)$],

che gli corrisponde nella trilinearità. In particolare i corrispondenti in π_A di S'_1 ed S'_2 (o in $\pi_{B'}$ di S_1, S_2) sono gli elementi singolari $S''_2\, S''_1$ ancora incogniti, con che il problema è ricondotto a quelli precedenti. Se lo si vuol risolvere direttamente basta determinare la proiettività $\pi_{C''}$ corrispondente ad un generico elemento C'' di Z. Di essa si conoscono le due coppie $S_1\, S'_2$ ed $S_2\, S'_1$. Per trovarne una terza si può ad es. determinare il corrispondente C' di C'' in π_A. Allora, essendo $A\, C'\, C''$ una terna, $A\, C'$ è la terza coppia cercata che individua $\pi_{C''}$:

$$(S_1\, S_2\, A \ldots) \barwedge (S'_2\, S'_1\, C' \ldots).$$

77. Anche per questa costruzione potevamo servirci di una corrispondenza particolare, ad es. della concorrente ([80]) di tre fasci di raggi complanari $R\, R'\, R''$. Allora, posto: $s_1 \equiv s'_2 \equiv R\, R'$, $s_2 \equiv RR''$, $s'_1 \equiv R'\, R''$, $R\, P_1 = u$, $R'\, P_1 = u'$, dove P_1 è un punto generico del piano $(R\, R'\, R'')$, riferiamo proiettivamente Ξ ed H ad R ed R' mediante le omografie:

$$(11) \qquad (S_1\, S_2\, U \ldots) \barwedge (s_1\, s_2\, u \ldots),$$
$$(11') \qquad (S'_1\, S'_2\, U' \ldots) \barwedge (s'_1\, s'_2\, u' \ldots).$$

([80]) Cfr. London ([12]), § 3, 2) *b*). Schubert (l. cit. ([1]), § 1) servendosi della corrispondenza allineata risolve completamente questo problema quando Ξ, H, Z sono tre rette sgembe.

I raggi corrispondenti a V e V' si taglieranno in P_2; analogamente quelli omologhi di W e W' in P_3. Allora posto:

$$u'' \equiv P_1 R'' \qquad v'' \equiv P_2 R'' \qquad w'' \equiv P_3 R'' ,$$

la proiettività tra Z ed R'':

$$(11'') \qquad (U'' \; V'' \; W'' \ldots) \barwedge (u'' \; v'' \; w'' \ldots) ,$$

assieme alle (11), (11') trasforma la trilinearità data in una trilinearità tra R, R', R'' che, avendo in comune con quella concorrente gli elementi singolari $s_1 \, s_2$, $s'_1 \, s'_2$ e le tre terne $u \, u' \, u''$, $v \, v' \, v''$, $w \, w' \, w''$, a norma del n. 55, C) coincide con essa.

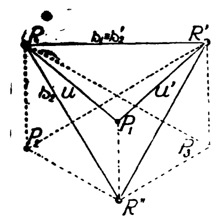


Fig. 16

Perciò gli elementi singolari mancanti saranno i trasformati di $R'' R$ ed $R'' R'$ mediante la inversa della (11'').

Dati due elementi, ad es. A ed A' di Ξ ed H, quello A'' di Z che con essi forma una terna si ottiene come corrispondente nella inversa della (11'') del raggio congiungente R'' con la intersezione degli omologhi di A, A' in (11), (11').

78. Andiamo ora a considerare il caso che le due coppie singolari date, non aventi elementi in comune, siano costituite di elementi non tutti appartenenti a due sole forme [81]. Si può supporre che siano S_1, S_2, $S'_2 \, S''_1$. Implicitamente si viene a dare anche una terza coppia singolare, $S'_2 \, S''_1$, avente con le due prime un elemento in comune. Indichiamo sempre con $U \, U' \, U''$, $V \, V' \, V''$, $W \, W' \, W''$ le tre terne ulteriormente necessarie alla determinazione della corrispondenza (55, C)).

Allora, se R, R', P_1 e P_2 sono 4 punti generici di un piano α, posto: $s_1 \equiv s'_2 \equiv R \, R'$, $u \equiv R \, P_1$, $v \equiv R \, P_2$, $u' \equiv R' \, P_1$, $v' \equiv R' \, P_2$, leghiamo Ξ ed H ai fasci R ed R' mediante le

([81]) Castelnuovo (l. cit. ([9]), pag. 1071) si serve per questa costruzione di quella delle serie unicursali di terne, che introdurremo più avanti.

proiettività :

$$(12) \qquad (S_1\, U\, V \ldots) \,\overline{\wedge}\, (s_1\, u\, v \ldots)\,,$$

$$(12') \qquad (S_2'\, U'\, V' \ldots) \,\overline{\wedge}\, (s_2'\, u'\, v' \ldots)\,.$$

I raggi w e w' corrispondenti in esse a W e W' si taglieranno in P_3, e sarà s_2 il corrispondente di S_1. Avendo posto $s_1 \equiv s_2'$, il centro del terzo fascio R'' dovrà trovarsi su s_2, giacchè nella corrispondenza allineata che si cerca deve anche essere:

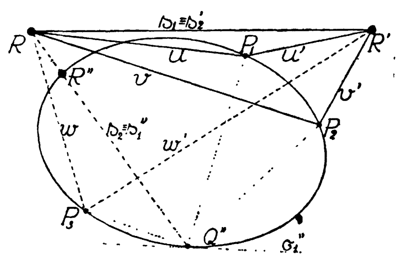


Fig. 17

$$s_2 \equiv s_1'' \equiv R\,R''.$$

Però la posizione di R'' su s_2 non è arbitraria. Infatti se lo si colloca in un punto generico Q'' di s_2, fatto:

$$u_1'' \equiv P_1\, Q''\,, \qquad v_1'' \equiv P_2\, Q'' \qquad w_1'' \equiv P_3\, Q''\,,$$

nella proiettività da porsi tra Z e Q'' dovremo avere:

$$(12_1'') \qquad (U''\, V''\, W'' \ldots) \,\overline{\wedge}\, (u_1''\, v_1''\, w_1'' \ldots)\,,$$

e quindi questa è determinata. Ma in generale nella $(12_1'')$ ad S_1'' corrisponde un raggio σ_1'' distinto da s_2.

Perciò R'' risulta determinato, come vedremo, dalla condizione che s_1'' coincida con s_2. Allora, posto:

$$u'' \equiv R''\, P_1\,, \qquad v'' \equiv R''\, P_2\,, \qquad w'' \equiv R''\, P_3\,,$$

la proiettività tra Z ed R'':

$$(12) \qquad (U''\, V''\, W'' \ldots) \,\overline{\wedge}\, (u''\, v''\, w'' \ldots)\,,$$

assieme alle (12), (12') trasforma la nostra trilinearità in una corrispondenza trilineare tra R, R', R'' che, avendo in comune con quella concorrente gli elementi singolari s_1, s_2, s_2'; s_1'' e le tre terne $u\,u'\,u''$, $v\,v'\,v''$, $w\,w'\,w''$, a norma del n. 55, C) coincide con essa.

Gli elementi singolari che ancora mancano S_1' ed S_2'' sono i corrispondenti nelle inverse delle (12′), (12″) del raggio $R'\,R''$, con che si è ricondotti ai problemi già risolti. Del resto, come nei casi precedenti mediante le (12), (12′), (12″) e le loro inverse si può costruire ogni altra terna della trilinearità data.

È da notare che R'' si può costruire linearmente a partire da Q'', che è un punto generico di s_2. Infatti mediante la ($12_1''$) e la (12″) tra Q'' ed R'' nasce una proiettività, prodotto da l'inversa della prima per la seconda, nella quale sono associati i raggi corrispondenti agli stessi elementi di Z. La conica generata dalla intersezione dei raggi omologhi passa evidentemente per P_1, P_2, P_3, Q'' ed R''. Inoltre, poichè ad S_1'' corrispondono in Q'' σ_1'' ed in R'' s_2, essa è tangente a σ_1'' in Q''. Quindi a determinarla bastano P_1, P_2, P_3, Q'' e σ_1''.

L'ulteriore suo punto di intersezione con s_2, distinto da Q'' (se σ_1'' è distinto da s_2), reale come Q'' e costruibile linearmente ([82]), è il punto R'' cercato.

79. Supponiamo ora che come in B) al n. 55 la trilinearità sia determinata mediante due coppie singolari aventi un elemento in comune e 4 terne di elementi corrispondenti $U\,U'\,U''$, $V\,V'\,V''$, $W\,W'\,W''$, $T\,T'\,T''$. Possiamo sempre supporre (scambiando eventualmente i nomi delle forme e gli indici degli elementi singolari) che gli elementi singolari dati siano S_1, S_2', S_2''. Allora, se R, R', P_1 e P_2 sono 4 punti generici di un piano, posto:

$$s_1 \equiv s_2' \equiv R\,R', \quad u \equiv R\,P_1, \quad v \equiv R\,P_2, \quad u' \equiv R'\,P_1, \quad v' = R'\,P_2,$$

leghiamo Ξ ed R ed H e R' mediante le proiettività:

$$(13) \qquad (S_1\,U\,V\ldots) \,\overline{\wedge}\, (s_1\,u\,v\ldots),$$

$$(13') \qquad (S_2'\,U'\,V'\ldots) \,\overline{\wedge}\, (s_2'\,u'\,v'\ldots).$$

([82]) Cfr. ad es. Comessatti, *Elementi della teoria generale delle coniche* [(litografie), Padova, 1932], pag. 58.

