RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI BERETTA

Sugli autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee del quarto ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 8 (1937), p. 47-82

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__47_0>

SUGLI AUTOVALORI PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE DEL QUARTO ORDINE

di LUIGI BERETTA *a Firenze* *

Sunto. – L' A. studia gli integrali dell' equazione:

$$[\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda\,[A(x)\, y(x)]'' + \lambda\,[B(x)\, y(x)]' + \lambda\, C(x)\, y(x) = 0$$

non identicamente nulli, che si annullano in quattro punti distinti prescritti, e assegna dei casi in cui è assicurata l' esistenza di almeno un valore oppure di infiniti valori del parametro λ, cui corrispondono integrali soddisfacenti la condizione dichiarata.

Scopo del presente lavoro è *lo studio dell' esistenza di autovalori per un' equazione differenziale lineare omogenea del quarto ordine, cui corrispondono integrali dell' equazione che si annullano in quattro punti prefissati.*

Il problema dell' esistenza di autovalori per le equazioni differenziali è stato già risolto in alcuni casi. G. SANSONE ha provato l' esistenza di infiniti autovalori per le equazioni del terzo e quarto ordine se i coefficienti sono costanti, teorema che, con l' aggiunta di alcune condizioni, ha dimostrato valido per le equazioni di qualsiasi ordine (1). Risultati analoghi sono stati

* Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Università di Firenze.

(1) Cfr. G. SANSONE: *a) Il teorema di oscillazione per le equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti* [Rend. Ist. Lombardo di Sc. e Lett.; LXII; (1929)]; – *b) Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali ordinarie del quarto ordine, lineari omogenee a coefficienti costanti* [Ibidem; LXIV; (1931); – *c) Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali ordinarie lineari omogenee a coefficienti costanti* [Rend. Circ. Matem. Palermo; T LV; (1931)].

ottenuti per le equazioni *autoaggiunte* (²); un nuovo metodo per lo studio del problema è stato poi trovato dal WINANTS (³). Infine nel caso dell' equazione del terzo ordine:

$$[\vartheta(x)\, y'(x)]'' + \lambda\,[A(x)\, y(x)]' + \lambda B(x)\, y(x) = 0,$$

G. SANSONE ha trovato casi in cui vi è almeno un autovalore e casi in cui ve ne sono infiniti e tutti reali (⁴).

In questo lavoro *si studia l'equazione:*

$$[\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda\,[A(x)\, y(x)]'' + \lambda\,[B(x)\, y(x)]' + \lambda\, C(x)\, y(x) = 0;$$

nella prima parte *si trasforma il problema degli autovalori di questa equazione* [valori di λ cui corrispondono integrali che si annullano in quattro punti prefissati] *nel problema degli autovalori di un'equazione integrale omogenea di seconda specie e se ne studia il nucleo;* nella seconda parte *si trovano due casi di equazioni del tipo proposto che ammettono almeno un autovalore;* nella terza parte *si trova una classe di equazioni del tipo proposto che ammettono infiniti autovalori e tutti reali.*

PRIMA PARTE

Trasformazione del problema degli autovalori dell' equazione differenziale

$$(1)\quad [\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda\,[A(x)\, y(x)]'' + \lambda[B(x) y(x)]' + \lambda C(x)\, y(x) = 0,$$

(²) Cfr. G. MAMMANA – *Autovalori ed autosoluzioni per la più generale equazione differenziale ordinaria* [Annali R. Sc. Norm. Sup. di Pisa XV (Sc. fis. e nat.), 1927].

(³) Cfr. M. WINANTS – *Sur l'équation de Fredholm généralisée* – [Bulletin des Sciences Mathématiques; 1930, T. LIV, p. 209; p. 284].

(⁴) Cfr. G. SANSONE – *Sugli autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine* [Questi Rendiconti: I (1930) e III (1932)].

nel problema degli autovalori dell' equazione integrale

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt,$$

e studio del nucleo $K(x, t)$.

§ 1. – L' equazione (1) non è in generale autoaggiunta.

Siccome il problema dell' esistenza di autovalori per le equazioni *autoaggiunte* è già stato risolto in senso affermativo da G. Mammana, ci dobbiamo innanzitutto assicurare che nei casi da noi studiati non si tratta, in generale, di equazioni autoaggiunte. Ma ciò è facile a provarsi; infatti la più generale equazione autoaggiunta del quarto ordine deve avere la forma:

$$[\alpha(x)\, y''(x)]'' + [\beta(x)\, y'(x)]' + \gamma(x)\, y(x) = 0. \tag{2}$$

Scrivendo che la (1) deve essere identica alla (2) abbiamo, svolgendo le derivazioni:

$$\vartheta(x) = \text{costante}, \quad B(x) = -A'(x),$$

che *rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti perchè la* (1) *sia autoaggiunta.*

§ 2. - Equazione integrale cui soddisfano le soluzioni dell' equazione (1) nulle in a, c, d, b.

