RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LEOPOLDO CAVALLUCCI

**Riduzione di una matrice alla forma canonica nel suo campo di razionalità**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 8 (1937), p. 92-109

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__92_0>

# RIDUZIONE DI UNA MATRICE ALLA FORMA CANONICA NEL SUO CAMPO DI RAZIONALITÀ

*di* Leopoldo Cavallucci *a Volterra*

In questa Nota ci prefiggiamo di dare un mezzo per ridurre a forma canonica una matrice assegnata $A$ qualsiasi, senza uscire dal campo di razionalità cui appartengono i suoi elementi ([1]). E per forma canonica della matrice $A$ intenderemo una matrice $C$, nella quale siano immediatamente riconoscibili i divisori elementari di $(A - xI)$ coincidenti con quelli di $C - xI$. Con che vogliamo anche dire che fra $A$ e $C$ si ha una relazione del tipo

$$C = T A T^{-1},$$

ove $T$ è una matrice non degenere i cui elementi si costruiscono razionalmente mediante quelli di $A$. La nostra forma canonica risulterà *composta* mediante una o più matrici del tipo

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{Vmatrix},$$

([1]) Il che esprimeremo dicendo che effettueremo la riduzione « razionalmente ».

cioè assumerà l'aspetto

$$C = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & \dots & M_r \end{array} \right\| ,$$

ove $M_1, M_2, \dots, M_r$ $(r \geq 1)$ sono matrici del tipo $M$ indicato.

Inoltre, posto

$$f(x) = (-1)^m (x^m + a_1 x_{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m) ,$$

si ha

$$f(x) = |M - xI| ,$$

e si ha che $f_i(x) = |M_i - xI|$ è divisibile per $f_{i+1}(x) = |M_{i+1} - xI|$. $(i = 1, 2, \dots, r-1)$.

Le matrici componenti $M$ potrebbero anche costituirsi con altrettante di tipo

$$M^* = \left\| \begin{array}{cccc} -a_1 & 1 & \dots & 0\ 0 \\ -a_2 & 0 & & 0\ 0 \\ \cdot & & & \cdot\ \cdot \\ \cdot & & & \cdot\ \cdot \\ -a_{m-1} & 0 & & 0\ 1 \\ -a_m & 0 & & 0\ 0 \end{array} \right\| ,$$

ottenute da esse ruotandole di 180° intorno alla diagonale secondaria. Per queste oltre ad avere

$$|M - xI| = |M^* - xI| ,$$

si ha anche

$$M^* = P M P^{-1} ,$$

ove

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m-2} & a_{m-3} & & 1 & 0 \\ a_{m-1} & a_{m-2} & & a_1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Come si è già fatto, per le notazioni ci serviremo frequentemente di quelle adottate dal Prof. Cherubino nei suoi recenti lavori sulle matrici (²) le quali ci sono state di grande ausilio per la più chiara e compatta esposizione degli algoritmi impiegati.

## § 1 - Lemmi fondamentali.

**1.** - Lemma I. — *Se la matrice* $A = \| a_{ij} \| \; (ij = 1, 2, \dots, n)$ *ha la forma*

$$A = \left( \frac{M}{D} \middle| \frac{0}{A_1} \right),$$

*dove* $M$ *è del tipo noto e* $A_1 = \| a_{ij} \| \; (i,j = m+1,\; m+2, \dots, n)$, $D = \| a_{ij} \| \; (i = m+1, m+2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$ *si può trasformarla razionalmente nella* $A'$ *avente la forma*

$$A' = \left( \frac{M}{D} \middle| \frac{0}{A_1} \right),$$

*dove* $D' = (D^{(1)} \,|\, 0 \,|\, \dots \,|\, 0)$.

(²) Cfr. in particolare: S. Cherubino – *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica* – [Rend. Acc. Lincei, Vol. XXXIII, serie 6ª, 1936] Note I e II.