I raggi w e w' corrispondenti a W e a W' si taglieranno in P_3 ed analogamente quelli t e t' corrispondenti a T e a T' in P_4. Si tratta ora di determinare un punto R'' del piano tale che posto:

$$R''P_1 = u'', \quad R''P_2 = v'', \quad R''P_3 = w'', \quad R''P_4 = t'',$$

il raggio corrispondente ad U'' nella proiettività:

$$(13'') \qquad (V''\, W''\, T'' \ldots) \barwedge (v''\, w''\, t'' \ldots),$$

sia proprio u'', e quello corrispondente ad S_2'' passi per R'. Trovato un tale R'', mediante le (13), (13'), (13''), la trilinearità data si trasforma nella trilinearità concorrente tra R, R', R'', determinata mediante gli elementi singolari s_1, s_2', s_2'' e le quattro terne u, u', u''; v, v', v''; w, w', w''; $t, t'. t''$. Si costruiscono quindi immediatamente gli elementi singolari s_2, s_1', s_1'', ancora mancanti, corrispondenti di RR'' ed $R''R'$ sulle inverse della (13), (13'), (13''). Con ciò si è ricondotti ai problemi precedenti, e come allora, oppure direttamente mediante le (13), (13'), (13''), si può costruire una terna qualsiasi della trilinearità.

80. Per determinare R'' si osservi che se come tale si assume un punto generico Q'' del piano, dette v_1'', w_1'', t_1'' le congiungenti Q'' rispett. con P_2, P_3, P_4, in generale i corrispondenti σ_2'' ed u_1'' di S_2'' ed U'' nella proiettività tra Z e Q'':

$$(13_1'') \qquad (V''W''T'' \ldots) \barwedge (v_1''\, w_1''\, t_1'' \ldots),$$

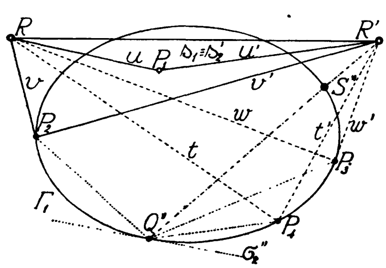


Fig. 18

non passano rispettivamente per R' e P_1. A partire da Q'', sulla $Q''R'$ si può collo stesso procedimento del n. 78 determinare un punto S'' tale che posto:

$$S''P_2 \equiv v_2'', \quad S''P_3 \equiv w_2'', \quad S''P_4 \equiv t_2'',$$

il corrispondente di S_2'' nella proiettività tra Z ed S'':

$$(13_2'') \qquad (V'' \, W'' \, T'' \ldots) \,\overline{\wedge}\, (v_2'' \, w_2'' \, t_2'' \ldots),$$

passi per R', cioè coincida con $S'' R'$.

S'' è l'intersezione distinta da Q'' (se lo è σ_2'' dalla $Q'' R'$) della $Q'' R'$ con la conica Γ_1 per P_2, P_3, P_4, Q'' e tangente in Q'' a σ_2''. Γ_1 è il luogo delle intersezioni dei raggi omologhi nella proiettività prodotto della inversa della $(13_1'')$ per la $(13_2'')$ che si ottiene tra Q'' ed S'' facendo corrispondere due raggi associati dalle $(13_1'')$ e $(13_2'')$ allo stesso elemento di Z.

Il corrispondente u_2'' di U'' nella $(13_2'')$ in generale non passerà ancora per P_1. Si può però osservare che, giunti ad un R'' tale da soddisfare anche a questa condizione, associando due elementi di R'' ed S'' che corrispondano nelle $(13'')$, $(13_2'')$ allo stesso elemento di Z si viene a porre tra R'' ed S'' una corrispondenza proiettiva, che genera con le intersezioni dei raggi omologhi una conica Γ_2 passante per R', P_2, P_3, P_4, S'', R''. Inoltre il raggio $u'' \equiv R'' P_1$ interseca u_2'' in un punto di Γ_2.

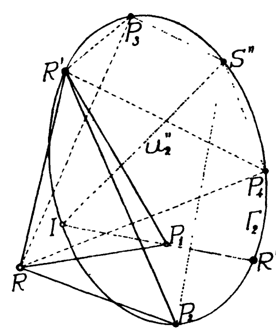


Fig. 19

Per costruire R'' bisognerà quindi dapprima determinare l'ulteriore punto I di intersezione di u_2'' (corrispondente di U'' nella $(13_2'')$) con la conica determinata dai 5 punti $R' P_2 P_3 P_4 S''$. Congiunto I con P_1, l'intersezione della $P_1 I$ con Γ_2 diversa da I sarà il punto R'' cercato.

Naturalmente anche in questo caso la costruzione di S'', I, R'' risulta lineare ([83]); R'' è reale come Q'', S'' ed I.

81. In modo analogo la costruzione del campo di terne può ricondursi a quella della trilinearità concorrente, quando la corrispondenza sia determinata come in A) al n. 55 mediante una

([83]) Cfr. Comessatti ([82]), p. 56.

coppia singolare, che possiamo supporre sia $S_1 S_2'$, ed altre 5 terne $U\,U'\,U''$, $V\,V'\,V''$, $W\,W'\,W''$, $T\,T'\,T''$ [84].

Presi al solito arbitrariamente in un piano i punti R, R', P_1, P_2 e posto:

$$s_1 \equiv s_2' \equiv R\,R' \quad u \equiv R\,P_1 \quad v \equiv R\,P_2 \quad u' \equiv R'\,P_1 \quad v' \equiv R'\,P_2\,,$$

si leghino Ξ ed R, H ed R' mediante le proiettività:

$$(14) \qquad (S_1\,U\,V\ldots) \;\overline{\wedge}\; (s_1\,u\,v\ldots)\,,$$

$$(14') \qquad (S_2'\,U'\,V'\ldots) \;\overline{\wedge}\; (s_2'\,u'\,v'\ldots)\,.$$

I raggi in esse corrispondenti a W e W', Z e Z', T e T', siano w e w', z e z', t e t', e si taglino in P_3, P_4, P_5.

Si tratta di determinare un ulteriore punto R'' del piano, tale che posto ad es. $R''\,P_3 \equiv w''$, $R''\,P_4 \equiv z''$, $R''\,P_5 \equiv t''$, e legati Z ed R'' colla proiettività:

$$(14'') \qquad (W''\,Z''\,T''\ldots) \;\overline{\wedge}\; (w''\,z''\,t''\ldots)\,,$$

in essa i corrispondenti u'' e v'' di U'' e V'' passino rispettivamente per P_1 e P_2. Allora le (14), (14'), (14'') trasformano la trilinearità data tra Ξ, H, Z in quella concorrente tra R, R', R'', determinata come la prima mediante la coppia singolare $s_1\,s_2'$ e le cinque terne $u\,u'\,u''$, $v\,v'\,v''$, $w\,w'\,w''$, $z\,z'\,z''$, $t\,t'\,t''$. Si possono quindi determinare subito gli elementi singolari incogniti, corrispondenti di $R\,R''$ e di $R'\,R''$ nelle inverse delle (14), (14'), (14''), ed ogni terna della omografia trilineare data.

[84] Cfr. LONDON [12], § 3, 3), che per determinare R'' rimanda a STURM, *Il problema della proiettività* (Math. Ann. Bd. II), p. 535. CASTELNUOVO, l. cit. [9], p. 1073, dà la costruzione della trilinearità così determinata quando le tre forme sono sovrapposte ad una cubica gobba di S_3. LE PAIGE, *Note sur l'homographie du III^{me} ordre* [6], riconduce questo problema all'altro: costruire una superficie del 2° ordine conoscendone 7 punti ed una generatrice passante per uno di essi.

82. Per costruire R'' partiamo come prima da un punto generico Q'', le cui congiungenti con P_3, P_4, P_5 chiameremo rispettivamente w_1'', z_1'', t_1''. Generalmente i corrispondenti u_1'' e v_1'' di U'' e V'' nella proiettività tra Z e Q''

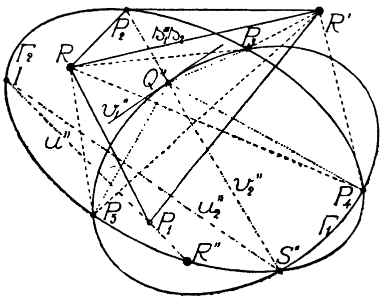


Fig. 20

$$(14_1'') \qquad (W''\, Z''\, T''...) \,\overline{\wedge}\, (w_1''\, z_1''\, t_1'...),$$

non passeranno per P_1 e P_2. Sulla congiungente Q'' con P_2 e nella ulteriore intersezione con la conica Γ_1 passante per $Q''\ P_3\ P_4\ P_5$ e tangente in Q'' a v_1'' si trova il secondo centro ausiliario S'', tale che riferendo proiettivamente i raggi w_2'', z_2'', t_2'' (che da S'' proiettano P_3, P_4, P_5) agli elementi omonimi di Z mediante la:

$$(14_2'') \qquad (W''\, Z''\, T''\dots) \,\overline{\wedge}\, (w_2''\, z_2''\, t_2''\dots)\,,$$

il corrispondente v_2'' di V'' nella $(14_2'')$ passi per P_2.