Nella (1) supponiamo $\vartheta'''(x)$, $A''(x)$, $B'(x)$, $C(x)$ funzioni continue della x in (α, β), $\vartheta(x) > 0$ in (α, β), λ costante, e siano a, b, c, d, con $a < c < d < b$ quattro punti di (α, β); vogliamo studiare se esistono valori speciali di λ (autovalori), per i quali la (1) ammette un integrale $y(x)$ non identicamente nullo, che si annulli nei quattro punti fissati a, b, c, d.

Se $y(x)$ soddisfa la (1) soddisfa anche il sistema

$$(1') \qquad [\vartheta(x)\, y'(x)]' + u(x) = 0$$

$$(1)'' \qquad u''(x) = \lambda\,[A(x)\, y(x)]'' + \lambda\,[B(x)\, y(x)]' + \lambda\, C(x)\, y(x),$$

e viceversa. Le soluzioni della (1′) che si annullano nei punti a, b sono date tutte dall'espressione

$$(2) \qquad y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\ \xi)\, u(\xi)\, d\xi\,,$$

dove con $G(x,\ \xi)$ abbiamo indicato la così detta funzione di Green relativa all'equazione

$$[\vartheta(x)\, y'(x)]' = 0\,,$$

che sappiamo esser così definita [per x e ξ variabili in a, b)]

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{per} \quad x \leq \xi \qquad G(x,\ \xi) = \dfrac{\psi(b,\xi)\,\psi(x,a)}{\psi(b,a)}\,, \\[2ex] \text{per} \quad x \geq \xi \qquad G(x,\ \xi) = \dfrac{\psi(\xi,a)\,\psi(b,x)}{\psi(b,a)}\,, \end{cases}$$

ove con $\psi(m,l)$ [m, l variabili in (a,b)] indichiamo la funzione

$$\psi(m,l) = \int_l^m \frac{dx}{\vartheta(x)}\,.$$

Dalla (1″) si ha poi

$$u(x) = \lambda A(x)\, y(x) + \lambda \int_a^x B(x)\, y(x)\, dx +$$

$$+ \lambda \int_a^x (x - t)\, C(t)\, y(t)\, dt + c_1 x + c_2$$

[c_1, c_2 costanti], e sostituendo nella (2):

$$y(x) = c_1 \int_a^b G(x, \xi)\, \xi\, d\xi + c_2 \int_a^b G(x, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, A(\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, d\xi \int_a^\xi B(t)\, y(t)\, dt +$$

$$+ \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, d\xi \int_a^\xi (\xi - t)\, C(t)\, y(t)\, dt\,.$$

Dissociando i termini nell'ultimo integrale e applicando agli ultimi tre termini dell'epressione così ottenuta la formula di Dirichlet, si ottiene

$$y(x) = c_1 \int_a^b G(x, \xi)\, \xi\, d\xi + c_2 \int_a^b G(x, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \lambda \int_a^b G(x, t)\, A(t)\, y'(t)\, dt + \lambda \int_a^b B(t)\, y(t)\, dt \int_t^b G(x, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \lambda \int_a^b C(t)\, y(t)\, dt \int_t^b G(x, \xi)\, \xi\, d\xi - \lambda \int_a^b C(t)\, y(t)\, t\, dt \int_t^b G(x, \xi)\, d\xi\,.$$

E ponendo

$$(4') \qquad \int_t^b G(x, \xi)\, d\xi = H(x, t)$$

$$(4'') \qquad \int_t^b G(x, \xi)\, \xi\, d\xi = H_1(x, t)\,,$$

si ha

$$(5)\qquad y(x) = c_1 H_1(x, a) + c_2 H(x, a) + \lambda \int_a^b F(x, t)\, y(t)\, dt\,,$$

dove è

$$(6)\qquad \begin{aligned} F(x, t) = A(t)\, G(x, t) + [B(t) - t\, C(t)]\, H(x, t) &+ \\ + C(t)\, H_1(x, t)&\,. \end{aligned}$$

La (5) ci dà tutte e sole le soluzioni dell' equazione (1) che si annullano in a e b. Imponendo ora a $y(x)$ di annullarsi in c e d abbiamo il sistema:

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} c_1 H_1(c, a) + c_2 H(c, a) &= -\lambda \int_a^b F(c, t)\, y(t)\, dt \\ c_1 H_1(d, a) + c_2 H(d, a) &= -\lambda \int_a^b F(d, t)\, y(t)\, dt\,. \end{aligned} \right.$$

Il determinante del sistema:

$$\Delta = H_1(c, a)\, H(d, a) - H_1(d, a)\, H(c, a)$$

è diverso da zero, altrimenti avrebbe soluzione il sistema omogeneo (che si ottiene per $\lambda = 0$), e quindi l' equazione

$$(8)\qquad [\vartheta(x)\, y'(x)]''' = 0\,,$$

(che si ottiene dalla (1) facendo $\lambda = 0$), avrebbe una soluzione che si annulla in quattro punti; ma ciò è assurdo [infatti dalla (8) segue che $\vartheta(x)\, y'(x)$ è un polinomio di grado non superiore al secondo, quindi $y'(x)$ si può annullare in due punti al massimo e $y(x)$ non può annullarsi in quattro punti].

