Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

U. Morin

Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 9 (1938), p. 123-139
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1938__9__123_0>

SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE CHE CONTENGONO UN SISTEMA DI CURVE RAZIONALI

Nota di U. Morin *a Padova.*

Sunto. — Si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè una varietà algebrica irriducibile V_{r-1}, ad $r-1>2$ dimensioni, che contiene un sistema razionale K di curve razionali irriducibili, di dimensione $r-2$ ed indice uno, si possa rappresentare birazionalmente sopra un S_{r-1} in modo che alle curve del sistema K corrispondano le rette di una stella. Questa condizione è che la V_{r-3} doppia, imagine delle coppie di curve in cui si scindono le curve riducibili di K, si spezzi in due varietà.

Nella teoria delle superficie algebriche è fondamentale il teorema del Noether (1) in cui si afferma che una superficie algebrica contenente un fascio razionale di curve razionali (irriducibili) è razionale, e può rappresentarsi birazionalmente sopra un piano in modo che a quelle curve corrispondano le rette di un fascio.

Una V_3 algebrica contenente una congruenza K (di indice uno) razionale di curve razionali invece in generale non è razionale (2), o può in particolare essere razionale ma in modo che non si possa far corrispondere alle curve della congruenza le rette di una stella (3).

(1) Noether M., *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven bezitzen* [Mathematische Annalen, Bd. 3 (1871)] pagg. 161-227.

(2) Castelnuovo G. - Enriques F., *Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus* [Encykllopädie der Math. Wissenschaften, III C 6 *b*] pag. 768.

(3) Montesano D., *Sui vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* [Rendic. dell' Accad. di Napoli (1895)] pagg. 92-110, 155-181.

In questa nota ricerco una condizione affinchè una V_{r-1} algebrica irriducibile contenente un sistema razionale K di curve razionali irriducibili, di dimensione $r-2$ e di indice uno, sia rappresentabile birazionalmente sopra un S_{r-1} in modo che alle curve di K corrispondano le rette di una stella. Una tale V_{r-1} verrà detta nel seguito *linearmente* razionale. Ecco il risultato a cui pervengo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una V_{r-1} che contiene un dato sistema razionale K di curve razionali irriducibili, di dimensione $r-2$ ed indice uno, sia linearmente razionale è che la V_{r-3} doppia, imagine delle coppie di curve in cui si scindono le curve riducibili di K, si spezzi in due varietà.

Questo teorema è equivalente al seguente teorema sugli spazi doppi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un S_r $(r > 2)$ doppio, con una varietà di diramazione Δ d' ordine $2m$ e dotata di un punto O multiplo dell' ordine $2m-2$, si possa rappresentare birazionalmente sopra un S'_r semplice in modo che alle rette doppie per O corrispondano le rette di una stella, è che il cono doppio C delle tangenti tirate da O alla Δ (e diverse dalle tangenti in O) sia riducibile.

In forma puramente algebrica i teoremi precedenti si possono enunciare nel seguente modo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un' equazione algebrica irriducibile $(r > 3)$,

$$f(x_0, x_1, \dots x_{r-1}) = 0, \tag{1}$$

in cui f è un polinomio di grado n nell' insieme di tutte le variabili e di secondo grado nelle sole variabili x_0, x_1, sia risolubile con delle equazioni razionali, razionalmente invertibili in t,

$$\begin{cases} x_0 = \varphi_0(x_2, \dots x_{r-1}, t) \\ x_1 = \varphi_1(x_2, \dots x_{r-1}, t) \end{cases} \tag{2}$$

è che, interpretate nella f le x_0, x_1 come variabili e $x_2, \dots x_{r-1}$

come parametri, le due componenti della generica conica riducibile f *si possano separare con operazioni razionali nelle* $x_2, \ldots x_{r-1}$.

Per $r = 3$ l'equazione (1) è in generale risolubile con equazioni del tipo (2). La impossibilità di estendere il procedimento in generale ad $r > 3$ è stata rilevata da ENRIQUES [4].

1. Sia data una varietà algebrica irriducibile F^*, ad $r - 1$ dimensioni ($r \geqq 3$), che contenga un sistema K^* razionale di curve razionali C^* irriducibili, di dimensione $r - 2$ e di indice *uno*. È noto che questa F^* può essere trasformata birazionalmente in una ipersuperficie F di uno spazio lineare S_r dell'ordine n ($n \leqq 2$) dotata di una retta l multipla per la F dell'ordine $n - 2$, e in modo che al sistema K^* corrisponda il sistema K delle coniche C che si ottengono segando la F coi piani per la retta multipla l [5].