La conica Γ_1 è generata dalle intersezioni dei raggi omologhi nella proiettività che si ottiene tra Q'' ed S'' associando le rette corrispondenti agli stessi elementi di Z nella $(14_1'')$, $(14_2'')$.

Il corrispondente u_2'' di U nella $(14_2'')$ non passa generalmente per P_1. Però è da notare che se si associano i raggi che in S'' e sull'incognito R'' corrispondono mediante le $(14'')$, $(14_2'')$ allo stesso elemento di Z, la proiettività così determinata tra S'' ed R'' genera la conica Γ_2, passante per P_2, P_3, P_4, P_5, S''. In essa giacciono anche R'' e l'intersezione I di u_2'' con la congiungente R'' con P_1. Quindi R'' si può determinare (linearmente al pari di S'') come la ulteriore intersezione della retta IP_1 con Γ_2, dopo di aver determinato I come intersezione di Γ_2 con u_2''.

83. Supponiamo ora che la trilinearità sia determinata come al n. 53 mediante due elementi, le proiettività corrispondenti ed una terna [85]. Possiamo pensare che si tratti degli elementi A e B di Ξ, di cui indicheremo con π_A e π_B le proiettività corrispondenti, e della terna $C\,C'\,C''$.

Osserviamo subito che è determinata la proiettività $\pi_{C'}$ corrispondente a C'. Infatti, se C''_A e C''_B sono gli elementi corrispondenti a C' in π_A e π_B, ad essa appartengono le tre coppie $A\,C''_A$, $B\,C''_B$, $C\,C''$. Dopo di che, se D'' è un elemento generico di Z, cui corrispondono $D_{C'}$ in $\pi_{C'}$, D'_A e D'_B in π_A e π_B, la proiettività ad esso corrispondente $\pi_{D''}$ è determinata dalle tre coppie $A\,D'_A$, $B\,D'_B$, $D_{C'}\,C'$. È ora possibile, dato un elemento generico E' di H, determinarne la proiettività corrispondente. Infatti, se E''_A, E''_B, $E_{D''}$ sono i suoi omologhi rispett. in π_A, π_B, $\pi_{D''}$, a $\pi_{E'}$ appartengono le tre coppie $A E''_A$, $B E''_B$, $E_{D''}$, D'', che la determinano.

Infine dai suoi corrispondenti $F''_{C'}$, $F''_{E'}$, $F'_{D''}$ in $\pi_{C'}$, $\pi_{E'}$, $\pi_{D''}$, e quindi dalle tre coppie $C'\,F''_{C'}$, $E'\,F''_{E'}$, $F'_{D''}\,D''$, risulta determinata la proiettività π_F corrispondente ad un generico elemento F di Ξ.

Volendo determinare gli elementi singolari, si possono determinare dapprima con una costruzione quadratica quelli di due forme, ad es. di H e Z, come coppie comuni alle due proiettività, π_A, π_B, e poi mediante un'altra proiettività, ad es. $\pi_{C'}$, linearmente gli altri due.

84. Dal procedimento seguito al n. 52 per la determinazione della corrispondenza risulta che i coefficienti della equazione di una trilinearità di cui sian date solo *sei* terne dipendono ancora *linearmente* da un medesimo parametro essenziale (due omogenei):

$$(15)\qquad f(\lambda\,;\,x,\,y,\,z) \equiv \lambda_1 f_1(x,\,y,\,z) + \lambda_2 f_2(x,\,y,\,z) = 0\,.$$

Variando il parametro si ottengono tutte le ∞^1 trilinearità contenenti le sei terne date. Il loro insieme costituisce perciò una totalità lineare semplicemente infinita, un *fascio di trilinearità.*

[85] Cfr. LONDON [12], § 3, 4).

È evidente che esso può essere determinato, oltre che da sei terne, anche mediante due sue trilinearità distinte qualsiasi, ad es. quelle F_1 ed F_2, di equazioni:

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0,$$

che si ottengono rispettivamente per $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$ dalla (15).

Tutte le ∞^1 terne comuni a queste due (ed esse sole) sono comuni anche ad ogni altra trilinearità del fascio. Se π_1 e la proiettività corrispondente ad un elemento X di Ξ in F_1, e π_2 quella corrispondente ad X in F_2, la «*serie*» delle terne comuni ad F_1 ed F_2 è tale che ad essa appartengono *due* sole terne contenenti X; esse si ottengono associandogli le due coppie comuni a π_1 ed π_2.

Diremo perciò una tale serie *bicursale* ([86]).

Supponiamo che il fascio, e quindi la serie bicursale siano determinati da 6 terne $X_i\, Y_i\, Z_i$ $(i = 1, 2, \ldots k, \ldots 6)$.

Se determiniamo un campo di terne F_k del fascio mediante una settima terna del tipo $X_k\, Y_k\, Z$ (dove Z è diverso da Z_k), per esso la coppia $X_k\, Y_k$ è singolare (n. 10), e quindi per quanto precede (n. 81) lo si può costruire linearmente mediante quella coppia e le altre cinque terne $X_i\, Y_i\, Z_i$ (con $i \neq k$).

La costruzione della serie bicursale si riconduce quindi a quella quadratica e nota delle due coppie comuni alle due proiettività corrispondenti in due campi di terne distinti F_h ed F_k del fascio ad un medesimo elemento variabile in una delle tre forme ([87]). Se una di quelle due coppie è nota, cioè se è già nota una delle due terne della serie bicursale contenenti il dato elemento, la costruzione dell'altra diviene *lineare*.

([86]) Cfr. London ([12]), § 1, 2); § 3, 5).

([87]) Dette ancora π_1 e π_2 quelle proiettività, si possono ad es. determinare le loro coppie comuni mediante gli elementi uniti della proiettività $\pi_1\, \pi_2^{-1}$, che si costruiscono con la riga e col compasso. Cfr. Comessatti ([17]), II, p. 134, n. 130.

85. Siamo ora in grado di risolvere linearmente il problema [88]: Costruire ogni altra terna di una trilinearità determinata da 7 terne indipendenti (cioè non appartenenti alla stessa serie bicursale) $X_i\, Y_i\, Z_i$ $(i = 1, 2, \dots 7)$.

Infatti per quanto precede possiamo costruire linearmente le seconde coppie $\overline{Y}_1 \overline{Z}_1$ e $\overline{Y}_2 \overline{Z}_2$ diverse da $Y_1 Z_1$ e $Y_2 Z_2$, che associano X_1 e X_2 ad una terna della serie bicursale $\overline{R}_t^2$ determinata dalle sei terne $X_i\, Y_i\, Z_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Analogamente possiamo costruire linearmente le seconde coppie $\overline{\overline{Y}}_1$, $\overline{\overline{Z}}_1$ e $\overline{\overline{Y}}_2$, $\overline{\overline{Z}}_2$ diverse da $Y_1 Z_1$ ed $Y_2 Z_2$ che associano X_1 ed X_2 ad una terna della serie bicursale $\overline{\overline{R}}_t^2$ determinata dalle sei terne $X_i\, Y_i\, Z_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

Poichè tanto $\overline{R}_t^2$ che $\overline{\overline{R}}_t^2$ appartengono al campo di terne dato, vi appartengono anche le 6 terne:

$$X_1 Y_1 Z_1, \quad X_1 \overline{Y}_1 \overline{Z}_1, \quad X_1 \overline{\overline{Y}}_1 \overline{\overline{Z}}_1; \quad X_2 Y_2 Z_2, \quad X_2 \overline{Y}_2 \overline{Z}_2, \quad X_2 \overline{\overline{Y}}_2 \overline{\overline{Z}}_2,$$

che abbiamo costruito linearmente.

Ma esse determinano le proiettività:

$$(16) \qquad \begin{cases} (Y_1\, \overline{Y}_1\, \overline{\overline{Y}}_1 \dots) \barwedge (Z_1\, \overline{Z}_1\, \overline{\overline{Z}}_1 \dots), \\ (Y_2\, \overline{Y}_2\, \overline{\overline{Y}}_2 \dots) \barwedge (Z_2\, \overline{Z}_2\, \overline{\overline{Z}}_2 \dots), \end{cases}$$

che nella data trilinearità corrispondono ad X_1 ed X_2.

Quindi, mediante una ulteriore terna $X_3\, Y_3\, Z_3$ delle 7 date, la costruzione della trilinearità si riconduce a quella già nota, date le due proiettività corrispondenti a due elementi della stessa forma ed una terna (n. 83).