Risolvendo il sistema (7) rispetto a c_1 e c_2, e sostituendo nella (5) abbiamo che le soluzioni della (1) che si annullano nei quattro punti a, b, c, d sono date tutte e sole dall'espressione

$$(9)\quad y(x)=\lambda\int_a^b F(x,t)\,y(t)\,dt+\lambda\frac{H(c,a)\,H_1(x,a)}{\Delta}\int_a^b F(d,t)\,y(t)\,dt-$$

$$-\lambda\frac{H(d,a)\,H_1(x,a)}{\Delta}\int_a^b F(c,t)\,y(t)\,dt+$$

$$+\lambda\frac{H(x,a)\,H_1(d,a)}{\Delta}\int_a^b F(c,t)\,y(t)\,dt-$$

$$-\lambda\frac{H(x,a)\,H_1(c,a)}{\Delta}\int_a^b F(d,t)\,y(t)\,dt\,.$$

Posto

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} K(x,t)=F(x,t)&+\frac{H(x,a)\,H_1(d,a)-H(d,a)H_1(x,a)}{H_1(c,a)\,H(d,a)-H_1(d,a)\,H(c,a)}F(c,t)+\\ &+\frac{H(c,a)\,H_1(x,a)-H(x,a)\,H_1(c,a)}{H_1(c,a)\,H(d,a)-H_1(d,a)\,H(c,a)}F(d,t)\,,\end{aligned}\right.$$

la (9) diventa

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt\,.$$

Poniamo ora

$$(11)\qquad \varphi(x)=\psi(x,a)=\int_a^x\frac{d\xi}{\vartheta(\xi)}\,,$$

$$(12)\qquad h(x,t)=2\,\varphi(b)\,[H(x,a)\,H_1(t,a)-H_1(x,a)\,H(t,a)]\,.$$

Se ora nella (10) moltiplichiamo tutti i termini per

$$h(c,d)=2\,\varphi(b)\,[H(c,a)\,H_1(d,a)-H_1(c,a)\,H(d,a)]\,,$$

il nucleo $K(x,t)$ risulta così definito, nel quadrato Q di lato $(b-a)$,

$$(13) \qquad h(c,d)\,K(x,t) = h(c,d)\,F(x,t) - h(x,d)\,F(c,t) - \\ - h(c,x)\,F(d,t)\,.$$

Siccome il ragionamento è invertibile, abbiamo dimostrato il teorema:

Le soluzioni dell' equazione differenziale (1) *che si annullano nei quattro punti prefissati a, b, c, d sono tutte e sole le soluzioni dell' equazione integrale lineare omogenea di seconda specie*

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt\,,$$

il cui nucleo $K(x,t)$ resta definito dalla (13).

§ 3. - Espressione integrale delle funzioni $h(x,t)$, $F(x,t)$ colle quali è definito il nucleo $K(x,t)$.

Poniamo [v. anche (11) del § 2]:

$$(1) \qquad \varphi(x) = \int_a^x \frac{d\xi}{\vartheta(\xi)}\,, \quad \omega_1(x) = \int_x^b \frac{\xi\,d\xi}{\vartheta(\xi)}\,, \quad \omega_2(x) = \int_x^b \frac{\xi^2\,d\xi}{\vartheta(\xi)}\,.$$

Allora le (3) del § 2 danno:

$$(2) \qquad \begin{cases} x \leq \xi \quad \varphi(b)\,G(x,\xi) = \varphi(x)\,[\varphi(b) - \varphi(\xi)] = \displaystyle\int_a^x \frac{ds}{\vartheta(s)} \int_\xi^b \frac{dv}{\vartheta(v)} \\ x \geq \xi \quad \varphi(b)\,G(x,\xi) = \varphi(\xi)\,[\varphi(b) - \varphi(x)] = \displaystyle\int_a^\xi \frac{ds}{\vartheta(s)} \int_x^b \frac{dv}{\vartheta(v)}\,. \end{cases}$$

Si ha poi, per $x \leq t$, per la (4)′ del § 2,

$$\varphi(b) H(x, t) = \int_t^b \varphi(b) G(x, \xi) d\xi = \varphi(x) \int_t^b [\varphi(b) - \varphi(\xi)] d\xi =$$

$$= \varphi(x) \varphi(b) (b - t) - \varphi(x) \int_t^b \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \varphi(x) \varphi(b) (b - t) - \varphi(x) [\xi \varphi(\xi)]_t^b + \varphi(x) \int_t^b \frac{\xi}{\vartheta(\xi)} d\xi =$$

$$= \varphi(x) \left[t \{ \varphi(t) - \varphi(b) \} + \int_t^b \frac{\xi}{\vartheta(\xi)} d\xi \right],$$

e per la (1)

$$x \leq t \qquad \varphi(b) H(x, t) = \varphi(x) [t \{ \varphi(t) - \varphi(b) \} + \omega_1(t)] .$$

Operando in modo analogo per $x \geq t$ troviamo:

$$x \geq t \quad \varphi(b) H(x, t) = [\varphi(x) - \varphi(b)] [t \varphi(t) + \omega_1(t)] + \varphi(b) \omega_1(x) .$$