L'equazione della F, ove la retta l si assuma come lato $O_0\, O_1$ della piramide delle coordinate nell' S_r, sarà allora

$$(3) \qquad F \equiv a_{00} x_0^2 + 2\, a_{01} x_0 x_1 + a_{11} x_1^2 + 2\, a_{02} x_0 + 2\, a_{12} x_1 + a_{22} = 0 \,,$$

in cui a_{00}, a_{01}, a_{11}; a_{02}, a_{12} e a_{22} sono forme di $x_2, x_3, \ldots x_r$ rispettivamente dei gradi $n - 2$, $n - 1$ e n.

Indichiamo con Π lo spazio lineare S_{r-2} che congiunge i vertici $O_2, O_3, \ldots O_r$ della piramide delle coordinate. Un punto generico P_C dello spazio Π individua un piano per l, cioè una conica C della congruenza K. Otteniamo così una corrispondenza Ω della F con Π nella quale ai punti di una generica conica C di K corrisponde un medesimo punto P_C di Π.

Se consideriamo la F^*, cioè una qualunque trasformata birazionale della F, potremo far corrispondere al punto P_C tutti

[4] ENRIQUES F., *Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues* [Mathematische Annalen, t. 51 (1897)] pagg. 134-53.

[5] ENRIQUES F., *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica* $f(x, y, z) = 0$ *con funzioni razionali di due parametri* [Mathematische Annalen, t. 49 (1897)] pagg. 1-23.

i punti della curva razionale C^* di K^* trasformata della C. Questa corrispondenza tra la F^* e lo spazio Π, analoga alla Ω, indicheremo con Ω^*.

2. Alla varietà λ ad $r-2$ dimensioni formata delle coniche riducibili di K corrisponde nella Ω in Π un' ipersuperficie γ, d' ordine $3n-4$, data dall' equazione

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

riferita prospettivamente alla varietà Γ ad $r-3$ dimensioni luogo dei punti doppi delle coniche riducibili di K.

Alle coniche di K riducibili in rette doppie corrispondono i punti di una varietà M, di dimensione $\mu \leq r-3$, le cui coordinate annullano tutti i minori del secondo ordine di A. Così ai piani per la retta l che appartengono totalmente alla F corrispondono i punti di una varietà N, di dimensione $\nu \leq r-4$ e contenuta in M, le cui coordinate annullano gli elementi di A. Come si vede direttamente la varietà M è almeno doppia per γ e la N è almeno tripla.

3. Approfondiamo il legame che sussiste nella corrispondenza Ω tra i punti P multipli di F e le loro immagini P' in Π. Si vede direttamente che condizione necessaria e sufficiente affinchè le coordinate di un punto P annullino, per opportuni valori di x_0, x_1, le forme $F, \frac{\partial F}{\partial x_0}$ e $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ è che la sua imagine P' appartenga a μ, cioè che le sue coordinate $x_2, \dots x_r$ soddisfino all' equazione $A=0$.

Indichiamo coll' apice la derivata rispetto a una variabile x_s $(s=2, 3, \dots r)$. Allora per tutti i valori di $x_2, \dots x_r$ per cui $A=0$ e $A_{22} \neq 0$ e per i valori di x_0, x_1 inerenti al punto doppio della conica degenere relativa si stabilisce facilmente il legame ([6])

(5) $$A_{22} F' = A'.$$

Dunque: *Se un punto P è doppio per F, la sua imagine P' in Π è doppia per γ. Viceversa un punto P' doppio di γ, le cui coordinate non annullano A_{22}, è imagine di un punto P doppio delle F.*

4. Nei seguenti nn. 5-9 costruiremo un modello proiettivo della F che soddisferà alle seguenti condizioni di *regolarità*:

I) La forma A si scompone in fattori distinti al più doppi, ed uno (almeno) semplice.

II) Le forme A e A_{22} non hanno alcun fattore in comune.

Per una F così *regolare* la conica degenere generica associata ad una componente irriducibile di γ (semplice o doppia) è formata da due rette distinte. La relativa componente di Γ (semplice o doppia per la F) non appartiene all'intorno infinitesimo della l.