86. Ci rimane il problema della costruzione della trilinearità monosingolare dati gli elementi singolari e tre terne, che abbiamo già risolto con Hauck nel caso di tre rette (n. 70). Ad esso ci si può sempre ridurre mediante opportune trasforma-

[88] Cfr. London [12], § 3, 6). Le Paige risolve questo problema riconducendolo alla costruzione della superficie del II ordine (*Note sur l'homographie*..... [6], pag. 90 e seg.).

zioni proiettive, ma qui vogliamo far vedere che anche questo problema è suscettibille di una semplice risoluzione lineare ([89]) mediante la trilinearità concorrente. Infatti, siano S, S', S'' gli elementi della terna singolare, $A\,A'\,A''$, $B\,B'\,B''$, $C\,C'\,C''$ le tre terne date, ed R, R', P_1, P_2 quattro punti generici di un piano α. Posto: $R\,R' \equiv s \equiv s'$ $R\,P_1 \equiv a$ $R\,P_2 \equiv b$ $R'\,P_1 \equiv a'$, $R'\,P_2 \equiv b'$, leghiamo Ξ ed R, H ed R' mediante le proiettività:

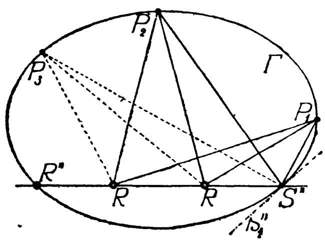


Fig. 21

(17) $\quad (S\,A\,B\ldots) \overline{\wedge} (s\,a\,b\ldots)$,

(17′) $\quad (S'\,A'\,B'\ldots) \overline{\wedge} (s'\,a'\,b'\ldots)$.

I raggi c e c' corrispondenti in esse a C e C' si taglino in P_3. Preso un punto generico Q'' della $R\,R'$ e riferito proiettivamente il fascio Q'' a Z, mediante la:

$$(17_1'') \qquad (A''\,B''\,C''\ldots) \overline{\wedge} (a_1''\,b_1''\,c_1''\ldots),$$

dove $a_1'' \equiv Q''\,P_1$ $b_1'' \equiv Q''\,P_2$ $c_1'' \equiv Q''\,P_3$, in generale il raggio s_1'' corrispondente ad S'' nella $(17_1'')$ non coinciderà con $R\,R'$. Indichiamo con R'' un punto della $R\,R'$ in cui ciò accada. Allora, posto $R''\,P_1 \equiv a''$ $R''\,P_2 \equiv b''$ $R''\,P_3 \equiv c''$, la proiettività tra Z ed R'':

$$(17'') \qquad (A''\,B''\,C''\ldots) \overline{\wedge} (a''\,b''\,c''\ldots)$$

assieme alle (17), (17′) trasforma il campo di terne monosingolare dato in quello parabolico e concorrente determinato tra i tre fasci di raggi $R\,R'\,R''$ dalla terna singolare $s\,s'\,s''$ e dalle tre terne $a\,a'\,a''$, $b\,b'\,b''$, $c\,c'\,c''$. Mediante le (17) (17′) (17″) e le loro inverse si può quindi costruire ogni terna della trilinearità monosingolare data.

([89]) Cfr. London ([12]), §, 3, 7).

R'' si costruisce linearmente a partire da Q'', una volta che si sia determinato il raggio s_1'' corrispondente nella ($17_1''$) ad S''. Infatti tra Q'' ed R'' associando gli elementi corrispondenti nella ($17_1''$), ($17''$) agli stessi elementi di $\dot{Z}$ nasce una proiettività, che genera una conica Γ passante (oltre che per R'') per P_1, P_2, P_3, Q'' e tangente ad s_1'' in Q'', dovendo ad s_1'' corrispondere $R''\,Q''$. Si può quindi costruire linearmente R'' come ulteriore intersezione di Γ con $R\,R'$, distinta da Q'', e come questo reale.

Capitolo VI.

Rappresentazione del campo di terne in un piano

87. Per quanto precede siamo in grado di costruire un campo di terne comunque esso sia determinato ed in particolare lo sappiamo sempre trasformare proiettivamente in una trilinearità concorrente tra tre fasci di raggi complanari. Nasce così tra le terne del campo ed i punti del piano una corrispondenza biunivoca che mette in luce la natura *razionale* della varietà costituita dall'insieme delle terne di una trilinearità. Le uniche eccezioni alla biunivocità della corrispondenza cadono, nel caso della trilinearità generale, nel centro di ciascun fascio ([90]), a cui

([90]) Se, come preciseremo nei numeri successivi, il piano si pensa rigato, e la trilinearità come luogo di quella rete di serie unicursali che ha per immagine la rete delle rette (includendo fra esse oltre le serie « proprie » anche le « improprie », cioè quelle rappresentate dai tre fasci $R\,R'\,R''$, per cui due almeno delle π_{ik} sono degeneri), si vede facilmente che la biunivocità della corrispondenza manca nei lati del trilatero $R\,R'\,R''$.

Le proprietà della trilinearità pensata come luogo di terne, di serie unicursali e di serie algebriche (n. 96) si traducono nella proprietà del piano α, qualora lo si pensi come luogo di punti, di rette, di curve algebriche e si tenga conto del carattere proiettivo della rappresentazione, per cui se una terna ed una serie si appartengono lo stesso accade del punto e della curva corrispondenti.

Così il principio di dualità del piano sarà l'immagine di un *primo* corrispondono tutte le ∞^1 terne contenenti la coppia neutra dei raggi che lo proiettano dagli altri due.

Volendo occuparsi di quelle terne eccezionali conviene scambiare, com'è lecito, il nome degli elementi singolari di ciascun fascio. Allora esse sono rappresentate biunivocamente nei lati del trilatero $R R' R''$, mentre la rappresentazione non è più biunivoca per le terne contenenti le altre tre coppie singolari (cfr. n. 91-92).

Consideriamo una corrispondenza proiettiva tra Ξ, H, Z. Cioè siano Ξ, H e Z singolarmente proiettivi ad una stessa forma U, per modo che tra Ξ ed H, H e Z, Z e Ξ associando gli elementi omologhi ad uno stesso elemento di U intercedano le proiettività π_{12}, π_{23}, π_{13}, legate fra loro dalla relazione:

$$\pi_{23}\, \pi_{12} = \pi_{13}\,.$$

Supponiamo inoltre che *nessuna delle* π_{ik} *sia degenere.*

Si vengono così a generare ∞^1 terne di elementi corrispondenti, tali che è unica la terna contenente un dato elemento di una delle tre forme, in quanto che è unico su ognuna delle altre due l'elemento corrispondente al primo nella proiettività non degenere relativa. Diremo tale insieme una *serie unicursale di terne propria* ([91]).

principio di dualità nella trilinearità, per cui ad ogni proprietà *di appartenenza* relativa alle terne ed alle serie unicursali di una rete (per fissare le idee quella I rappresentata dalla rete delle rette) farà riscontro la proprietà omonima relativa rispett. alla serie della stessa rete ed alle terne.

Ma in conseguenza del fatto che si possono ad arbitrio cambiare gli indici degli elementi fondamentali e che tale scambio muta proiettivamente fra loro le due reti di serie unicursali (n. 91-92), si ha nella trilinearità un *secondo* principio di dualità, che ad *ogni* proprietà relativa alle serie della rete I e della rete II fa corrispondere una proprietà analoga rispettivamente delle serie della rete II e della rete I.

Da questi due principi di dualità ne discende un *terzo*, che ad ogni proprietà *d'appartenenza* relativa alla serie della rete II ed alle terne fa corrispondere la proprietà omonima delle terne e rispettivamente della serie della rete II.

([91]) Cfr. CASTELNUOVO, l. cit. ([9]), pag. 1046 e segg.; LONDON ([12]), § 1, 2; § 2.

88. Sia data tra Ξ, H, Z una trilinearità generale, le cui terne mediante opportune proiettività tra Ξ, H, Z e tre fasci di raggi complanari R, R', R'' siano poste in corrispondenza biunivoca con i punti del piano $\alpha \equiv (R, R', R'')$. Le proiettività π_{12}, π_{23}, π_{13} del numero precedente si mutano allora in tre proiettività π'_{12}, π'_{23}, π'_{13} tra R, R' ed R'', non degeneri e tali che sia $\pi'_{23}\,\pi'_{12} = \pi'_{13}$.

Supponiamo dapprima che π'_{12} *e* π'_{23} *non siano prospettività.* Esse generano due coniche Γ_{12} e Γ_{13}, non degeneri, passanti per R ed R', R' ed R'', le quali (se non coincidono) hanno altri tre punti di intersezione, distinti o infinitamente vicini, P_1, P_2, P_3. π'_{13} è determinata dalle precedenti, come la conica che essa genera, vincolata a passare per R, R'', P_1, P_2, P_3 (fig. 22). In particolare questa sarà riducibile e π'_{13} una prospettività quando R, R'' ed uno dei P_i siano allineati.

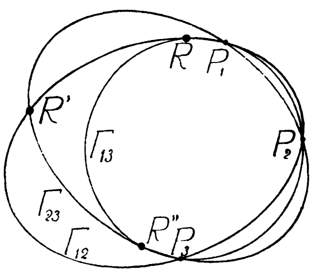


Fig. 22

In ogni caso però, quando Γ_{12} e Γ_{23} sono distinte, Γ_{12}, Γ_{23} e Γ_{13} hanno in comune i soli tre punti P_1, P_2, P_3, a cui corrispondono tre terne che appartengono contemporaneamente alla trilinearità ed alla serie unicursale.