Essendo $D = (D^{(1)} | D^{(2)} | \dots | D^{(m)})$ poniamo

$$E_m = D^{(m)}; E_{m-1} = D^{(m-1)} + A_1 E_m; E_i = D^{(i)} + A_1 E_{i+1}; (1 \leq i < m)$$

$$E = (E_2 | E_3 | \dots | E_m | 0) ,$$

e trasformiamo $A$ con

$$F = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -E & I_{n-m} \end{array}\right) : \; F^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline E & I_{n-m} \end{array}\right) ,$$

otteniamo

$$FAF^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -E & I_{n-m} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline D & A \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline E & I_{n-m} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline D + A_1 E - EM & A_1 \end{array}\right) .$$

Osserviamo ora che

$$EM = (0 | E_2 | \dots | E_m)$$

$$A_1 E = (A_1 E_2 | A_1 E_3 | \dots | A_1 E_m | 0)$$

$$A_1 E - EM = (A_1 E_2 | A_1 E_3 - E_2 | \dots | A_1 E_m - E_{m-1} | -E_m) =$$

$$= (A_1 E_2 | -D^{(2)} | \dots | -D^{(m-1)} | -D^{(m)}) ,$$

quindi

$$D + A_1 E - EM = (D^{(1)} + A_1 E_2 | 0 | \dots | 0) = (E_1 | 0 | \dots | 0) .$$

Ponendo $D' = D + A_1 E - EM$ la $F$ trasforma la $A$ nella

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline D' & A_1 \end{array}\right)$$

con che il lemma è dimostrato.

**2.** - LEMMA I bis. — In maniera perfettamente analoga si dimostra che, *se la $A$ ha la forma*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1' & 0 \\ \hline D_1 & M^* \end{array}\right)$$

*operando, anzichè sulle colonne, sulle righe, si può trasformarla razionalmente nella*

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A_1' & 0 \\ \hline D_1' & M^* \end{array}\right)$$

dove

$$D_1' = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline D'_{(m)} \end{array} \right\| .$$

**3.** - Lemma II. — *Se la matrice* $A = \| a_{ij} \| (ij = 1, 2, \ldots, n)$ *ha la forma*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right),$$

*dove* $M_1$, $M_2$ *sono del tipo noto e di ordine* $m_1$, $m_2$ $(m_1 \geq m_2)$, *si può trasformarla razionalmente nella*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & R \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right) \qquad R = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline R_{(m_1)} \end{array} \right\| ,$$

*dove* $R_{(m_1)} = (-1)^{m_1} (r_{m_2}, r_{m_2 - 1}, \ldots, r_2, r_1)$ *ed* $r_1 x^{m_2 - 1} + r_2 x^{m_2 - 1} + \ldots + r_{m_2 - 1} x + r_{m_2} = R(x)$ *è il resto della divisione* $f_1(x) = (-1)^{m_1} | M_1 - x I |$ *per* $f_2(x) = (-1)^{m_2} | M_2 - x I |$.

Poniamo

$$\begin{array}{llllll}
N_1 = (-a^{(1)}_{m_1}, & -a^{(1)}_{m_1 - 1}, & - \ldots & , -a^{(1)}_2, & -a^{(1)}_1) & \\
N_2 = (-a^{(2)}_{m_2}, & -a^{(2)}_{m_2 - 1}, & - \ldots & , -a^{(2)}_2, & -a^{(2)}_1) & \\
N^{(2)}_2 = (0, & -a^{(2)}_{m_2}, & - \ldots & , -a^{(2)}_3, & -a^{(2)}_2) & \\
N^{(i)}_2 = (0, \ldots, 0, & -a^{(2)}_{m_2}, \ldots, & & -a^{(2)}_{i-1}, & -a^{(2)}_i) & (i \leq m_2) \\
N^{(j)}_2 = (0, \ldots \ldots \ldots & & & & 0), & (j > m_2)
\end{array}$$

ed ancora

$$V_1 = N_2$$

$$V_2 = N_2^{(2)} - a_1^{(2)} N_2 = N_2^{(2)} - a_1^{(2)} V_1$$

$$V_i = N_2^{(i)} - a_1^{(2)} V_{i-1} - a_2^{(2)} V_{i-2} - \dots - a_{i-1}^{(2)} V_1 ,$$

essendo $a_i^{(2)} = 0$ per $i > m_2$. Da queste ultime si ha

$$N_2 = V_1$$

$$N_2^{(2)} = a_1^{(2)} V_1 + V_2$$

$$N_2^{(i)} = a_{i-1}^{(2)} V_1 + a_{i-2}^{(2)} V_2 + \dots + a_1^{(2)} V_{i-1} + V_i ,$$

che si compendiano nell' unica relazione

$$\left\| \begin{array}{c} N_2 \\ \hline N_2^{(2)} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline N_2^{(i)} \end{array} \right\| = P_i \left\| \begin{array}{c} V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline V_i \end{array} \right\| \qquad P_i = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1^{(2)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{i-2}^{(2)} & a_{i-3}^{(2)} & \dots & 1 & 0 \\ a_{i-1}^{(2)} & a_{i-2}^{(2)} & \dots & a_1^{(2)} & 1 \end{array} \right\| .$$

