Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Antonio Minzoni

Su un problema ai limiti per un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 9 (1938), p. 142-149

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1938__9__142_0>

SU UN PROBLEMA AI LIMITI PER UN SISTEMA DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE

Nota di ANTONIO MINZONI *a Venezia.*

In questa nota mi propongo di dimostrare [1] elementarmente che il problema ai limiti

$$
(1) \qquad \begin{aligned} & y' = f(x, y, z), \\ & z' = g(x, y, z), \\ & y(a) = y_0, \ z(b) = z_0 \end{aligned} \qquad (a < b)
$$

è sempre risolubile *se* $f(x, y, z)$ *e* $g(x, y, z)$ *sono continue e limitate nella striscia* S: $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$ [2].

La dimostrazione si spezza in due parti. Si riconosce dapprima (n. 1) che il problema (1) ammette soluzioni se i rapporti incrementali di f e g rispetto ad y e z sono limitati nella striscia o in ogni sua porzione limitata: ciò si ottiene elementarmente sfruttando, in modo opportuno, procedimenti noti. Per togliere l'ipotesi relativa alla condizione di LIPSCHITZ, uso (n. 2) un metodo, già seguito in un caso analogo dal Müller [3], che

[1] Salvo pure differenze di forma, le dimostrazioni date si trovano esposte nella mia Tesi di Laurea, discussa a Padova nel luglio scorso.

[2] Cfr. CACCIOPPOLI, *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un' osservazione sul problema dei valori ai limiti* [Rend. Acc. dei Lincei, serie VI, vol. XIII (1931), pp. 498-502].

[3] M. MÜLLER, *Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* [Math. Zeitschrift, vol. 26 (1927), pp. 619-645] Cap. II.

consiste nell'approssimare convenientemente i secondi membri delle $y' = f$, $z' = g$ e ricondurre, in tal modo, questo al caso precedente.

Tratto poi (n. 3) il problema (1) nell'ipotesi che f e g *siano infinite d'ordine* < 1 *rispetto a* $|y| + |z|$ *e soddisfacciano alla condizione di Lipschitz ricordata* (4). Anche questo caso si esaurisce con un ragionamento elementare (5).

1. — Cominciamo coll'osservare che se f e g sono continue e limitate e soddisfanno alla condizione di LIPSCHITZ, dato $\overline{z}_0$, il sistema $y' = f$, $z' = g$ ammette una ed una sola soluzione $\overline{y}(x)$, $\overline{z}(x)$ verificante le condizioni iniziali

$$\overline{y}(a) = y_0, \quad \overline{z}(a) = \overline{z}_0, \tag{2}$$

le funzioni $\overline{y}(x)$, $\overline{z}(x)$ potendosi definire in tutto l'intervallo $\overline{a\ b}$ e variando con continuità al variare continuo di $\overline{z}_0$.

Sia M una costante maggiore delle funzioni $|f|$, $|g|$ in tutta la striscia, e $y_1(x)$, $z_1(x)$ e $y_2(x)$, $z_2(x)$ siano le soluzioni del sistema $y' = f$, $z' = g$ verificanti rispettivamente le

$$y_1(a) = y_0, \quad z_1(a) = z_0 - M(b-a)$$
$$y_2(a) = y_0, \quad z_2(a) = z_0 + M(b-a).$$

Si ha evidentemente:

$$z_1(b) \leq z_0 - M(b-a) + \int_a^b |g(t, y_1(t), z_1(t))|\, dt \leq z_0,$$

$$z_2(b) \geq z_0 + M(b-a) - \int_a^b |g(t, y_2(t), z_2(t))|\, dt \geq z_0.$$

(4) Cfr. R. CACCIOPPOLI, loco cit.. Ivi non si suppone soddisfatta la condizione di LIPSCHITZ; anche qui questa ipotesi si dovrebbe poter eliminare applicando il procedimento di MÜLLER.

(5) Cfr. G. SCORZA DRAGONI, *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine* [Rend. Semin. Mat. R. Univ. di Roma, serie IV, Vol. 2, (1938), pp. 177-215], § 1.

Consideriamo la soluzione $\overline{y}(x)$, $\overline{z}(x)$ determinata dalle (2) ove $\overline{z}_0$ è il punto corrente dell'intervallo

$$(3) \qquad z_1(a) \leq \overline{z}_0 \leq z_2(a) \, ;$$

poichè la funzione $\overline{z}(x)$ può definirsi in tutto l'intervallo $\overset{\vdash\dashv}{a\,b}$, esiste ed è finito il numero $\overline{z}(b)$ ch'è funzione continua di $\overline{z}_0$ definita nell'intervallo chiuso e limitato (3). Se la indichiamo con $Z(\overline{z}_0)$, nell'intervallo (3) avremo

$$Z[z_1(a)] \leq z_0, \quad Z[z_2(a)] \geq z_0 \, .$$

Ne viene pertanto che esiste almeno un punto, diciamolo ζ_0, dell'intervallo (3) per cui è $Z(\zeta_0) = z_0$ cioè, se $y(x)$, $z(x)$ è il sistema integrale che verifica le $y(a) = y_0$, $z(a) = \zeta_0$, è pure $z(b) = z_0$.