Se invece Γ_{12} coincide con Γ_{23}, con esse coincide necessariamente anche Γ_{13}, e *tutte* le terne della serie unicursale, essendo rappresentate dalle terne di raggi concorrenti nei punti di $\Gamma_{12} \equiv \Gamma_{23} \equiv \Gamma_{13}$, appartengono al campo. Ragionando per continuità si riconosce che le terne della serie unicursale rappresentate da R, R', R'' contengono come elemento di R o rispett. R', R'' il raggio ivi tangente a $\Gamma_{12} \equiv \Gamma_{23} \equiv \Gamma_{13}$.

Supponiamo quindi (essendo il caso che una delle π'_{ik} sia una prospettività stato già implicitamente considerato) che siano prospettività due delle π'_{ik}, ad es. π'_{12} e π'_{23}. A questo caso ci si può sempre ridurre scambiando i nomi dei fasci. Allora Γ_{12} e Γ_{23} si spezzano nelle due rette RR' ed $R'R''$ ed in due ulteriori rette, (non contenenti rispettivamente R ed R', R' ed R''), che dapprima supporremo distinte, g_{12}, g_{23} (fig. 23).

Γ_{13} è vincolata a passare per R, R'', per il punto di intersezione P_2 di g_{12} e g_{23}, per $P_1 \equiv (g_{23}, RR')$, $P_3 \equiv (g_{12}, R'R'')$, e di solito non è degenere. Lo diviene (e la π'_{13} è allora una prospettività) quando R, R'' e P_2 sono allineati. $P_1 P_3$ è allora l'asse di prospettività di π'_{13}. In ogni caso Γ_{12}, Γ_{23}, Γ_{13} hanno in comune solamente i tre punti P_1, P_2, P_3, che rappresentano le sole tre terne della serie unicursale che appartengano anche alla trilinearità. Se invece g_{12} e g_{23} coincidono in una retta g, la quale stante le ipotesi non può contenere nè R, nè R', nè R'', allora (P_1, P_2, P_3 sono allineati e) anche Γ_{13} si spezza nella g e nella RR''. I punti di g rappresentano *tutte* le terne della serie unicursale, che è perciò completamente contenuta nella trilinearità data.

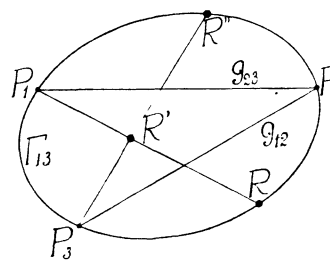


Fig. 23

89. *Dunque in generale una serie unicursale ed una trilinearità duplosingolare hanno tre terne in comune, a meno che tutte le terne della serie non siano contenute nel campo.*

Questo risultato si ottiene anche immediatamente per via analitica ([92]) scegliendo gli elementi fondamentali di Ξ, H, Z in modo che la serie unicursale, cioè la proiettività, abbia per equazioni:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{18}$$

Sostituendo nella equazione della trilinearità $f(x, y, z) = 0$ al posto degli ultimi due rapporti il primo si ottiene infatti una equazione di 3° grado in $\dfrac{x_1}{x_2}$:

$$f(x, x, x) = 0\,,$$

([92]) Cfr. ad es. London ([12]), § 2, 1).

le cui radici danno le coordinate degli elementi delle tre terne cercate.

In particolare, se le tre forme sono sovrapposte e ci si riferisce ad uno stesso sistema di coordinate, (la proiettività (18) coincide con l'identità e) si ha che *in una trilinearità tra forme sovrapposte vi sono tre elementi « uniti »*, in cui coincidono i tre elementi di una terna. Delle trilinearità tra forme sovrapposte ci occuperemo particolarmente in seguito.

Dalla rappresentazione nel piano α si ricava inoltre che:

In un campo di terne duplosingolare sono contenuti due sistemi lineari ∞^2 di serie unicursali di terne, che possono mettersi in corrispondenza biunivoca con la rete delle coniche del piano per tre punti fissi (non allineati) *e con la rete delle rette* (esclusi, se come abbiamo fatto ci si limita a considerare le serie «*proprie*» ottenute mediante proiettività non degeneri, i tre fasci R, R', R'' di rette o risp. coniche degeneri).

La rappresentazione è tale che *ai punti di una conica o di una retta corrispondono biunivocamente le terne della serie relativa.*

Due terne della trilinearità determinano in generale una serie propria di un sistema ed una serie dell' altro contenute nel campo ([93]).

([93]) A meno che:

a) una delle terne non contenga una coppia neutra. Cambiando eventualmente in ciascun fascio i nomi degli elementi singolari, si può sempre fare in modo che quella terna sia rappresentata da un punto del trilatero $R\,R'\,R''$ distinto dai vertici. Si riconosce allora che la conica si spezza. Una delle sue componenti coincide con un lato l di $R\,R'\,R''$, l' altra passa per il punto rappresentativo della seconda terna e per il vertice opposto ad l. Perciò due delle π_{ik} degenerano, e la serie di quel sistema non è propria. Se non si cade nel caso *b*) rimane invece determinata e propria la serie dell' altro sistema.

b) le due terne abbiano un elemento in comune, giacchè allora i punti A e B che le rappresentano sono allineati con il centro di uno dei tre fasci R, R', R''. Quindi la retta $A\,B$ fa parte dell' immagine tanto dell' una che dell' altra serie, e nessuna delle due è propria.

Due serie distinte dello stesso sistema hanno in comune una terna.

Due serie distinte di sistemi diversi hanno due terne in comune.

90. Supponiamo (ciò che involge solo le notazioni) che la corrispondenza tra Ξ, H, Z ed R, R', R'' sia tale che, detti $s_1, s_2; s'_1, s'_2; s''_1, s''_2$ gli omologhi degli elementi singolari $S_1, S_2; S'_1, S'_2; S''_1, S''_2$, sia:

$$s_1 \equiv s''_2 \equiv R R'', \quad s'_1 \equiv s_2 \equiv R' R, \quad s''_1 \equiv s''_2 \equiv R' R''.$$

Allora, se P_1 e P_2 sono i punti rappresentativi di due terne generiche (fig. 24), la serie unicursale «del 1° sistema» R^1_t appartenente al campo, determinata da quelle terne e rappresentata dalla conica Γ per R, R', R'', P_1, P_2, è tale che in essa c'è sempre una terna in cui è contenuta la coppia singolare $S_1 S'_2$ (assieme al corrispondente del raggio tangente a Γ in R''), un'altra contenente S'_1 ed S''_2, una terza contenente la coppia $S''_1 S_2$. Le loro immagini sono R'', R, R'.

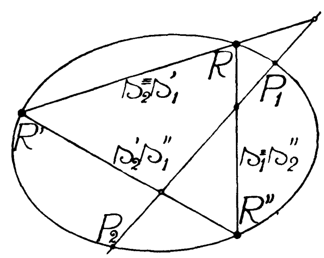


Fig. 24

Invece nell'altra serie unicursale «del 2° sistema» $\overline{R}^1_t$ contenuta nella data trilinearità, determinata dalle terne corrispondenti a P_1 e P_2 ed avente per immagine la retta $P_1 P_2$ ci sono sempre tre terne (le cui immagini sono le intersezioni della $P_1 P_2$ coi lati del triangolo $R R' R''$) contenenti rispettivamente le coppie singolari $S_1 S''_2$, $S''_1 S'_2$, $S'_1 S_2$.

Attesa l'unicursalità di R^1_t ed $\overline{R}^1_t$, ad esse non possono appartenere altre terne contenenti elementi singolari.

Viceversa se una serie unicursale deve appartenere al nostro campo di terne, poichè in esso appena una terna contiene un elemento singolare ne deve contenere anche un altro che col primo costituisca una coppia neutra (n. 11), nelle proiettività non degeneri che la definiscono si dovrà necessariamente avere:

(19) $(S_1 S_2 X \ldots) \overline{\wedge} (S_2' Y' S_1' \ldots) \overline{\wedge} (Z'' S_1'' S_2'' \ldots)$,
oppure:
(19') $(S_1 S_2 X_1 \ldots) \overline{\wedge} (Y_1' S_1' S_2' \ldots) \overline{\wedge} (S_2'' Z_1'' S_1'' \ldots)$.

In queste relazioni [94] X, Y', Z''; X_1, Y_1', Z_1'' sono tre elementi incogniti, finchè non si imponga alla serie di contenere due terne della trilinearità scelte genericamente [95] P, P', P'': Q, Q', Q''. Allora solamente le relazioni:

(20) $(P Q S_1 S_2 X \ldots) \overline{\wedge} (P' Q' S_2' Y' S_1' \ldots) \overline{\wedge} (P'' Q'' Z'' S_1'' S_2'' \ldots)$,

(20') $(P Q S_1 S_2 X_1 \ldots) \overline{\wedge} (P' Q' Y_1' S_1' S_2' \ldots) \overline{\wedge} (P'' Q'' S_2'' Z_1'' S_1'' \ldots)$,

determinano linearmente X, Y, Z; X_1, Y_1', Z_1''.

Mentre le (19) o le (19') sono necessarie perchè la serie appartenga al dato campo di terne, le (20) o le (20') sono anche sufficienti (n. 89). Infatti conseguentemente ad esse la serie viene ad avere 5 terne in comune colla trilinearità. Le assumeremo perciò come relazioni fondamentali per le serie del 1° e del 2° sistema.