Inoltre in un punto generico P di una componente doppia di Γ le rette tangenti alla F non possono formare un S_3 doppio, perchè allora il piano che dalla retta l proietta P' apparterebbe alla F, ciò che non può essere perchè $A_{22} \neq 0$.

5. Se vogliamo che nella (3) a_{00} non sia identicamente nulla, basterà scegliere come vertice O_0 della piramide delle coordinate un punto della retta l che non sia multiplo per la F dell'ordine $n-1$. Un po' meno semplice è l'evitare che nella (4) sia A_{22} identicamente nulla. $A_{22} \equiv 0$ significa che la conica generica di K è tangente alla retta l. Si prenda allora nell'S_r una

([6]) Se $A = 0$ e $A_{22} \neq 0$, si ha per le coordinate del punto doppio della conica di K $x_0 = \frac{A_{00}}{A_{02}} = \frac{A_{01}}{A_{12}} = \frac{A_{02}}{A_{22}}$, $x_1 = \frac{A_{01}}{A_{02}} = \frac{A_{11}}{A_{12}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$; da cui $x_0^2 = \frac{A_{00}}{A_{22}}$, $x_1^2 = \frac{A_{11}}{A_{22}}$, $x_0 x_1 = \frac{A_{01}}{A_{22}}$. Sostituendo queste espressioni di $x_0 x_1$ in F' si ottiene $F' = \frac{1}{A_{22}} A'$.

retta generica l_1 è si stabilisca tra le due stelle di piani, che hanno come sostegni le rette l ed l_1, la corrispondenza prospettiva rispetto allo spazio Π. Scelta ora una retta generica u, si proietti ogni conica C di K, che appartiene ad un piano della prima stella, sopra il piano corrispondente della seconda stella. La F si trasforma così birazionalmente in un'altra, nella quale la retta l_1 non è tangente alla conica generica del nuovo sistema K.

6. Possiamo dunque supporre che nella (3) non sia identicamente nulla nè a_{00} nè A_{22}. Consideriamo allora la trasformazione birazionale dell' S_r

$$(6) \qquad \begin{cases} y_0 = bc\,(a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}) \\ y_1 = ac\,(A_{22}x_1 - A_{12}) \\ y_2 = ab\,x_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_r = ab\,x_r\,, \end{cases}$$

la cui inversa è

$$(6') \qquad \begin{cases} x_0 = aA_{22}y_0 - ba_{01}y_1 - a_{00}A_{02}c \\ x_1 = (by_1 + A_{12}c)\,a_{00} \\ x_2 = a_{00}A_{22}c\,y_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_r = a_{00}A_{22}c\,y_r\,, \end{cases}$$

nelle quali a, b, c sono forme generiche, rispettivamente delle variabili $x_2, x_3, \dots x_r$ nelle (6) e delle variabili $y_2, y_3, \dots y_r$ nelle (6'), dei gradi $n-2+j$, $2n-4+j$ e $j \geq 0$; e nelle (6') a_{ik} e A_{ik} sono scritte nelle variabili $y_2, y_3, \dots y_r$.

Mediante le (6') la (3) si trasforma nella

$$(7) \qquad A_{22}a^2y_0^2 + b^2y_1^2 + a_{00}Ac^2 = 0\,.$$

7. Sarà possibile scrivere

$$(8)\qquad \begin{cases} A_{22} \equiv A_0 d_1^{2v_1+i_1} \dots d_u^{2v_u+i_u} \lambda_1^{2s_1+h_1} \dots \lambda_p^{2s_p+h_p} \\ a_{00} A \equiv A_2 d_1^{2w_1+j_1} \dots d_u^{2w_u+j_u} \mu_1^{2t_1+k_1} \dots \mu_q^{2t_q+k_q} \end{cases}$$

dove A_0, A_2, $d_1, \dots d_u$, $\lambda_1, \dots \lambda_\mu$, $\mu_1, \dots \mu_q$ sono forme delle variabili $y_2, y_3, \dots y_x$, coi fattori tutti semplici e a due a due primi tra loro. Gli esponenti sono numeri naturali, e precisamente $i_1, \dots i_u, j_1, \dots j_u, h_1, \dots h_p, k_1, \dots k_q$ sono uguali a *zero* oppure *uno*; $s_1, \dots s_p$, $t_1, \dots t_q$ sono ciascuno maggiore di zero e invece uno dei numeri $v_1, \dots v_u$, $w_1, \dots w_u$ non dovrà essere zero soltanto se il corrispondente numero i o j è zero.