Sostituendo di nuovo le (1) nelle ultime due relazioni trovate abbiamo

$$(3) \quad \begin{cases} x \leq t \quad \varphi(b) H(x, t) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{v - t}{\vartheta(v)} ds\, dv \\[2ex] x \geq t \quad \varphi(b) H(x, t) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^t \frac{s - t}{\vartheta(v)} ds\, dv + \\[2ex] \qquad\qquad + \displaystyle\int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{s - v}{\vartheta(v)} ds\, dv . \end{cases}$$

Si ha poi, per la (4″) del § 2, per $x \leq t$,

$$\varphi(b) H_1(x, t) = \int_t^b \varphi(b)\, G(\underset{x \leq \xi}{x, \xi})\, \xi\, d\xi = \varphi(x) \int_t^b [\varphi(b) - \varphi(\xi)]\, \xi\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 - t^2)\, \varphi(x)\, \varphi(b) - \varphi(x) \int_t^b \varphi(\xi)\, \xi\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 - t^2)\, \varphi(x)\, \varphi(b) - \frac{1}{2}\varphi(x) \int_t^b \varphi(\xi)\, d(\xi^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 - t^2)\, \varphi(x)\, \varphi(b) - \frac{1}{2}\varphi(x) \Big[\varphi(\xi)\, \xi^2 \Big]_{\xi=t}^{\xi=b} + \frac{1}{2}\varphi(x) \int_t^b \frac{\xi^2}{\vartheta(\xi)}\, d\xi,$$

e per la (1)

$$x \leq t \qquad 2\varphi(b) H_1(x, t) = \varphi(x) [t^2 \{\varphi(t) - \varphi(b)\} + \omega_2(t)].$$

Analogamente si trova

$$x \geq t \quad 2\varphi(b) H_1(x, t) = [\varphi(x) - \varphi(b)]\, [t^2 \varphi(t) + \omega_2(t)] + \varphi(b)\, \omega_2(x).$$

Sostituendo di nuovo le (1) nelle due ultime relazioni trovate abbiamo

$$(4) \qquad \begin{cases} x \leq t \quad 2\varphi(b) H_1(x, t) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{v^2 - t^2}{\vartheta(v)}\, ds\, dv \\[2ex] x \geq t \quad 2\varphi(b) H_1(x, t) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^t \frac{s^2 - t^2}{\vartheta(v)}\, ds\, dv + \\[2ex] \qquad\qquad + \displaystyle\int_x^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_t^b \frac{s^2 - v^2}{\vartheta(v)}\, ds\, dv. \end{cases}$$

Per la (6) del § 2 era

$$F(x,t)=A(t)\,G(x,t)+B(t)\,H(x,t)+C(t)\,[H_1(x,t)-t\,H(x,t)],$$

da cui sostituendo le (2), (3), (4) ora trovate si ha:

$$(5)\quad \begin{cases} x\leq t \quad \varphi(b)\,F(x,t)=A(t)\displaystyle\int_a^x\frac{1}{\vartheta(s)}\int_t^b\frac{1}{\vartheta(v)}\,ds\,dv+ \\ \qquad +B(t)\displaystyle\int_a^x\frac{1}{\vartheta(s)}\int_t^b\frac{v-t}{\vartheta(v)}\,ds\,dv+ \\ \qquad +\dfrac{1}{2}C(t)\displaystyle\int_a^x\frac{1}{\vartheta(s)}\int_t^b\frac{(v-t)^2}{\vartheta(v)}\,ds\,dv; \\ x\geq t \quad \varphi(b)\,F(x,t)=A(t)\displaystyle\int_a^t\frac{1}{\vartheta(s)}\int_x^b\frac{1}{\vartheta(v)}\,ds\,dv+ \\ \qquad +B(t)\left[\displaystyle\int_x^b\frac{1}{\vartheta(s)}\int_a^t\frac{s-t}{\vartheta(v)}\,ds\,dv+\int_x^b\frac{1}{\vartheta(s)}\int_t^b\frac{s-v}{\vartheta(v)}\,ds\,dv\right]+ \\ \qquad +\dfrac{1}{2}C(t)\left[\displaystyle\int_x^b\frac{1}{\vartheta(s)}\int_a^t\frac{(t-s)^2}{\vartheta(v)}\,ds\,dv+\right. \\ \qquad \left.+\displaystyle\int_x^b\frac{1}{\vartheta(s)}\int_t^b\frac{(s-t)^2-(v-t)^2}{\vartheta(v)}\,ds\,dv\right]. \end{cases}$$

Dalla (12) del § 2 si ricava

$$\varphi(b)\,h(x,t)=[2\,\varphi(b)\,H_1(t,a)]\,[\varphi(b)\,H(x,a)]-$$

$$-[2\,\varphi(b)\,H_1(x,a)]\,[\varphi(b)\,H(t,a)]=$$

$$=\int_t^b\frac{1}{\vartheta(s)}\int_a^b\frac{s^2-v^2}{\vartheta(v)}\int_x^b\frac{1}{\vartheta(\xi)}\int_a^b\frac{\xi-z}{\vartheta(z)}\,ds\,dv\,d\xi\,dz-$$

$$-\int_x^b\frac{1}{\vartheta(s)}\int_a^b\frac{s^2-v^2}{\vartheta(v)}\int_t^b\frac{1}{\vartheta(\xi)}\int_a^b\frac{\xi-z}{\vartheta(z)}\,ds\,dv\,d\xi\,dz.$$