91. Immaginiamo ora di scambiare contemporaneamente l'ufficio degli elementi singolari di ciascuna forma. Tale scambio, come sappiamo (n. 22) è inessenziale per la determinazione della trilinearità. Bisogna però notare che muta la (20) nella (20'), cioè scambia il primo col secondo sistema di serie unicursali. Risulta quindi che *tutte le proprietà delle serie di un sistema pertingono anche alle serie dell'altro.*

Questo risultato si poteva conseguire anche dalla rappresentazione del campo di terne nel piano $\alpha \equiv (R, R', R'')$. Infatti,

[94] Nelle condizioni da noi presupposte se vale la (19) la serie è rappresentata da una conica, cioè appartiene al primo sistema; se vale la (19') appartiene al secondo sistema ed è rappresentata da una retta.

[95] Cioè tali da non appartenere ai due casi già specificati in *a*), *b*) alla nota [93]. Infatti mediante le (20), (20') si ritrovano subito gli stessi risultati già conseguiti con la rappresentazione geometrica.

scambiati com'è lecito i nomi degli elementi singolari in R, R', R'', se le serie del 1° sistema erano prima rappresentate da coniche e quelle del 2° da rette, dopo lo scambio (che scambia la rappresentazione delle terne delle due serie contenenti coppie singolari) quelle del 1° sistema vengono rappresentate da rette, e quelle del 2° da coniche.

Associando nel campo di terne originario F_t le due terne corrispondenti nella prima e nella seconda rappresentazione allo stesso punto del piano α, si viene a generare una trasformazione biunivoca ed involutoria di F_t in sè che subordina una corrispondenza proiettiva tra la rete delle serie del primo e la rete delle serie del 2° sistema. Per provarlo basterà considerare la trasformazione simmetrica della precedente che si genera tra i punti del piano α quando (fissi restando i nomi degli elementi singolari della trilinearità concorrente) si associno due punti corrispondenti nella rappresentazione alla stessa terna di F_t, prima e dopo lo scambio degli elementi singolari su Ξ, H, Z.

92. Siano:

$$(21) \qquad \begin{gathered} (S_1 S_2 U \ldots) \barwedge (s_1 s_2 u \ldots), \quad (S'_1 S'_2 U' \ldots) \barwedge (s'_1 s'_2 u' \ldots), \\ (S''_1 S''_2 U'' \ldots) \barwedge (s''_1 s''_2 u'' \ldots), \end{gathered}$$

le proiettività che mutano la nostra trilinearità T in quella concorrente T'. In esse U, U', U'' sono gli elementi di una terna di T, ed u, u', u'' tre raggi di R, R', R'' concorrenti in un punto.

Scambiamo su Ξ, H, Z i nomi degli elementi singolari, senza alterare quelli degli elementi singolari di T'. Usando ancora le vecchie notazioni, le proiettività che mutano T in T' rappresentando le nuove serie del 1° e del 2° sistema rispett. nei punti delle rette e delle coniche di α, saranno ora definite da relazioni del tipo:

$$(21') \qquad \begin{gathered} (S_2 S_1 V \ldots) \barwedge (s_1 s_2 v \ldots), \quad (S'_2 S'_1 V' \ldots) \barwedge (s'_1 s'_2 v' \ldots), \\ (S''_2 S''_1 V'' \ldots) \barwedge (s''_1 s''_2 v'' \ldots). \end{gathered}$$

In esse V, V', V'' sono gli elementi di una terna di T e v, v', v'' tre raggi di R, R', R'' concorrenti in un punto, che in particolare possono anche coincidere con U, U', U''; v, v', v''.

Consideriamo le proiettività di R, R', R'' in se che si ottengono associando le coppie di elementi omologhi nelle (21) e nelle (21′) allo stesso elemento risp. di Ξ, H, Z. Poichè ammettono le coppie involutorie $s_1 s_2$, $s'_1 s'_2$, $s''_1 s''_2$, si tratta di tre involuzioni I_R, $I_{R'}$, $I_{R''}$, i cui raggi uniti sono coniugati armonici rispetto agli elementi singolari di ciascun fascio.

Se prima la (20) era rappresentata da una certa conica e la (20′) da una determinata retta, ora (mantenendo le vecchie notazioni) la (20′) sarà rappresentata da una cert'altra conica, e viceversa la (20) da un'altra determinata retta, giacchè risulta in definitiva scambiata la rappresentazione degli (delle terne di T contenenti gli) elementi singolari di Ξ, H, Z.

Quindi la trasformazione di α in se che si ottiene associando due punti omologhi di una stessa terna di T prima e dopo lo scambio degli elementi singolari, biunivoca, algebrica ed involutoria perchè ottenuta per tramite di I_R, $I_{R'}$, $I_{R''}$, mutando proiettivamente la rete delle rette nella rete delle coniche per R, R', R'' (e viceversa), è una trasformazione quadratica involutoria di α in se, col triangolo fondamentale R, R', R''. Dal meccanismo della corrispondenza si riconosce immediatamente che possiede solo quattro punti uniti E_1, E_2, E_3, E_4, vertici del quadrangolo di cui gli elementi doppi di I_R, $I_{R'}$, $I_{R''}$ sono i lati ed $R R' R''$ il triangolo diagonale (fig. 25). È noto ([96]) come la *classe* di una tale trasformazione sia uguale ad 1, e come essa sia equivalente difronte alle trasformazioni quadratiche ad una omologia armonica.

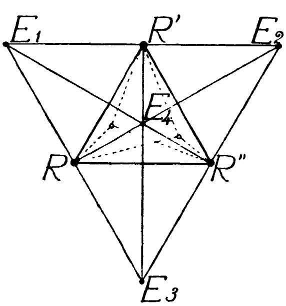


Fig. 25

([96]) Cfr. ad es. L. Berzolari, *Algebraische Transformationem und Korrespondenzen* [Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften, III, 2, 2, B, pag. 1781] nn. 60-61. In questo articolo si trova anche (n. 5) un'ampia ed aggiornata bibliografia sulla teoria della trilinearità.

93. Ci rimangono da considerare le serie unicursali proprie contenute in un campo di terne monosingolare. Esso può rappresentarsi su di un piano punteggiato α solo a patto che i centri R, R', R'' dei tre fasci siano allineati (n. 68). Su α, come già nel caso della trilinearità duplosingolare, le serie unicursali proprie son rappresentate in generale da terne di coniche Γ_{12}, Γ_{23}, Γ_{13}, passanti rispettivamente per R ed R', R' ed R'', R ed R''.

Si riconosce che quando Γ_{12} e Γ_{23} sono irriducibili (cioè quando π'_{12} e π'_{23}, che assieme a π'_{13} si suppongono sempre *non degeneri*, non sono prospettività) e si tagliano in tre altri punti $P_1\,P_2\,P_3$ distinti da R', la Γ_3 generata da:

$$\pi'_{13} = \pi'_{23}\,\pi'_{12},$$

vincolata a passare per R, R'', P_1, P_2, P_3, non può mai essere degenere.

Allora P_1, P_2, P_3 sono le immagini delle tre sole terne comuni alla serie unicursale ed alla trilinearità (fig. 26).

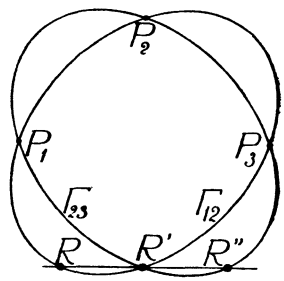


Fig. 26

Quando invece uno dei P_i cade in R', dove Γ_{12} e Γ_{23} allora si toccano, Γ_{13} è degenere e si spezza nella $R\,R'\,R''$ e nella congiungente gli altri due P_k. In tal caso π'_{13} è una prospettività. Ragionando per continuità si riconosce che vi sono sempre solo tre terne comuni alla R^1_t e alla trilinearità; una di esse ha per immagine il punto P_i infinitamente vicino ad R' nella direzione della tangente comune a Γ_{12} e Γ_{23}.

Supponiamo quindi (poichè implicitamente abbiamo già considerato il caso in cui una delle π'_{ik} sia una prospettività) che due delle date π'_{ik} siano prospettività, ad es. π'_{12} e π'_{23}. Corrispondentemente Γ_{12} e Γ_{23} si spezzano nella $R\,R'\,R''$ ed in due rette ulteriori, che dapprima supporremo distinte g_{12} e g_{23}, incidenti in P (fig. 27). Allora anche π'_{13} è una prospettività, essendo corrispondenti $R\,R''$ ed $R''\,R$. La componente di Γ_{13} distinta da $R\,R''$ passa per P ed è determinata da una ulteriore coppia della proiettività, cioè dai due raggi corrispondenti allo stesso raggio di R'. Poichè nessuna delle π_{ik} è degenere, nessuna delle g_{ik} passa per uno dei centri dei tre fasci. Vi sono in questo caso due sole terne comuni alla trilinearità ed alla serie: la terna singolare, e la terna corrispondente a P (cfr. n. 94).

Notevole è il caso finora escluso in cui g_{12} e g_{23} coincidano. Allora con esse coincide pure la componente distinta da $R R''$ della conica degenere generata da π_{13}, e poichè tutte le terne della serie sono rappresentate dalle terne di raggi concorrenti nei punti di quella retta, tutte le terne della serie appartengono al campo.