Facciamo dentro alle (6) e (6′) per le forme a, b, c le posizioni

$$(9)\qquad \begin{cases} a \equiv a_1 \mu_1^{t_1} \dots \mu_q^{t_q} d_1^{w_1} \dots d_u^{w_u} \\ b \equiv b_1 \lambda_1^{s_1} \dots \lambda_p^{s_p} \mu_1^{t_1} \dots \mu_q^{t_q} d_1^{v_1+w_1+\varepsilon_1} \dots d_u^{v_u+w_u+\varepsilon_u} \\ c \equiv c_1 \lambda_1^{s_1} \dots \lambda_p^{s_p} d_1^{v_1} \dots d_u^{v_u} \end{cases}$$

dove a_1, b_1, c_1 sono forme generiche dei rispettivi gradi; ε_1 sia uguale ad *uno* se i_1 e j_1 sono tutti e due uguali ad uno, e *zero* in tutti gli altri casi, e analogamente per gli altri ε.

Allora il primo membro della (7) si potrà dividere per la forma

$$(10)\qquad \lambda_1^{2s_1} \dots \lambda_1^{2s_p} \mu_1^{2t_1} \dots \mu_q^{2t_q} d_1^{2(v_1+w_1)+\varepsilon_1} \dots d_u^{2(v_u+w_u)+\varepsilon_u}$$

e si potrà scrivere

$$(11)\qquad a_1^2 a_2 y_0^2 + b_1^2 b_1 y_1^2 + c_1^2 c = 0$$

dove a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 sono forme di $y_2, y_3, \dots y_r$ a due a due prime tra loro e prive di fattori multipli.

8. I gradi dei polinomi a_1, b_1, c_1 dipendono dal valore attribuito a j nelle (5) e dalle (9). Orbene, noi potremo fissare j in modo che quella (o quelle) delle tre forme a_1, b_1, c_1 che è di grado minimo sia addirittura una costante. Allora nella equazione (4) relativa alla (11), cioè

$$A_1 \equiv a_2 b_2 c_2 a_1^2 b_1^2 c_1^2 = 0 \tag{12}$$

vi sarà qualche fattore semplice, a meno che la (11) non si riduca alla

$$y_0^2 + y_1^2 + c_1^2 = 0 \tag{13}$$

cioè ad una quadrica singolare, il cui spazio doppio è rappresentato dentro allo spazio Π dalla equazione $c_1 = 0$. In seguito, quando parleremo di varietà F regolare, dovremo quindi includere il caso particolare (13).

9. La (11) presenta alla regolarità ancora questa deficenza, che all'equazione $a_2 b_2 a_1^2 b_1^2 = 0$ corrispondono coniche degeneri di K il cui punto doppio appartiene alla retta l, cioè A_{22} e A hanno dei fattori in comune.

Per eliminare questa ultima deficenza, consideriamo la trasformazione birazionale

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 = \alpha_0 z_0 \\ y_1 = \alpha_1 z_1 \\ y_2 = (z_0 + z_1 + \alpha_2) z_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_r = (z_0 + z_1 + \alpha_2) z_r , \end{array}\right. \tag{14}$$

dove α_0, α_1, α_2 sono forme lineari di $z_2, z_3, \dots z_r$, che trasforma la (11) in un'equazione di secondo grado in z_0, z_1, per la quale l'equazione (12) è (scritta nelle variabili $z_2, z_3, \dots z_r$)

$$\bar{A} = \alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 A_1 \tag{15}$$

ed il corrispondente

$$\bar{A}_{22} = a_2 b_2 a_1^2 b_1^2 \alpha_0^2 \alpha_1^2 + a_2 c_2 a_1^2 c_1^2 \alpha_0^2 + b_2 c_2 b_1^2 c_1^2 \alpha_1^2 . \tag{16}$$

Dunque nessun fattore di $\overline{A}$ è simultaneamente fattore di $\overline{A}_{22}$. Cioè la $\overline{F}$ che si deduce dalla (11) mediante le (14) è perfettamente regolare secondo le condizioni poste al n. 4.

10. Come è stato detto nella introduzione, la F si dirà *linearmente razionale* se essa è rappresentabile birazionalmente sopra un S_3 in modo che alle coniche C di K corrispondano le rette di una stella. Si vede facilmente che condizione necessaria e sufficiente affinchè una F sia linearmente razionale è che esista una varietà (razionale) V_{r-2} unisecante le coniche C di K (7).