Spezziamo gli integrali tra x e b in integrali tra x e t e integrali tra t e b: i termini dati dall' integrazione fra t e b si elidono fra di loro, si ha quindi

$$\varphi(b)\,h(x,t)=\int_t^b\frac{1}{\vartheta(s)}\int_a^b\frac{1}{\vartheta(v)}\int_x^t\frac{1}{\vartheta(\xi)}\int_a^b\frac{(s^2-v^2)(\xi-z)}{\vartheta(z)}\,ds\,dv\,d\xi\,dz\,-$$

$$-\int_x^t\frac{1}{\vartheta(s)}\int_a^b\frac{1}{\vartheta(v)}\int_t^b\frac{1}{\vartheta(\xi)}\int_a^b\frac{(s^2-v^2)(\xi-z)}{\vartheta(z)}\,ds\,dv\,d\xi\,dz=$$

$$\int_t^b\frac{1}{\vartheta(s)}\int_a^b\frac{1}{\vartheta(v)}\int_x^t\frac{1}{\vartheta(\xi)}\int_a^b\frac{(s^2-v^2)(\xi-z)-(\xi^2-v^2)(s-z)}{\vartheta(z)}\,ds\,dv\,d\xi\,dz\,;$$

possiamo scambiare, nella funzione integranda, v con z, poichè, essendo le relative integrazioni estese ad intervalli uguali, l' integrale non cambia; facendo ciò solo nel secondo termine la funzione integranda del numeratore diventa $(s^2-v^2)(\xi-z)-$ $-(\xi^2-z^2)(s-v)=(s-v)(\xi-z)(s-\xi)+(s-v)(\xi-z)(v-z)=$ $=(s-\xi)(s-v)(\xi-v)+(v-z)(s-v)(s-z)$.

Osserviamo ora che se una funzione di due variabili cambia solo di segno scambiando fra di loro queste variabili, l' integrale doppio della funzione rispetto a queste due variabili esteso a un quadrato avente per diagonale la diagonale principale è nullo; ossia, *se è*

$$\Phi(x,t)=-\Phi(t,x),$$

e consideriamo l' integrale

$$I=\int_{r_1}^{r_2}dx\int_{s_1}^{s_2}\Phi(x,t)\,dt\,;$$

si ha:

a) se $(r_1,\,r_2)$ *e* $(s_1,\,s_2)$ *coincidono, è* $I=0$, *b) se* (r_1, r_2) *e* (s_1, s_2) *non hanno punti a comune, si può aggiungere a uno di essi l'altro, lasciando questo invariato* (5).

c) se (r_1, r_2) *e* (s_1, s_2) *sono tali che il primo comprende il secondo, questo si può togliere al primo* (6).

Le regole *a*), *b*), *c*), saranno spesso applicate nel seguito: per ora dalla *a*) segue subito che

$$\int_t^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^b \frac{1}{\vartheta(v)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^b \frac{(v-z)\,(s-v)\,(s-z)}{\vartheta(z)}\, ds\, dv\, d\xi\, dz = 0\,.$$

Perciò

$$\varphi(b)\, h(x,t) =$$

$$= \int_t^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^b \frac{1}{\vartheta(v)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^b \frac{(s-\xi)\,(s-v)\,(\xi-v)}{\vartheta(z)}\, ds\, dv\, d\xi\, dz\,,$$

e dividendo ambo i membri per $\varphi(b) = \int_a^b \frac{dz}{\vartheta(z)}$, e applicando la regola *c*) prima alle integrazioni rispetto a s e a v e poi alle integrazioni rispetto a v e ξ, si ha:

$$h(x,t) = \int_a^x \frac{1}{\vartheta(v)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^b \frac{(s-\xi)\,(s-v)\,(\xi-v)}{\vartheta(s)}\, dv\, d\xi\, ds\,. \tag{6}$$

(5) Es.: Se $a < c < d$, $\int_a^c dx \int_c^d \Phi(x,t)\, dt = \int_a^d dx \int_c^d \Phi(x,t)\, dt$.

(6) È l' inversa della precedente; es. se $a < c < d$,

$$\int_a^d dx \int_c^d \Phi(x,t)\, dt = \int_a^c dx \int_c^d \Phi(x,t)\, dt\,.$$

§ 4. - Le sei diverse forme del nucleo $K(x\,t)$ nel quadrato di lato $(b,\ a)$.