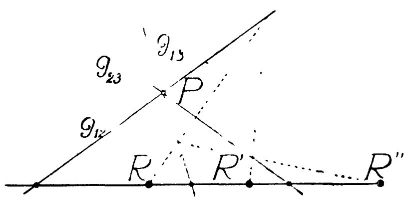


Fig. 27

Risulta quindi che *in generale una trilinearità monosingolare* (non degenere) *ed una serie unicursale hanno in comune tre terne. Se però tra queste c'è la terna singolare, allora vi è solo una ulteriore terna distinta in comune,* a meno che tutte le terne della serie, e quindi la serie stessa, non siano contenute nel campo.

In un campo di terne monosingolare sono contenute ∞^2 serie unicursali di terne, che formano una sola *rete*, che può porsi in corrispondenza biunivoca con quella delle rette del piano ([97]), (eccettuati i tre fasci R, R', R'', se si considerano solo le serie « proprie »). *Una serie della rete è determinata da due terne.* Tutte le rette del piano incontrano la $R R' R''$, e quindi *tutte le serie della rete contengono la terna singolare.* Oltre questa, due serie unicursali distinte della rete (rappresentate da rette distinte) hanno in comune una sola terna, la cui immagine è il punto d' incontro delle due rette.

94. Si rileva facilmente anche per via analitica ([98]) che quando la terna singolare è una delle tre terne comuni ad una

([97]) È chiaro che a questo risultato si poteva anche giungere considerando la trilinearità monosingolare come il limite di una trilinearità concorrente generale.

([98]) Cfr. London ([12]), § 2, 5).

trilinearità monosingolare e ad un campo di terne, essa va contata doppiamente.

Infatti, se α_i, β_k, γ_l; α'_i, β'_k, γ'_l sono le coordinate degli elementi di due terne della serie unicursale, le coordinate di ogni altra sua terna possono esprimersi nella forma:

$$(23) \quad \rho x_i = \alpha_i + \lambda \alpha'_i, \quad \sigma y_k = \beta_k + \lambda \beta'_k, \quad \tau z_l = \gamma_l + \lambda \gamma'_l,$$

dove ρ, σ, τ sono dei moltiplicatori, λ un paramentro, e sia fissato in modo opportuno il valore del fattore di proporzionalità a meno del quale sono determinati α_i, β_k, γ_l; α'_i, β'_k, γ'_l.

Sostituendo le (23) nella equazione della trilinearità:

$$f(x\, y\, z) \equiv \Sigma\, a_{ikl}\, x_i\, y_k\, z_l = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2),$$

si ottiene una equazione di 3° grado in λ:

$$\begin{aligned} &\Sigma\, a_{ikl} (\alpha_i + \lambda \alpha'_i)(\beta_k + \lambda \beta'_k)(\gamma_l + \lambda \gamma'_l) \equiv f(\alpha \beta \gamma) + \\ (24) \quad &+ \lambda [f(\alpha' \beta \gamma) + f(\alpha \beta' \gamma) + f(\alpha \beta \gamma')] + \lambda^2 [f(\alpha \beta' \gamma') + \\ &+ f(\alpha' \beta \gamma') + f(\alpha' \beta' \gamma)] + \lambda^3 f(\alpha' \beta' \gamma') = 0, \end{aligned}$$

le cui radici conducono per tramite delle (23) alle *tre* terne che in generale sono comuni al campo di terne e alla serie. Inoltre, quando la terna singolare appartiene alla serie, cambiando il riferimento proiettivo sulle tre forme, si può sempre fare in modo che α_i, β_k, γ_l siano le coordinate degli elementi singolari. Ma allora $f(\alpha \beta \gamma) = f(\alpha' \beta \gamma) = f(\alpha \beta' \gamma) = f(\alpha \beta \gamma') = 0$, quindi la (24) ammette la radice doppia $\lambda = 0$, e la terna singolare (le coordinate dei cui elementi si ottengono dalla (23) proprio per $\lambda = 0$) va contata due volte fra le 3 terne comuni alla serie ed al campo.

Che una serie unicursale contenuta in una trilinearità monosingolare debba necessariamente contenere la terna singolare $S\, S'\, S''$, lo si può riconoscere anche indipendentemente dalla rappresentazione geometrica. Infatti, dovendo tutte le sue terne essere contenute nel campo, quella (determinata, per l' unicursalità della serie) contenente S conterrà anche S' od S''. Supponiamo che ad es. contenga S', al quale caso ci si può sempre ridurre cambiando le notazioni. È pure determinata la terna della serie contenente S''. Anch' essa deve contenere S' od S. In entrambi i casi coincide però per l' unicursalità della serie con la precedente, che contiene quindi S, S' ed S''.

Risulta perciò a posteriori che la conica immagine di una serie unicursale contenuta nel campo è sempre degenere, dovendo contenere la retta $R R' R''$. Inoltre, se P, P', P'' ; Q, Q', Q'' sono due terne generiche della trilinearità concorrente, la serie che le contiene sarà pienamente determinata dalle relazioni:

$$(S\, P\, Q \ldots) \overline{\wedge} (S'\, P'\, Q' \ldots) \overline{\wedge} (S''\, P''\, Q'' \ldots) .$$

95. Approfittando della rappresentazione della trilinearità (sia essa generale che monosingolare) nei punti di un piano α, si possono mettere in evidenza altre notevoli serie algebriche ∞^1 di terne in essa contenute, le cui immagini siano quindi curve algebriche del piano stesso.

Così una serie algebrica *bicursale*, cioè tale che un elemento generico di una delle tre forme (nel piano un raggio di R, o di R', o di R'') appartenga a due terne della trilinearità (tagli quella curva algebrica in due punti distinti da R, R', R'') potrà essere rappresentata da:

a) una conica generica del piano α. Le serie bicursali di questo tipo formano quindi un sistema lineare ∞^5;

b) una cubica generica del piano α per $R R' R''$. Quelle di questo tipo formano perciò un sistema lineare ∞^6.

c) una quartica generica del piano α con tre punti doppi in R, R', R''. Quelle di questo tipo formano un sistema lineare ∞^5.

È facile vedere che non vi sono altre possibilità. Infatti dovrebbe trattarsi di una curva algebrica di ordine $n+2$ con un punto n-plo in ciascuno dei tre centri R, R', R''. Quindi non può essere $n > 2$, altrimenti il suo ordine $n+2$ sarebbe minore del numero $2n$ delle intersezioni che essa avrebbe con la congiungente i centri dei due fasci.

Se la trilinearità é monosingolare il caso c) svanisce. Si può pensare, come nel caso delle serie unicursali, che coincida con a). È da notare che anche ora i due sistemi a) e c) di serie bicursali che coincidono quando R, R', R'' sono allineati sono quelli che nel caso della trilinearità generale vengono mutati l'uno nell'altro dallo scambio simultaneo degli indici degli elementi singolari delle tre forme (n. 92).

Abbiamo veduto come l'insieme delle terne comuni ad un fascio di trilinearità (cioè a due trilinearità distinte aventi gli stessi sostegni) costituisca una serie (ovviamente algebrica) bicursale. Poichè a determinarla occorrono sei terne, un facile computo di costanti mostra che si tratta di una serie bicursale del tipo b).

Le serie bicursali del tipo a) e del tipo c) hanno, come già le serie unicursali del 1° e del 2° sistema, *le stesse proprietà.*

Così due serie bicursali del tipo a), come anche due serie del tipo c) hanno 4 terne in comune ([99]). Invece due serie bicursali del tipo b) hanno sei terne in comune. Una serie bicursale di tipo a) ed una di tipo c) hanno 8 terne in comune; una di tipo a) ed una di tipo b), come anche una di tipo b) ed una di tipo c) hanno in comune sei terne.

Una serie unicursale del 1° sistema ha con una serie bicursale di tipo a) 4 terne in comune. Una del 2° ne ha due. Viceversa una serie unicursale del 1° sistema ha due terne comuni con una bicursale di tipo c), mentre una del 2° ne ha 4.

E così via.

È da notare che si tratta sempre di sistemi lineari. Quindi 5 terne generiche determinano una serie bicursale del tipo a) o del tipo c), mentre 6 terne generiche determinano una serie bicursale del tipo b). Come le serie unicursali possono pensarsi generate da corrispondenze proiettive leganti le tre forme Ξ, H, Z, così le serie bicursali possono pensarsi generate da corrispondenze algebriche [2, 2, 2].

([99]) Infatti si riconosce facilmente con un passaggio al limite che perchè le due terne che in ciascuna serie sono rappresentate da uno degli $R^{(j)}$ coincidano, occorre che ivi le due quartiche si tocchino, e ciò di solito non accade.

96. Più in generale si possono considerare serie algebriche di terne generate da corrispondenze algebriche $[p, q, r]$ tra Ξ, H, Z. Fra queste particolarmente notevoli per la loro simmetria sono le *serie m-cursali* generate da corrispondenze algebriche $[m, m, m]$ leganti le tre forme date.