Ricordando la forma di $M_2$ si ha

$$N_2^{(i)} M_2 = N_2^{(i+1)} - a_i^{(2)} N_2 = N_2^{(i+1)} - a_i^{(2)} V_1 ,$$

e da questa segue subito

$$V_i = V_{i-1} M_2 ;$$

infatti la cosa è immediata per $i = 2$ e per induzione si dimostra per $i > 2$. Poniamo

$$H_i = (\overset{1}{0}, \dots, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{0}, \dots, \overset{m_2}{0}) ,$$

quindi

$$H_i M_2 = H_{i+1} \quad (1 \leq i < m_2)$$
$$H_{m_2} M_2 = N_2 = V_1 \ ,$$

$$W_t = \left\| \begin{array}{c} H_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{m_2} \\ \hline V_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline V_t \end{array} \right\| , \quad t = m_1 - m_2$$

e trasformiamo $A$ con

$$K = \left( \begin{array}{c|c} I_1 & -W_t \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right), \quad K^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} I_1 & W_t \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right),$$

otteniamo

$$K A K^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} I_1 & -W_t \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} I_1 & W_t \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right) =$$
$$= \left( \begin{array}{c|c} M_1 & M_1 W_t - W_t M_2 \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} M_1 & R \\ \hline 0 & M_2 \end{array} \right),$$

avendo posto $R = M_1 W_t - W_t M_2$.

Ricordando la forma di $M_1$ e $M_2$ si ha

$$M_1 W_t = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{m_2} \\ \hline V_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline V_t \\ \hline N_1 W_t \end{array} \right\| , \quad W_t M_2 = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{m_2} \\ \hline V_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline V_t \\ \hline V_{t+1} \end{array} \right\| ,$$

quindi

$$R = M_1 W_t - W_t M_2 = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline N_1 W_t - V_{t+1} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline R_{(m_1)} \end{array} \right\| ,$$

avendo posto

$R_{(m_1)} = N_1 W_t - V_{t+1} = (-a^{(1)}_{m_1}, -a^{(1)}_{m_1-1}, \dots, -a^{(1)}_1, -1)\, W_{t+1}$ ove

$$W_{t+1} = \left\| \begin{array}{c} H_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{m_2} \\ \hline V_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline V_{t+1} \end{array} \right\| .$$

Per dimostrare che l' $m_2$ - complesso $R_{(m_1)}$ è formato coi coefficienti di $R(x)$ moltiplicati per $(-1)^{m_1}$ basta osservare quanto segue. Detto $Q(x)$ il quoziente di $f_1(x)$ per $f_2(x)$, tra i coefficienti di $f_1(x)$, $f_2(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ esistono $m_1 + 1$ relazioni che si compendiano brevemente nella relazione

$$(r_{m_2}, r_{m_2-1}, \dots, r_1, q_t, \dots, q_1, q_0) \, . \, D = (a^{(1)}_{m_1}, a^{(1)}_{m_1-1}, \dots, a_1, 1) ,$$

essendo
$$D = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -N & P_{t+1} \end{array} \right) ,$$

ove

$$N = \left\| \begin{array}{c} N_2 \\ \hline N_2^{(2)} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline N_2^{(t+1)} \end{array} \right\| ,$$

e $P_{t+1}$ ha il solito significato. Poichè $|D| = 1$, la relazione precedente si può anche scrivere

$$(r_{m_2}, r_{m_2-1}, \ldots, r_1, q_t, \ldots, q_1, q_0) = (a^{(1)}_{m_1}, \ldots, a^{(1)}_1, 1)\, D^{-1},$$

$$D^{-1} = \left(\frac{I}{P^{-1}_{t+1} N} \middle| \frac{0}{P^{-1}_{t+1}}\right),$$

ma per le relazioni tra le $N^{(i)}_2$ e le $V_i$ si ha

$$P^{-1}_{t+1} N = \left\| \begin{array}{c} V_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline V_{t+1} \end{array} \right\|,$$