2. - Mostriamo che l'ipotesi relativa ai rapporti incrementali di f e g non è essenziale. Supponiamo cioè f e g continue e limitate in S.

Osserviamo intanto che le eventuali soluzioni $y(x)$, $z(x)$ delle (1) (verificanti le $y(a) = y_0$, $z(b) = z_0$) sono, una volta fissati y_0 e z_0, limitate in modo uniforme nell'intervallo $\overset{\vdash\dashv}{a\,b}$, precisamente:

$$(4) \qquad \begin{aligned} |y(x)| &\leq |y_0| + M(b-a) = k_1 \, , \\ |z(x)| &\leq |z_0| + M(b-a) = k_2 \, , \end{aligned}$$

dove M ha il significato dianzi precisato. Se k è il maggiore dei numeri k_1 e k_2, consideriamo l'insieme

$$I: \; a \leq x \leq b, \quad -k-1 \leq y \leq k+1, \quad -k-1 \leq z \leq k+1 \, .$$

Consideriamo in I due successioni di polinomi $p_n(x, y, z)$, $q_n(x, y, z)$, convergenti in modo uniforme in I verso f, g rispettivamente, di guisa che in I si possono supporre soddisfatte le relazioni

$$(5) \qquad |p_n(x, y, z)| \leq k^*, \quad |q_n(x, y, z)| \leq k^* \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$k^* = M + \frac{1}{b-a} \, .$$

Le funzioni p_n e q_n sono equicontinue in I. Prolunghiamone la definizione in modo da ottenere in S funzioni continue, lipschitziane e verificanti le (5), che diremo ancora p_n, q_n.

Consideriamo ora il sistema

$$(6) \qquad \begin{cases} y' = p_n(x, y, z) \\ z' = q_n(x, y, z) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots);$$

per ogni valore fissato di n, esiste, per quanto si è visto al n. 1, almeno una soluzione $y_n(x)$, $z_n(x)$ delle (6) verificante le

$$y_n(a) = y_0, \quad z_n(b) = z_0 \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Ad ogni valore di n associamo una simile soluzione, il che può farsi secondo una legge determinata. Le successioni

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots;\quad z_1(x),\ z_2(x) \ldots$$

sono, com'è facile vedere, successioni di funzioni equicontinue ed equilimitate nell'intervallo chiuso $a \vdash\!\dashv b$. Possiamo allora trovare una successione di indici $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ tali che le successioni

$$y_{m_1}(x),\ y_{m_2}(x), \ldots;\quad z_{m_1}(x),\ z_{m_2}(x), \ldots$$

convergano uniformemente verso i limiti rispettivi $Y(x)$, $Z(x)$, che risulteranno funzioni continue. Le funzioni $Y(x)$, $Z(x)$ verificano le condizioni ai limiti $Y(a) = y_0$, $Z(b = z_0$; dalle eguaglianze

$$(7) \qquad \begin{aligned} y_{m_r}(x) &= y_0 + \int_a^x p_{m_r}(t, y_{m_r}(t), z_{m_r}(t))\, dt, \\ z_{m_r}(x) &= z_0 + \int_b^x q_{m_r}(t, y_{m_r}(t), z_{m_r}(t))\, dt \end{aligned}$$

si ricava, tenendo presenti le (4), (5),

$$|y_{m_r}(x)| \leq |y_0| + k^*(b-a) \leq k+1\,,$$
$$|z_{m_r}(x)| \leq |z_0| + k^*(b-a) \leq k+1\,.$$

Quindi è anche

$$|Y(x)| \leq k+1\,, \quad |Z(x)| \leq k+1\,.$$

Le curve di equazioni

$$y = y_{m_r}(x)\,, \quad z = z_{m_r}(x) \qquad (r = 1, 2, 3\ldots),$$
$$y = Y(x)\,, \quad z = Z(x)$$

sono perciò tntte contenute nell' insieme I in cui le funzioni p_n, q_n convergono uniformemente verso le funzioni f, g.

Tenuto conto della equicontinuità di p_n, q_n in I e della convergenza uniforme delle $y_{m_r}(x)$, $z_{m_r}(x)$ $(r = 1, 2, 3\ldots)$ verso le funzioni $Y(x)$, $Z(x)$ rispettivamente, si hanno le relazioni, valide uniformemente,

$$\lim_{r\to\infty} [p_{m_r}(x, y_{m_r}(x), z_{m_r}(x)) - f(x, Y(x), Z(x))] = 0\,,$$
$$\lim_{r\to\infty} [q_{m_r}(x, y_{m_r}(x), z_{m_r}(x)) - g(x, Y(x), Z(x))] = 0$$
$$(r = 1, 2, 3\ldots).$$

Passando al limite, per $r \to \infty$, nelle (7), otteniamo le eguaglianze

$$Y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, Y(t), Z(t))\, dt\,,$$

$$Z(x) = z_0 + \int_b^x g(t, Y(t), Z(t))\, dt\,;$$

da cui, derivando, segue il teorema.