Data la V_{r-2}, vogliamo scrivere le equazioni parametriche della F di equazione (3). Ci converrà di passare a coordinate non omogenee ponendo $X_s = \frac{x_s}{x_r}$ $(s = 0,\ 1, \dots\ r-1)$. La V_{r-2} viene proiettata semplicemente dalla retta l sullo spazio Π, quindi potrà rappresentarsi con le seguenti equazioni

$$(17) \qquad \begin{cases} X_0 = f_0(X_2, \dots X_{r-1}) \\ X_1 = f_1(X_2, \dots X_{r-1}), \end{cases}$$

dove f_0 e f_1 sono simboli di funzioni razionali.

Allora le equazioni parametriche della F si possono scrivere (tirando per il punto di una conica di K determinato dalle (17) una retta generica, nel piano della conica, di parametro t e determinando l'ulteriore intersezione di questa retta con la conica)

$$(18) \qquad \begin{cases} X_0 = \Phi_0(X_2, \dots X_{r-1}, t) \\ X_1 = \Phi_1(X_2, \dots X_{r-1}, t). \end{cases}$$

Le cose ora dette si possono esprimere così:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione

(7) Enriques F., *Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili* [Annali di Matematica, t. 20 (3), 1913].

algebrica irriducibile

$$F(X_0, X_1, X_2, \dots X_{r-1}) = 0\,, \tag{19}$$

in cui F è un polinomio di grado n nell'insieme di tutte le variabili e di secondo grado nell'insieme delle sole X_0 e X_1, sia risolubile con le equazioni razionali (18) *e razionalmente invertibili in t è che si possano determinare delle equazioni razionali* (17) *che soddisfino identicamente alla* (19).

11. Facciamo alcuni richiami sui *piani doppi* ([8]). Una superficie algebrica (irriducibile) f sulla quale sia individuata un'involuzione razionale I_2 dicesi piano doppio. Un piano Π i cui punti sono in corrispondenza birazionale colle coppie dell'involuzione I_2 e sul quale si consideri la curva δ, detta di *diramazione*, imagine della curva dei punti uniti della I_2 in senso invanriantivo (cioè sopra una stessa falda della f) può assumersi a modello proiettivo della f.

Se in una determinazione proiettiva la δ possiede componenti multiple, queste si possono sopprimere un numero pari di volte. L'intorno del primo ordine di un punto multiplo di δ, di molteplicità dispari, si deve considerare come una retta infinitesima appartenente a δ. Con queste convenzioni, in ogni modello proiettivo Π la δ è di ordine *pari*.

In particolare, se in una determinazione proiettiva di δ questa possiede soltanto componenti di molteplicità pari, allora la f si *spezza* in due superficie corrispondenti nella I_2 (e viceversa).

Ad esempio, il modello proiettivo della f dato dall'equazione

$$a(xy)\,z^2 + 2b(xy)z + c(xy) = 0\,, \tag{3'}$$

ha, con le convenzioni su esposte, la curva di diramazione nel piano doppio xy di equazione

$$a(xy)\,c(xy) - b^2(xy) = 0\,. \tag{4'}$$

([8]) Enriques-Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* [Cedam, Padova 1932] pagg. 348-363.

Si vede direttamente che se la (3') ha un punto doppio, questi è multiplo per la (4'), e viceversa (n. 4).

Una curva (doppia) γ del piano doppio Π ha i punti di diramazione nei punti comuni alla curva di diramazione δ, a meno che in uno di questi punti P' la γ non sia tangente alla δ. Allora nel punto P della f omologo a P' la curva della f di imagine γ ha un punto doppio. P' si dirà un *punto critico apparente*. Quindi se γ è imagine di due curve distinte della f tutti i suoi punti critici sono apparenti.

Viceversa, una curva γ tangente alla δ ovunque la incontri sarà imagine di una curva spezzata della f, quando inoltre il gruppo dei suoi punti critici apparenti è equivalente in γ a quelli segati su γ dal sistema delle curve di Π *metà* del sistema individuato dalle curve d'ordine pari δ.

12. Nei numeri successivi 12-18 supponiamo che nella (3) sia $r = 4$, cioè che la F sia un'ipersuperficie di un S_4. Lo spazio Π sarà quindi un piano e la corrispondenza Ω intercederà tra le coniche C della F e i punti di questo piano. Nei numeri 12-15 supporemo inoltre che la F sia *regolare* (n. 4).