quindi posto

$$P = \left(\frac{0}{P^{-1}_{t+1}}\right); \quad D^{-1} = (W_{t+1} \mid P),$$

l'ultima relazione si può spezzare nelle due

$$(r_{m_2}, r_{m_2-1}, \ldots, r_1) = (a^{(1)}_{m_1}, a^{(1)}_{m_1-1}, \ldots, a^{(1)}_1, 1)\, W_{t+1}$$

$$(q_t, q_{t+1}, \ldots, q_1, q_0) = (a^{(1)}_{m_1}, a^{(1)}_{m_1-1}, \ldots, a^{(1)}_1, 1)\, P.$$

La prima di queste ci dice appunto che l'$m_2$- complesso $R_{(m_1)}$ moltiplicato per $(-1)^{m_1}$ coincide con l'$m_2$- complesso $(r_{m_2}, r_{m_2-1}, \ldots, r_1) \cdot c \cdot v \cdot d$.

## § 2. - **Riduzione a forma canonica.**

**4.** - Vediamo ora il procedimento per calcolare la forma canonica.

In primo luogo usando solo il primo lemma si può ottenere per la matrice $A$ la forma seguente

$$(1) \qquad A = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} M_1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & M_2 & & 0 \\ \hline & & \ddots & \\ \hline 0 & 0 & & M_h \end{array} \right\| , \quad (h \geq 1)$$

che in generale però non è la forma canonica, come vedremo in seguito. Basta per questo far vedere come si ottiene la prima matrice $M_1$ cioè per la $A$ la forma

$$(2) \qquad A = \left( \begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right), \quad B_1 = \| a_{r,s} \| ,$$

$$(r, s = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, n)$$

poichè basta poi operare su $B_1$ come su $A$ per ottenere $M_2$ e così di seguito finchè non si sia ottenuta la (1).

Se nella $A$ tutti i termini fuori della diagonale principale sono nulli, cioè $a_{r,s} = 0$ per $r \neq s$, essa ha già la forma (1) essendo $h = n$ ed $M_i$ di primo ordine $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Supponiamo quindi che in $A$ vi sia un elemento $a_{i,k} \neq 0$ $i \neq k$ e con opportuni scambi fra righe e fra colonne portiamolo al posto $(1, 2)$, in modo che $a_{1,2} \neq 0$. Indicando allora con $A_{(1)}$ la prima riga di $A$ cioè $A_{(1)} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n})$ e con $H_i$ il solino $n$- complesso $H_i = (\overset{1}{0}, \ldots, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{0}, \ldots, \overset{n}{0})$ trasformiamo $A$ con

$$T_1 = \left\| \begin{array}{c} H_1 \\ \hline A_{(1)} \\ \hline H_3 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_n \end{array} \right\| , \quad |T_1| = a_{1,2} \neq 0$$

otteniamo

$$T_1 A T_1^{-1} = A' = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline A'_{(2)} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline A'_{(n)} \end{array} \right\| ,$$

come si verifica facilmente.

In generale supponiamo che la $A$ abbia questa forma

$$A'' = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{s-1} \\ \hline A''_{(s-1)} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline A''_{(n)} \end{array} \right\| , \quad (0 < s \leq n)$$

e che in $A''_{(s-1)}$ vi sia un elemento $a_{s-1,\bar{k}} \neq 0$ $(\bar{k} \geq s)$. Con opportuni scambi fra colonne e fra righe possiamo portare $a_{s-1,\bar{k}}$ al posto $(s-1, s)$, in modo che $a_{s-1,s} \neq 0$. Trasformiamo quindi $A''$ con

$$T_2 = \left\| \begin{array}{c} H_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{s-1} \\ \hline A''_{(s-1)} \\ \hline H_{s+1} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_n \end{array} \right\| , \quad |T_2| = a_{s-1,s} \neq 0$$

otteniamo

$$(3) \qquad T_2 A'' T_2^{-1} = A''' = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_s \\ \hline A'''_{(s)} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline A'''_{(n)} \end{array} \right\| .$$