3. - Mostriamo ora che il problema (1) è risolubile anche se le funzioni $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ sono continue e lipschitziane rispetto ad y e z in ogni porzione limitata dello strato S *e se, posto* $\omega = |y| + |z|$, *riesce uniformemente rispetto alla* x

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{f(x, y, z)}{\omega} = 0, \qquad \lim_{\omega \to \infty} \frac{g(x, y, z)}{\omega} = 0. \tag{8}$$

Siano $\overline{y}(x)$, $\overline{z}(x)$ soluzioni delle $y' = f$, $z' = g$ verificanti le $\overline{y}(a) = y_0$, $\overline{z}(a) = \overline{z}_0$ e sia J il massimo intorno destro di a in cui le funzioni $\overline{y}(x)$, $\overline{z}(x)$ si possono definire. Dico che J coincide coll'intervallo chiuso $\overset{\mathsf{H}}{a\;b}$. A ciò sarà sufficiente mostrare che le funzioni $\overline{y}(x)$, $\overline{z}(x)$ si mantengono limitate in tutto J [6].

Dalle (8) si ricavano le

$$|f(x, y, z)| \leq |y| + |z| + c, \qquad |g(x, y, z)| \leq |y| + |z| + c$$

(ove c è una conveniente costante positiva); di guisa che in J è valida la

$$|\overline{y}'(x)| + |\overline{z}'(x)| \leq 2 \{ |\overline{y}(x)| + |\overline{z}(x)| \} + 2c;$$

ed applicando un noto lemma [7] si ha

$$|\overline{y}(x)| + |\overline{z}(x)| \leq \{ |\overline{y}(a)| + |\overline{z}(a)| \} e^{2(b-a)} + c(e^{2(b-a)} - 1)$$

ch'è quanto basta per la dimostrazione della prima parte.

Sia h una quantità da determinarsi e scegliamo il numero k, soddisfacente alle

$$k > |y_0|, \quad k > |z_0|,$$

(6) E Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen* [Akademische Verlagsgesellschaft, Lipsia, 1930], n. 76.

(7) Loc. cit. nota prec., n. 85.

in modo tale che, per $|z| \geq k$, riesca

$$(9) \qquad |f(x, y, z)| + |g(x, y, z)| \leq h \{ |y| + |z| \}$$

e $y(x)$, $z(x)$ sia una soluzione delle $y' = f$, $z' = g$ verificante le $y(a) = y_0$, $|z(a)| \geq 4k$ e

$$I: a \leq x \leq \tau$$

il più grande intorno destro di a in cui sia soddisfatta la

$$(10) \qquad |z(x)| \geq k.$$

Si tratta di far vedere che, per h conveniente, dalla (10) discende la $|z(x)| \geq 2k$ in I, di guisa che dovrà essere $\tau = b$; e quindi, poichè per la (10) $z(x)$ non si annulla mai in I, $z(b) > z_0$, ovvero $z(b) < z_0$ secondo che $z(a) \geq 4k$, $z(a) \leq -$ $- 4k$.

In I, per le (9), (10), è

$$(11) \qquad |y'(x)| + |z'(x)| \leq h \{ |y(x)| + |z(x)| \}$$

e, per il lemma ricordato,

$$|y(x)| + |z(x)| \leq \{ |y_0| + |z(a)| \} e^{h(\tau - a)} < 2 |z(a)| e^{h(\tau - a)}$$

e perciò, se $(b - a) h < \log 2$,

$$|y(x)| + |z(x)| < 4 |z(a)|.$$

Quindi dalla (11) si ricava che in tutto I è

$$|z'(x)| < 4h |z(a)| < \frac{1}{2(b-a)} |z(a)|,$$

se h è tale da aversi $8(b - a) h < 1$.

Ma ora si ha

$$|z(x)| = \left| z(a) + \int_a^x z'(t)\, dt \right| \geq$$

$$\geq \left| |z(a)| - \left| \int_a^x z'(t)\, dt \right| \right| ;$$

da cui, poichè

$$\left| \int_a^x z'(t)\, dt \right| < \frac{1}{2} |z(a)| ,$$

si trae

$$|z(x)| > \frac{1}{2} |z(a)| ;$$

cioè

$$|z(x)| > 2k ,$$

come appunto volevamo.

Dopo di ciò il teorema segue dalla dipendenza continua delle soluzioni dai valori iniziali.