Consideriamo nell'S_4 il sistema lineare d'ipersuperficie Φ d'ordine m, con la retta l multipla dell'ordine $m - 1$, dato dall'equazione

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 = 0 \tag{20}$$

dove α_0, α_1, α_2 sono forme di x_2, x_3, x_4 rispettivamente dei gradi $m - 1$ ed m, contenenti linearmente dei parametri o addirittura generiche. Una Φ generica taglia la F in una superficie f che mediante la Ω (cioè proiezione dalla retta l) viene rappresentata doppiamente sul piano Π. La curva di diramazione (a meno di eventuali componenti multiple) di questo piano doppio è data dall'equazione

$$\delta \equiv \sum_{ij}^{4}{}_{0} A_{ij}\, \alpha_i \alpha_j = 0, \tag{21}$$

dove A_{ij} sono i complementi algebrici del determinante A (n. 2).

L'insieme delle rette della superficie λ (n. 2) formata dalle coniche riducibili della congruenza K è una curva, della quale si può assumere a modello proiettivo la curva $\overline{\Gamma}$ intersezione delle superficie f e λ. Nella rappresentazione doppia della superficie f sul piano Π, alla curva $\overline{\Gamma}$ corrisponde la curva γ di equazione $A = 0$. Ricordiamo anche la curva Γ della F, luogo dei punti doppi delle coniche riducibili di K, in corrispondenza birazionale con la γ (nn. 2–4).

Se γ_1 è una componente semplice della γ, la corrispondente componente Γ_1 della Γ della nostra F *regolare* non è nell'intorno infinitesimo della l ed è luogo di punti semplici della F (n. 4).

13. Una curva δ del sistema continuo (21) è tangente alla γ_1 in ogni punto P nel quale la incontri. Infatti alla curva γ_1 del piano doppio con curva di diramazione δ corrisponde nella relativa superficie f la curva $\overline{\Gamma}_1$ (n. 12) intersezione della f (cioè della Φ) con la superficie λ_1 per la quale la curva Γ_1 (n. 12) è doppia. Quindi il punto P' corrispondente a P è un punto doppio per la $\overline{\Gamma}_1$, cioè P è un punto critico apparente della γ_1 (n. 11).

Se una curva γ_2 è componente *doppia* di γ, allora nel punto P' della f, corrispondente a un punto P comune alla γ_2 e δ, la f ha un punto doppio (non uniplanare, n. 4). La δ ha quindi un punto multiplo in P. *Faremo la convenzione di considerare l'insieme delle coniche riducibili di K associate alla componente doppia γ_2 di γ come (virtualmente) non esistente nell'insieme delle coniche riducibili di K.*

Supponiamo viceversa che per un punto P di Π le δ del sistema (21) passino con una direzione determinata. Ciò significa che le rette tangenti alla F in P' stanno in un S_3 che contiene la retta l, cioè che P' è un punto semplice della F e che per esso passano le due rette di una conica riducibile di K. Dunque P è un punto di una componente semplice di γ.

La componente semplice γ_1 della curva γ è dunque la *curva inviluppo* del sistema continuo (21), non considerando come facenti parte della curva inviluppo le linee generate dai punti multipli variabili delle curve (21).

In conclusione le curve δ del sistema continuo (21) sono tangenti alla curva γ_1 ovunque la incontrino. Invece i gruppi dei relativi punti di contatto descrivono su γ_1 una *serie di equivalenza* (⁹) (se γ_1 è irriducibile una serie lineare) in quanto riferiti con la Ω al sistema di equivalenza segnato sulla curva $\overline{\Gamma}_1$ dal sistema lineare di superficie (20)

14. Supponiamo ora che la F regolare (n. 4) sia linearmente razionale (n. 9), quindi che esista una superficie f' unisecante (fuori di l) le coniche C di K. Proiettando i punti della f' da un punto della retta l (fisso oppure variabile col piano per l) si ottiene un'ipersuperficie rigata dell' S_4 appartenente ad un sistema lineare (20), la quale sega la F secondo la f' ed un'altra superficie f'' (analoga alla f'). Cioè nel sistema lineare di superficie f, determinato dentro la F da un opportuno sistema d'ipersuperficie (20), esistono superficie spezzate (nella coppia f', f''), quindi nel sistema continuo (21) delle curve di diramazione δ dei piani doppi Π relativi alle f sono contenute curve doppie (n. 11).