Dalla 13 del § 2, tenuto conto che $F(x\,, t)$ ha due diverse forme secondochè è $x \leq t$ oppure $x \geq t$ [v. anche (5) del § 3], segue subito che il nucleo $K(x\,, t)$ ha sei diverse definizioni nel quadrato Q di lato $b - a$ cui corrisponderanno sei diversi nuclei così definiti:

$$
\text{(I)} \quad \left\{
\begin{aligned}
h(c,d)\,K_1(x,t) &= h(c,d)\underset{x \leq t}{F(x,t)} - \\
&- h(x,d)\underset{c \leq t}{F(c,t)} - h(c,x)\underset{d \leq t}{F(d,t)}\,. \\
h(c,d)\,K_2(x,t) &= h(c,d)\underset{x \leq t}{F(x,t)} - \\
&- h(x,d)\underset{c \leq t}{F(c,t)} - h(c,x)\underset{d \geq l}{F(d,t)}\,. \\
h(c,d)\,K_3(x,t) &= h(c,d)\underset{x \leq t}{F(x,t)} - \\
&- h(x,d)\underset{c \geq t}{F(c,t)} - h(c,x)\underset{d \geq t}{F(d,t)}\,. \\
h(c,d)\,K_4(x,t) &= h(c,d)\underset{x \geq t}{F(x,t)} - \\
&- h(x,d)\underset{c \geq t}{F(c,t)} - h(c,x)\underset{d \geq t}{F(d,t)}\,. \\
h(c,d)\,K_5(x,t) &= h(c,d)\underset{x \geq t}{F(x,t)} - \\
&- h(x,d)\underset{c \leq t}{F(c,t)} - h(c,x)\underset{d \geq t}{F(d,t)}\,. \\
h(c,d)\,K_6(x,t) &= h(c,d)\underset{x \geq t}{F(x,t)} - \\
&- h(x,d)\underset{c \leq t}{F(c,t)} - h(c,x)\underset{d \leq t}{F(d,t)}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

e così distribuiti nel quadrato Q (vedi fig. 1):

Nelle (I) le funzioni h e F si intendono definite rispettivamente dalla (6) e dalla (5) del § 3; l'espressione del nucleo

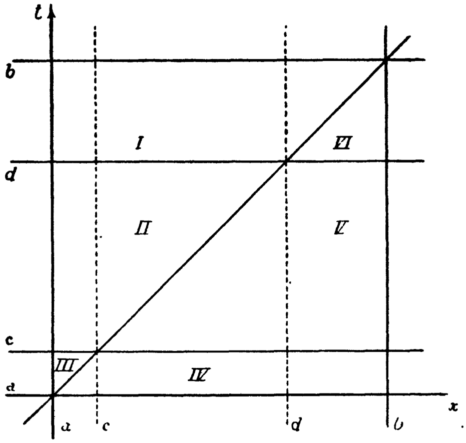

Fig. 1

riesce quindi assai complicata; però alle (I) si possono sostituire le seguenti formule più espressive e perfettamente equivalenti:

$$
(\mathrm{II})\quad \left\{
\begin{aligned}
h(c,d)\,K_1(x,t) &= \alpha_1(x,d)\,\tau(b,t)\\
h(c,d)\,K_2(x,t) &= \alpha_1(x,d)\,\tau(b,t) - \alpha_1(x,b)\,\tau(d,t)\\
h(c,d)\,K_3(x,t) &= \alpha_4(a,c)\,\tau(x,t) - \alpha_4(x,c)\,\tau(a,t)\\
h(c,d)\,K_4(x,t) &= -\,\alpha_4(x,c)\,\tau(a,t)\\
h(c,d)\,K_5(x,t) &= \alpha_4(x,a)\,\tau(c,t) - \alpha_4(x,c)\,\tau(a,t)\\
h(c,d)\,K_6(x,t) &= \alpha_1(x,d)\,\tau(b,t) - \alpha_1(b,d)\,\tau(x,t)\,,
\end{aligned}
\right.
$$

dove è

$$
(1)\quad h(x,t) = \int_a^x \frac{1}{\vartheta(u)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(z)} \int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)}\,(\xi - u)(\xi - z)(z - u)\,du\,dz\,d\xi
$$

$$(2)\quad \alpha_1(x,t)=\int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)}\int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)}\int_a^t \frac{1}{\vartheta(\xi)}(\xi-u)(\xi-z)(u-z)\,du\,dz\,d\xi\,,$$

$$(3)\quad \alpha_4(x\,t)=\int_d^b \frac{1}{\vartheta(u)}\int_x^b \frac{1}{\vartheta(z)}\int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)}(\xi-u)(\xi-z)(z-u)\,du\,dz\,d\xi$$

$$(4)\quad \tau(x\,,\,t)=\int_t^x \frac{1}{\vartheta(v)}\left\{\frac{1}{2}\,C(t)\,(t-v)^2-B(t)\,(t-v)+A\,(t)\right\}dv\,,$$

e vale la relazione:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1(x,d)\,\tau(b,t)-\alpha_1(x,b)\,\tau(d,t)+\alpha_4(x,c)\,\tau(a,t)- \\ -\alpha_4(x,a)\,\tau(c,t)-h\,(c,d)\,\tau(x,t)=0\,. \end{array}\right.$$

La verifica che le (II) sono equivalenti alle (I) si fa moltiplicando ciascuna delle relazioni (I) e la sua corrispondente in (II) per

$$\varphi(b)=\int_a^b \frac{d\xi}{\vartheta(\xi)}\,,$$

uguagliando poi i secondi membri corrispondenti così ottenuti: si hanno allora tante relazioni fra integrali quintupli che è facile verificare con operazioni elementari, e in base alle regole *c*) e *d*) del § 3.

§ 5. - Segno delle funzioni $h(x,t)$, $\alpha_1(x,t)$, $\alpha_4(x,t)$ nel quadrato Q.