Una trasformazione analoga alla (3) si può eseguire operando sulle colonne, cioè a destra, quando la $A$ ha la forma seguente

$$A^* = (A^{(1)} | \dots | A^{(s+1)} | H^{(s+1)} | \dots | H^{(n-1)}) ,$$

essendo $A^{(i)}$ l' $n$ - complesso verticale uguale all' $i^{ma}$ colonna di $A^*$ e $H^{(i)} = (H_i)_{-1}$, e in $A^{(s+1)}$ vi è un elemento $a_{\overline{i}, s+1} \neq 0$ $(\overline{i} < s+1)$. Infatti portato questo elemento al posto $(s, s+1)$, in modo che $a_{s, s+1} \neq 0$ e posto

$$T_3 = (H^{(1)} | \dots | H^{s-1} | A^{(s+1)} | H^{(s+1)} | \dots | H^{(n)}) , \; |T_3| = a_{s, s+1} \neq 0$$

trasformando $A^*$ con $T_3$ a destra otteniamo

$$(4) \qquad T_3^{-1} A^* T_3 = A^{**} = (A_1^{(1)} | \dots | A_1^{(s)} | H^{(s)} | \dots | H^{(n-1)}) .$$

La (3) e la (4) sono le due trasformazioni fondamentali per il nostro calcolo.

**5.** - Applicando successivamente la (3) si determina un indice $m$ in modo che la $A$ abbia la forma

$$A_1 = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_m \\ \hline A_{(m)} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline A_{(n)} \end{array} \right\| ,$$

ed in $A_{(m)}$ sia $a_{m,k} = 0$ per $k > m$. La $A_1$ si può scrivere

$$A_1 = \left(\frac{M}{D}\middle|\frac{0}{B}\right),$$

ove

$$B = \|a_{r,s}\| \qquad (r, s = m+1, \dots, n)$$

$$D = \|a_{r,s}\| \qquad (r = m+1, \dots, n;\ s = 1, 2, \dots, m)$$

Se $D = 0$ $A_1$ ha la forma (2). Se $D \neq 0$ si applica il primo lemma e la $D$ o si annulla od assume la forma

$$D = (D^{(1)} | 0 | \dots | 0) .$$

Nel primo caso si ha ancora la forma (2). Nel secondo determinata la $P_1$ che trasforma $M$ in $M^*$ trasformiamo $A_1$ con

$$P = \left(\frac{P_1}{0}\middle|\frac{0}{I}\right), \quad P^{-1} = \left(\frac{P_1^{-1}}{0}\middle|\frac{0}{I}\right),$$

$$P A_1 P^{-1} = \left(\frac{P_1}{0}\middle|\frac{0}{I}\right) \cdot \left(\frac{M}{D}\middle|\frac{0}{B}\right) \cdot \left(\frac{P_1^{-1}}{0}\middle|\frac{0}{I}\right) = \left(\frac{P_1 M P_1^{-1}}{D P^{-1}}\middle|\frac{0}{B}\right) =$$

$$= \left(\frac{M^*}{D}\middle|\frac{0}{B}\right) = A_1^* ,$$

che si può anche scrivere con soli scambi di righe e di colonne.

$$A_1^* = \left(\frac{B}{0}\middle|\frac{D}{M^*}\right) = (A^{(1)} | A^{(2)} | \dots | A^{(n-m)} | H^{(n-m)} | \dots | H^{(n-1)}) .$$

Ricordando che $D^{(1)} \neq 0$ e quindi in $A^{(n-m)}$ v'è almeno un elemento $a_{\bar{i}, n-m} \neq 0$, $\bar{i} < n - m$, alla $A_1^*$ si può applicare la trasformazione (4) successivamente fino ad ottenere un nuovo indice $m' > m$ tale che sia

$$A_2^* = (A^{(1)} | A^{(2)} | \dots | A^{(n-m')} | H^{(n-m')} | \dots | H^{(n-1)}) ,$$

ed in $A^{(n-m')}$ sia $a_{i, n-m'} = 0$ per $i < n - m$.