Ma se nel sistema continuo (21) di curve δ figurano curve doppie, sopra il piano doppio Π, relativo ad una δ generica, la curva γ_1, con punti critici soltanto apparenti (n. 13), rappresenta una curva spezzata; cioè la curva $\overline{\Gamma}_1$ immagine sulla f delle rette delle coniche degeneri di K si spezza in due componenti coniugate nella involuzione I_2 (n. 11).

Dunque: *Condizione necessaria affinchè un'ipersuperficie regolare F sia linearmente razionale è che le coppie delle rette delle coniche degeneri di K formino una superficie λ spezzata in due parti distinte λ' e λ''.*

15. Vogliamo ora verificare che questa condizione necessaria per la razionalità lineare della F è pure sufficiente. Supponiamo per un momento che nella (3) sia $s = 3$, cioè chè la F sia una

(⁹) Severi F., *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica* [Memorie d. R. Acc. d' Italia, t. 3, N. 5].

superficie F_2 e che questa sia regolare, e non sia in particolare un cono quadrico (n. 8). L'equazione (4) nelle due incognite omogenee x_2, x_3, di grado $3n-4$ abbia s radici doppie ($2s < 3n-4$) relative ed altrettanti punti doppi della F_2 (n. 4).

Per una F_2 così regolare vale il seguente teorema del Noether [10]: Si prendano $3n-2s-5$ delle $3n-2s-4$ coniche degeneri relative a punti non doppi della F_2 e di ciascuna di esse una determinata retta. Avremo così $3n-2s-5$ rette p incidenti la retta l e a due a due non complanari con l. Allora è individuata una curva (razionale) d'ordine $n-2$ incidente la retta l in $n-3$ punti, che passa per gli s punti doppi della F e si appoggia a ciascuna delle $3n-2s-5$ rette p prescelte nella F_2.

16. Supponiamo che per un'ipersuperficie F regolare dell'S_4 sia soddisfatta la condizione necessaria del n. 13, cioè che la superficie λ formata dalle coppie di rette delle coniche riducibili di K si spezzi in due superficie λ' e λ''.

Se la F si può trasformare in particolare in un cono quadrico (n. 8) essa è evidentemente linearmente razionale. Nel caso generale l'equazione (4), di grado $3n-4$ avrà un fattore doppio γ_2 di grado $s \geq 0$ e un fattore semplice γ_1 di grado $3n-4-s > 0$. Sia β un piano per l che tagli la F in una conica riducibile relativa alla curva semplice γ_1.

Un S_3 generico per il piano β taglia la F regolare in una superficie F_2 (n. 14) ancora regolare e che possiede, fuori della retta l, s punti doppi. La superficie λ', cioè una delle due componenti nelle quali per ipotesi si scinde la λ, individua dentro a ciascuna delle $3n-5-2s \geq 0$ coniche riducibili della superficie F_2 (non relative agli s punti doppi della F_2 o al piano β) una determinata retta. In base al teorema del Noether (n. 14) è da queste rette *individuata* una curva $C^{(n-2)}$ unisecante le coniche C della superficie F_2. Al variare nell' S_4 dell' S_3 per il piano β, la curva $C^{(n-2)}$ descrive una superficie f' unisecante le coniche C del sistema K, cioè la F è linearmente razionale, c. v. d.

[10] Noether M., loco cit. [1].

17. Se la F ($r = 4$) non è regolare, potremo ancora considerare il sistema lineare (20) e dire, rispetto ad un piano doppio con curva di diramazione (21), che la γ è imagine di una curva spezzata quando ciò risulta dal considerare il caso non regolare come caso limite del caso regolare oppure (ciò che è lo stesso) quando ciò risulta nel caso regolare trasformato del caso non regolare (nn. 4-9). Ma anche senza eseguirne effettivamente questa trasformazione, si può stabilire il confronto tra i due casi.

Se ci troviamo nella situazione del n. 5, cioè è identicamente nullo a_{00}, oppure A_{22}, si vede direttamente che la F è linearmente razionale. Escluso questo caso cominciamo a confrontare la (3) con la (7).

Le componenti di coniche degeneri che corrispondono nella (7) all' annullarsi di $a^2\, b^2\, c^2$ sono virtualmente non esistenti (n. 12). Invece per $a_{00} = 0$, poichè $A_{22} = a_{00} a_{11} - a_{01}^2$, il primo membro della (7) si scinde in due fattori lineari in y_1. Cioè le rette di queste nuove componenti di coniche riducibili appartengono a due distinte superficie algebriche.