Dalla (1) del § 4 segue subito, [essendo $\vartheta(x)>0$ in (a,b)],

per $\qquad a<x<t<b \qquad\qquad h(x,t)>0\,.$

Per $a < t < x < b$ [v. regola c) del § 3]:

$$h(x,t) = -\int_a^x \frac{1}{\vartheta(u)} \int_t^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u)(\xi - z)(z - u)\, du\, dz\, d\xi =$$

$$= -\int_a^t \frac{1}{\vartheta(u)} \int_t^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u)(\xi - z)(z - u)\, du\, dz\, d\xi < 0,$$

e infine

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x < t & h(x,t) > 0 \\ x > t & h(x,t) < 0 \end{array} \right. \qquad \text{nel quadrato } Q.$$

Ricordiamo la (2) del § 4

$$\alpha_1(x,t) = \int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_a^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u)(\xi - z)(u - z)\, du\, dz\, d\xi.$$

Per $x < t$ possono presentarsi tre casi:

$$a < x < t < c, \qquad a < x < c < t, \qquad c < x < t.$$

Per la regola c) del § 4 abbiamo: nel primo caso

$$\alpha_1(x,t) = \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(u)} (\xi - u)(\xi - z)(u - z)\, du\, dz\, d\xi < 0,$$

nel secondo:

$$\alpha_1(x,t) = \int_a^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_x^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_c^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u)(\xi - z)(u - z)\, du\, dz\, d\xi > 0$$

nel terzo:

$$\alpha_1(x,t) = \int_a^c \frac{1}{\vartheta(u)} \int_c^x \frac{1}{\vartheta(z)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} (\xi - u)(\xi - z)(u - z)\, du\, dz\, d\xi < 0 .$$

Osservando che:

$$\alpha_1(t,x) = -\alpha_1(x,t),$$

il segno di $\alpha_1(x,t)$ risulta dato dalla seguente tavola, nel quadrato Q:

$a < x < t < c$	$\alpha_1(x,t) < 0$
$a < x < c < t$	$\alpha_1(x,t) > 0$
$c < x < t$	$\alpha_1(x,t) < 0$
$a < t < x < c$	$\alpha_1(x,t) > 0$
$a < t < c < x$	$\alpha_1(x,t) < 0$
$c < t < x$	$\alpha_1(x,t) > 0$

Il segno di $\alpha_4(x,t)$ si studia in modo perfettamente analogo, arrivando ai risultati della seguente tavola:

$x < t < d$	$\alpha_4(x,t) > 0$
$x < d < t < b$	$\alpha_4(x,t) < 0$
$d < x < t < b$	$\alpha_4(x,t) > 0$
$t < x < d$	$\alpha_4(x,t) < 0$
$t < d < x < b$	$\alpha_4(x,t) > 0$
$d < t < x < b$	$\alpha_4(x,t) < 0$

I risultati trovati si vedono meglio nelle seguenti figure, che d'ora innanzi dovranno sempre esser tenute presenti :

Segno di $\alpha_1(x, t)$ (7)

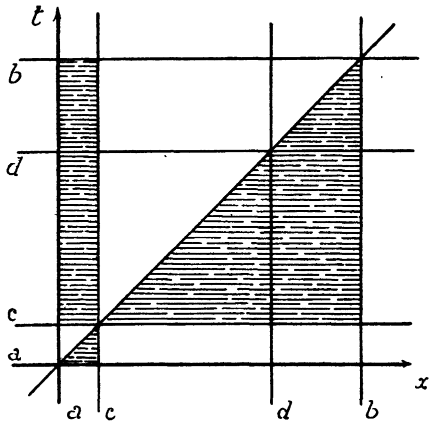

Fig. 2

Segno di $\alpha_4(x, t)$ (7)

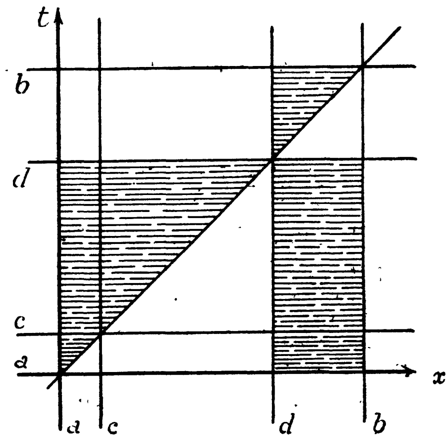

Fig. 3

(7) *Nella parte tratteggiata la funzione è positiva; nella parte bianca è negativa.*

SECONDA PARTE

Due casi in cui esiste almeno un autovalore.

§ 6. - TEOREMA.

Data l'equazione: (8)

$$[\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda\, C(x)\, y(x) = 0\,, \tag{1}$$

con le ipotesi $\vartheta'''(x), C(x)$ *continue in* (α, β), $\vartheta(x) > 0$ *in* (α, β), λ *costante; e dati in* (α, β) *quattro punti* a, b, c, d, $[a < c < d < b]$ *qualsiasi; se avviene che la funzione* $(x-c)(x-d)\, C(x)$, *senza essere identicamente nulla non cambia di segno in* (a, b), *allora esiste almeno un autovalore* [valore speciale *di* λ] *per il quale la* (1) *ammette un integrale* $y(x)$ *non identicamente nullo che si annulla nei quattro punti fissati* a, b, c, d.