$A_2^*$ ha così la forma

$$A_2^* = \left(\frac{B'}{D'}\middle|\frac{0}{M_1^*}\right) .$$

Se $D' = 0$ trasformando $M_1^*$ nella corrispondente $M'$ si avrebbe la forma (2) altrimenti si applica il lemma I bis e se con questo $D'$ si annulla si ha ancora la forma (2). Se $D'$ non si annulla assume la forma

$$D' = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline D'_{(m')} \end{array} \right\| .$$

Posto allora

$$P_2 M_1^* P_2^{-1} = M' \quad , \quad P_3 = \left(\frac{I}{0}\middle|\frac{0}{P_2}\right) ,$$

si ha

$$P_3 A_2^* P_3^{-1} = \left(\frac{I}{0}\middle|\frac{0}{P_2}\right) \cdot \left(\frac{B'}{D'}\middle|\frac{0}{M_1^*}\right) \cdot \left(\frac{I}{0}\middle|\frac{0}{P_2^{-1}}\right) =$$

$$= \left(\frac{B'}{P_2 D'}\middle|\frac{0}{P_2 M_1^* P_2^{-1}}\right) = \left(\frac{B'}{D'}\middle|\frac{0}{M'}\right) = A_2 ,$$

che si può anche scrivere con soli scambi di righe e di colonne

$$A_2 = \left(\frac{M_1'}{0}\middle|\frac{D'}{B'}\right) = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{m'} \\ \hline A_{(m')} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline A_n \end{array} \right\| .$$

In $A_{(m')}$, essendo $D'_{(m')} \neq 0$, v'è almeno un elemento $a_{m',\overline{k}} \neq 0$ $\overline{k} > m'$, si può perciò applicare ad $A_2$ la trasformazione (3).

6. - Da quanto abbiamo detto risulta ormai chiaro come può determinarsi la forma (2). Infatti, applicata finchè era possibile la trasformazione (3), abbiamo ottenuto la $A_1$ che poteva coincidere colla forma (2) se $D = 0$. Se $D \neq 0$ si è applicato il lemma I e, se con questo la $D$ non si annullava, il che ci avrebbe ricondotti alla (2), abbiamo veduto che si poteva con opportune trasformazioni ridurci ad applicare la (4) con la quale si è determinata la $A_2^*$. In questa il nuovo indice $m'$ era maggiore di $m$, cioè l'ordine di $M_1^*$ maggiore di quello di $M$.

Sulla $A_2^*$ abbiamo ragionato come sulla $A_1$ ed abbiamo veduto che se $D' = 0$ si otteneva ancora la (2), se $D' \neq 0$, ma si annullava con il lemma I bis, si otteneva ancora la (2), se $D'$ non si annullava nemmeno col lemma I bis, ci siamo ricondotti a poter applicare ancora la (3) e quindi a ripetere nell'ordine preciso il calcolo fatto prima.

Ora però ogni volta che si applica la (3) o la (4) l'ordine delle $M$ aumenta, ma questo non può essere maggiore di $n$, quindi si presenterà certamente uno dei due casi, o determineremo una forma del tipo (2), oppure $M$ diverrà di ordine $n$, cioè si avrà $A = M$, che è già una forma del tipo (1).

Se si ottiene la (2), come da questa si ottenga la forma (1) è cosa troppo ovvia per insistervi.

7. - Vediamo piuttosto, poichè la (1) non è in generale la forma canonica, come si arrivi a determinare questa. Intanto la (1) sarebbe la forma canonica se in essa $|M_i - xI|$ $(0 < i < r)$ fosse divisibile per $|M_{i+j} - xI|$ $(0 < j < r - i)$. Facciamo quindi vedere come questo si possa ottenere applicando il lemma II.

In primo luogo possiamo supporre che nella (1) gli ordini delle $M_i$ siano non crescenti, poichè in caso contrario si possono ordinare queste in modo che ciò avvenga.

Sia allora $M_{\overline{i}}$ la prima delle $M$ il cui determinante caratteristico non divide quello di $M_1$ e portiamo $M_{\overline{i}}$ al secondo posto se già non v'è. Considerando le prime due $M$, abbiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right),$$

A questa, per le ipotesi fatte, è applicabile il lemma II in modo da ottenere la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1 & R \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right), \quad R = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline 0 \\ \hline R_{(m_1)} \end{array} \right\|, \quad (R_{(m_1)} \neq 0)$$

che si scrive anche

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1 & R \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c} H_2 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline H_{m_1} \\ \hline A_{(m_1)} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline A_{(m_1+m_2)} \end{array} \right\|.$$

In $A_{(m_1)}$, poichè $R_{(m_1)} \neq 0$, v'è almeno un $a_{m\ ,\bar{k}} \neq 0$ $(\bar{k} > m_1)$, è quindi applicabile la trasformazione (3) un certo numero $\geq 1$ di volte anzi si potranno applicare tutti i calcoli già esposti fino ad ottenere od una sola $M$ od una forma analoga alla (2), cioè

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1' & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right),$$

e da questa, con procedimenti già noti, la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1' & 0 \\ \hline 0 & M_2' \end{array}\right).$$

Osserviamo ora che, avendo applicato almeno una volta la trasformazione (3), l'ordine di $M_1'$ è maggiore di quello di $M_1$ e quello di $M_2'$ minore di quello di $M_2$.