Consideriamo ora l' effetto della divisione del primo membro della (7) per la forma (10), in accordo con le osservazioni fatte alla (11). Si vede che un fattore di a_{00}, che sia fattore di A_{22} un numero pari di volte (zero incluso) si potrà sopprimere un numero pari di volte. Invece un fattore di $a_{00} A$ che sia multiplo per A_{22} un numero dispari di volte, dovrà sempre contarsi *una* volta.

Infine nella trasformazione della (11) con le (14) si introducono esclusivamente componenti di coniche riducibili virtualmente non esistenti.

18. Infine vogliamo esprimere la nostra condizione di razionaltà lineare direttamente per l' ente algebrico F^* (n. 1). Si determini in F^* comunque (ad es. riferendosi al modello proiettivo F) un sistema lineare semplice di superficie f che abbiano due intersezioni variabili con le curve razionali C^* di K^*. Nel riferimento Ω^* della F^* al piano Π (n. 1), alle superficie f corrisponde un sistema di piani doppi Π le cui curve di diramazione δ formano un sistema continuo dotato di una certa curva inviluppo γ (n. 13). Allora:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la F^* sia linearmente razionale è che sopra il piano doppio con curva di diramazione δ la γ rappresenti una curva riducibile (n. 10), *cioè che il gruppo dei punti di contatto di δ con γ sia equivalente in γ a quelli segati su γ dal sistema delle curve di* II *metà del sistema delle δ* (n. 10).

19. I teoremi sulla razionalità lineare si estendono direttamente ad una F di uno spazio lineare S_r con $r > 4$. Infatti se la F è linearmente razionale, lo è pure la ipersuperficie sezione della F con un S_4 generico tirato per la retta l.

Viceversa, se l'ipersuperficie sezione della F con un S_4 generico per la retta l è linearmente razionale, considerato un piano β per la retta l che seghi la F in due rette il cui punto comune P sia semplice per la F e fissata una di quelle due rette, dentro alla sezione della F con un S_4 generico per il piano β risulta determinata univocamente una superficie f unisecante le coniche di K contenute nell' S_4 (n. 16). Variando l' S_4 in una stella il cui sostegno S_3 contenga il piano β, quella superficie f descrive una varietà V_{r-2} unisecante le coniche di K, cioè la F dell' S_r è linearmente razionale (n. 9).

20. I teoremi precedenti possono essere interpretati nel riferimento della F ad uno spazio lineare S_{r-1} *doppio* (n. 11). Questo si ottiene proiettando la F dal vertice O_0 della piramide delle coordinate dell' S_r sopra l' S_{r-1} $(O_1, \ldots, O_r)$. L' S_{r-1} doppio così ottenuto ha l'ipersuperficie di diramazione

$$(22) \qquad \Delta \equiv (a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 + a_{22}) a_{00} - (a_{00} x_1 + a_{02})^2 ,$$

cioè una V_{r-2}^{2m}, che ha il punto O_1 multiplo dell'ordine $2m-2$. Si vede che viceversa ogni spazio doppio S_{r-1} con una varietà di diramazione V_{r-2}^{2m} con un punto multiplo dell'ordine $2m-2$ può pensarsi generato in questo modo.

Per $r = 3$ sono noti i teoremi sulla razionalità di un tale piano doppio. Per $r > 3$ il teorema dei n. 15–18, addattato allo spazio doppio $S^r{}_{-1}$ come risulta dal suo enunciato nella introduzione, pur non risolvendo l'importante problema della condizione di razionalità di un tale spazio doppio, ne chiarisce un interessante aspetto particolare.

21. Il fatto che le due componenti della generica conica riducibile di una componente γ_1 appartengono a due superficie algebriche (razionalmente) separabili, si può esprimere anche dicendo che quelle due componenti si possono separare con operazioni razionali in $x_2, \ldots, x_r$. Passando a coordinate non omogenee, come al n. 9, il risultato dei nn. 13–16 si può esprimere nel seguente modo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la (19) *sia risolubile con le* (18) *è che, interpretate nella* (19) $X_0 X_1$ *come variabili e* $X_2, \ldots, X_{r-1}$ *come parametri, le due componenti della generica conica riducibile* (19) *si possano separare con operazioni razionali in* $X_2, \ldots, X_{r-1}$.