In una trilinearità ne sono contenuti più sistemi lineari di diversa dimensione, le cui proprietà di appartenenza relative alle terne e alle serie unicursali dell'una e dell' altra rete si riducono alle proprietà d'appartenenza delle curve algebriche di opportuni sistemi lineari del piano relative ai punti, alle rette, alle coniche per R, R', R'' (Cfr. nota ([90])).

Così ad es. la rappresentazione sul piano α ci permette di affermare che in una trilinearità generale sono contenuti $m+1$ sistemi lineari di serie *m-cursali*, che possono esse rappresentate rispettivamente da:

1) Una curva algebrica generica di ordine m.

Quelle di questo tipo costituiscono un sistema lineare di dimensione:

$$\frac{m(m+3)}{2}.$$

2) Una curva algebrica di ordine $m+1$ per R, R', R''. Dimensione del sistema:

$$\frac{(m+1)(m+4)}{2}-3.$$

3) Una curva algebrica di ordine $m+2$ con un punto doppio risp. in R, R', R''. Dimensione del sistema:

$$\frac{(m+2)(m+5)}{2}-9.$$

. . . .

$m+1$) Una curva algebrica di ordine $m+m$ con tre punti *m-pli* risp. in R, R', R''. Dimensione del sistema ([100]):

$$\frac{2m(2m+3)}{2}-\frac{3m(m+1)}{2}=\frac{m(m+3)}{2}.$$

([100]) Cfr. ad es. Comessatti ([17]), I, pag. 304 e seg.

Non vi sono altre possibilità, chè, dovendo l' immagine di una serie del sistema essere una curva algebrica di ordine $n+m$ con un punto n-plo in ognuno dei centri, deve essere $n+m \geq 2n$, cioè $n \leq m$. I sistemi 1), $m+1$) ; 2), m) ; ... che sono mutati l'uno nell'altro dalla trasformazione involutoria di cui al n. 92, e che nel caso delle trilinearità monosingolari coincidono, godono delle stesse proprietà, come già abbiamo visto per le serie mono- e bi-cursali.

97. Consideriamo tre fasci di raggi complanari qualsiasi, di equazioni :

$$\lambda_1 A_2 - \lambda_2 A_1 = 0\,, \tag{26}$$

$$\mu_1 B_2 - \mu_2 B_1 = 0\,, \tag{26'}$$

$$\nu_1 C_2 - \nu_2 C_1 = 0\,, \tag{26''}$$

dove le A_i, B_k, C_l sono forme lineari in x_1, x_2, x_3, e supponiamoli legati da una corrispondenza trilineare qualsiasi F:

$$f(\lambda \mu \nu) \equiv \Sigma a_{ikl} \lambda_i \mu_k \nu_l = 0\,. \tag{27}$$

La F ha con la trilinearità «concorrente» F' degli stessi tre fasci una serie bicursale di terne in comune, e sappiamo già (n. 95) che il luogo della intersezione dei raggi di una terna è una cubica Γ per R, R', R''.

Ne possiamo determinare subito l'equazione ([101]) eliminando i rapporti $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}$, $\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$ tra le (26), (26'), (26'') e la (27), ad

([101]) Cfr. Folie e Le Paige, *Mém. sur les courbes du III^{me} ordre* ([6]), II parte, pag. 4.

Castelnuovo (l. cit. ([9]), pag. 1079) riconosce che la curva algebrica Γ generata dalle eventuali intersezioni comuni dei tre raggi di una terna di una trilinearità F fra tre fasci di raggi complanari è una cubica, osservando che essa è intersecata in tre punti da una retta generica r del del piano. Infatti F per sezione genera su r una corrispondenza trilineare, i cui i tre punti uniti (n. 89), ed essi soli, sono le intersezioni cercate di Γ con r. London ([13]) ottiene lo stesso risultato osservando che sono 3 le terne comuni alla trilinearità ed alla serie unicursale che si ottiene proiettando dai tre fasci i punti di r.

es. sostituendo nella (27) al posto di λ_i, μ_k, ν_l rispettivamente le forme lineari ed omogenee A_i, B_k, C_l. Si ha:

$$f(A,\ B,\ C) \equiv \Sigma a_{ikl}\, A_i\, B_k\, C_l = 0\,. \tag{28}$$

Si riconosce immediatamente che Γ passa per i centri dei tre fasci, in quanto che la (28) è evidentemente soddisfatta quando sia:

$$A_1 = A_2 = 0\,, \quad \text{oppure} \quad B_1 = B_2 = 0\,, \quad \text{oppure} \quad C_1 = C_2 = 0\,,$$

Dualmente, e cioè quando le A_i, B_k, C_l si pensino come equazioni di punto nel medesimo piano, si ha che la serie bicursale delle terne dei punti corrispondenti allineati di tre generiche rette complanari trilineari (comuni alla trilinearità data ed a quella allineata) genera con le congiungenti i tre punti di una terna un inviluppo di terza classe, contenente anche le tre rette date.

98. Alle (26), (26′), (26″), e quindi alla (28), si può dare un significato più generale pensando che le A_i, B_k, C_l che vi compaiono siano forme lineari in un numero qualsiasi n di variabili, da pensarsi come coordinate di punto o di iperpiano in uno spazio proiettivo ad n dimensioni S_n.

Allora, se ad es. le (26), (26′), (26″) sono le equazioni di tre fasci di iperpiani, legati dalla trilinearità (27), la (28) è l'equazione della ipersuperficie cubica luogo degli ∞^2 S_{n-3} in cui si tagliano i tre iperpiani di una stessa terna. Essa contiene i tre S_{r-2} assi dei tre fasci.

In particolare in S_3, se le (26), (26′), (26″) sono le equazioni di tre fasci di piani, legati dalla trilinearità (27), la (28) fornisce la equazione della superficie cubica V_2^3 generata dai punti di intersezione dei piani di una terna. Essa contiene gli assi dei tre fasci.

Dualmente i piani congiungenti le terne di punti di tre rette sghembe trilineari generano un inviluppo W_2^3 della 3ª classe che contiene anche le tre rette date. La sua equazione è ancora la (28) quando le (26), (26′), (26″) siano le equazioni delle tre rette e la (27) quella della trilinearità (cfr. n. 63).

Tanto la cubica C^3 generata da tre fasci di rette, che la V_2^3 generata da tre fasci di piani trilineari sono affatto generali.

Infatti, come per determinare una C^3 generale occorrono nove punti, così occorrono nove punti per determinare una serie unicursale di terne tra tre fasci di rette complanari (i centri dei tre fasci e sei terne della serie); e come per determinare una V_2^3 generale occorre darne 3 rette e 7 punti (che impongono $4 + 4 + + 4 + 7 = 19$ condizioni lineari), così si devono gli assi dei tre fasci e 7 terne per determinare la trilinearità che la generi.

Le costruzioni date della trilinearità e della serie bicursale comune a due campi di terne si traducono in altrettante costruzioni per le cubiche e le superficie cubiche, una volta che queste siano determinate in modo opportuno.

Con l'aiuto della corrispondenza trilineare si possono mettere in evidenza notevoli proprietà delle cubiche piane e delle superficie cubiche, in particolare per queste ultime quelle riguardanti le 27 rette ed alcune schiere di curve generate su di esse dalle serie mono-, bi- e poli-cursali di terne.

Ciò è stato già fatto da vari autori, tra i quali oltre i già più volte citati Schubert ([1]), ([5]), Sturm ([14]), ([15]), Folie e Le Paige ([6]), Castelnuovo ([2]), London ([12]), ([13]), anche il Cremona in un suo lavoro premiato dall' Accademia delle Scienze di Berlino ([102]).

99. Ma dei luoghi generati da tre forme fondamentali di 1ª specie trilineari, della loro costruzione e delle loro proprietà deducibili mediante la omografia trilineare mi riservo di parlare più diffusamente in seguito.

Così pure successivamente mi occuperò della trilinearità tra tra forme parzialmente o del tutto sovrapposte, con riguardo al problema degli elementi uniti, delle relative equazioni ridotte e delle corrispondenze parzialmente o del tutto involutorie.

Un capitolo a parte sarà dedicato allo studio degli insiemi

([102]) Luigi Cremona, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (Journal für die reine und augewandte Mathematik, Bd 68, p. 1–133).

più volte infiniti di trilinearità, nei loro rapporti con la totalità delle ∞^7 corrispondenze trilineari possibili, che mediante i coefficienti delle loro equazioni verranno rappresentate negli elementi di uno spazio lineare a 7 dimensioni.

In esso farà la sua naturale comparsa, come rappresentativa delle trilinearità doppiamente degeneri, e nello stesso tempo delle ∞^3 terne di elementi che è possibile estrarre da tre forme fondamentali di 1ª specie, una varietà di SEGRE ([103]) V_3 del sesto ordine e della sesta classe.

([103]) C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* [Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, t. V (1891), p. 192].

INDICE

Introduzione – Cenno Storico e Bibliografico.

CAPITOLO PRIMO

Caso generale per forme qualsiasi

CAPITOLO SECONDO

Corrispondenze trilineari singolari e degeneri

Capitolo terzo

Determinazione della trilinealità

Capitolo quarto

Casi notevoli di trilinealità tra particolari forme di prima specie

CAPITOLO QUINTO

Costruzioni fondamentali

CAPITOLO SESTO

Rappresentazione del campo di terne in un piano