Se $|M_1' - xI|$ non è divisibile per $|M_2' - xI|$ operando ancora nel modo ora esposto, si ottiene dalla forma ultima o una sola $M$ o la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1'' & 0 \\ \hline 0 & M_2'' \end{array}\right),$$

nella quale ancora l'ordine di $M_1''$ è maggiore di quello di $M_1'$ e quello di $M_2''$ minore di quello di $M_2'$.

**8.** - Proseguendo così dopo un certo numero $s \geq 1$ di volte si deve verificare certamente uno dei due casi, od otterremo dalle $M_1$ $M_2$ una sola $M$ oppure ne avremo due

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1^{(s)} & 0 \\ \hline 0 & M_2^{(s)} \end{array}\right),$$

tali che $|M_1^{(s)} - xI|$ sia divisibile per $|M_2^{(s)} - xI|$.

Ritornando alla (1) si porrà $M_2^{(s)}$ al posto che le conviene perchè gli ordini delle $M_i$ siano ancora non crescenti. Poi se v'è ancora qualche $M_i$ il cui determinante caratteristico non divida quello della nuova $M_1$, cioè di $M_1^{(s)}$, sulla prima di queste si opererà in modo perfettamente analogo a quello ora esposto. Questo procedimento si userà fino a che vi sia qualche $M_i$ il cui determinante caratteristico non divida quello di $M_1$. Che si debba giungere alla fine è presto provato, perchè, ogni volta che si applica il lemma II ed in conseguenza almeno una volta la trasformazione (3), l'ordine di $M_1$ aumenta, ma $M_1$ non può avere ordine maggiore di $n$, quindi al massimo dopo $n - m_1$ volte $M_1$ viene ad avere ordine $n$, cioè si ha $A = M_1$.

In generale si otterrà dunque una forma analoga alla (1) nella quale la prima delle $M$ che indicheremo con $M_0$ ha il determinante caratteristico divisibile per quello di $M_i$ $(i > 0)$. Operando su $M_2 M_3 \ldots$ come su $M_1$ si ottiene in modo ormai chiaro la forma seguente per la $A$.

$$C = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} M_0 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & M_1 & & 0 \\ \hline & & \ddots & \\ \hline 0 & 0 & & M_r \end{array} \right\| ,$$

nella quale $|M_i - x\,I|$ è divisibile per $|M_{i+j} - x\,I|$ $(0 \leq i < r;$ $0 < j \leq r - i)$.

**9.** - La $C$ è la forma canonica perchè è subito visto che i $M.\,C.\,D.$ dei minori di ordine $n - r - i$ $(0 < i < n - r)$ della $(C - x\,I)$ e per conseguenza di $(A - x\,I)$ sono delle costanti mentre il $M.\ C.\ D.$ di quelli di ordine $n - r$ è $|M_r - x\,I|$ di quelli di ordine $n - r + 1$ è $|M_r - x\,I| \times |M_{r-1} - x\,I|$ e in generale di quelli di ordine $n - r + j$ $(0 \leq j \leq r)$ è $|M_r - x\,I| \times$ $\times |M_{r-1} - x\,I| \times \ldots \times |M_{r-j} - x I|$. Quindi i divisori elementari di $(A - x\,I)$ essendo i rapporti fra questi $M.\,C.\,D.$ sono i seguenti; i primi $n - r - 1$ sono delle costanti l'$(n - r)^{\text{mo}}$ $D.\ E.$ è $|M_r - x\,I|$ l'$(n - r + 1)^{\text{mo}}$ è $|M_{r-1} - x\,I|$ e in generale l'$(n - r + j)^{\text{mo}}$ $D.\ E.$ $(0 \leq j \leq r)$ è $|M_{r-j} - x\,I|$.

In particolare $|M_0 - x\,I|$ come rapporto fra $|A - x\,I|$ ed il massimo comun divisore dei minori di ordine $n - 1$ rappresenta il primo membro dell'equazione minima di $A$.