Basterà dimostrare che ammette almeno un autovalore l'equazione

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt$$

che corrisponde alla (1) con il procedimento del § 2, il cui nucleo $K(x, t)$ soddisfa alle relazioni trovate nei paragrafi precedenti, ove si faccia

$$A(x) \equiv B(x) \equiv 0\,, \tag{2}$$

e si tenga conto della nuova ipotesi sulla funzione $C(x)$. Ricordiamo il teorema: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione integrale lineare omogenea di seconda specie non ammetta alcun autovalore è che tutte le traccie, a partire dalla terza, siano nulle* (9). Noi dimostreremo che nelle nostre ipotesi tutte le traccie sono diverse da zero, e allora il teorema sarà

(8) In generale non autoaggiunta [cfr. § 1].

(9) Cfr. E. GOURSAT; *Cours d'Analyse Mathématique;* (4ª ed.) T. III p. 428 [Paris, Gauthier-Villars].

dimostrato. L'ipotesi fatta sulla funzione $C(x)$ porta che si deve verificare uno dei due casi seguenti:

$$(3) \qquad \begin{cases} C(t) > 0 & \text{per} \quad a < t < c \\ C(t) < 0 & \text{»} \quad c < t < d \\ C(t) > 0 & \text{»} \quad d < t < b, \end{cases}$$

oppure

$$(3)' \qquad \begin{cases} C(t) < 0 & \text{per} \quad a < t < c \\ C(t) > 0 & \text{»} \quad c < t < d \\ C(t) < 0 & \text{»} \quad d < t < b. \end{cases}$$

Supponiamo che si verifichi il caso (3) [la dimostrazione per il caso (3)' è perfettamente analoga]; e studiamo quale segno assume allora il nucleo $K(x, t)$ nel quadrato di lato $b - a$. Per la prima delle (II) del § 4, tenuto conto che ora è:

$$\tau(b, t) = C(t) \int_t^b (t - v)^2 \, dv$$

[per la (4) del § 4, sostituendovi la (2) di questo §] e che, per la (3), $C(t)$ è positiva nella zona del nucleo $K_1(x, t)$ [v. fig. 1] e inoltre che è $h(c, d) > 0$, [v. (1) del § 5], abbiamo infine che $K_1(x, t)$ ha il segno di $\alpha_1(x, d)$, e quindi, per la fig. 2,

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} K_1(x, t) > 0 & \text{per} \quad a < x < c \\ K_1(x, t) < 0 & \text{»} \quad c < x < d \\ K_1(x, t) > 0 & \text{»} \quad d < x < b. \end{cases}$$

Analogamente si trova

$$(\mathrm{IV}) \qquad \begin{cases} K_4(x, t) > 0 & \text{per} \quad a < x < c \\ K_4(x, t) < 0 & \text{»} \quad c < x < d \\ K_4(x, t) > 0 & \text{»} \quad d < x < b. \end{cases}$$

Ricordiamo ora che è [v. (II) del § 4]: $h(c, d) K_3(x, t) =$ $= \alpha_4(a, c) \tau(x, t) - \alpha_4(x, c) \tau(a, t)$, con $a < x < t < c$, [v. fig. 1],

$C(t) > 0$ [per la (3)], e $h(c,d) > 0$; perciò $K_3(x,t)$ ha il segno dell'espressione [cfr. (3) e (4) del § 4]:

$$\int_d^b \frac{1}{\vartheta(u)} \int_a^b \frac{1}{\vartheta(z)} \int_c^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^x \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u)(\xi - z)$$
$$(z-u)(t-v)^2 \, du \, dz \, d\xi \, dv -$$
$$- \int_d^b \frac{1}{\vartheta(u)} \int_x^b \frac{1}{\vartheta(z)} \int_c^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^a \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u)(\xi - z)$$
$$(z-u)(t-v)^2 \, du \, dz \, d\xi \, dv =$$
$$= \int_d^b \frac{1}{\vartheta(u)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(z)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u)(\xi - z)$$
$$(z-u)(t-v)^2 \, du \, dz \, d\xi \, dv +$$
$$+ \int_d^b \frac{1}{\vartheta(u)} \int_x^t \frac{1}{\vartheta(z)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^x \frac{1}{\vartheta(v)} (\xi - u) \Big\{ (\xi - z)(z-u)(t-v)^2 -$$
$$- (\xi - v)(v-u)(t-z)^2 \Big\} \, du \, dz \, d\xi \, dv .$$

Essendo per ipotesi $\vartheta(x) > 0$ per $a < x < b$, il primo integrale risulta positivo; inoltre, poichè si trova:

$$(\xi - z)(z-u)(t-v)^2 - (\xi - v)(v-u)(t-z)^2 =$$
$$= (v-z) \Big\{ (\xi - z)(t-z)(u-t) + (u-z)(t-z)(\xi - t) +$$
$$+ (z-v) [(\xi - z)(u-z) - (t-z)^2] \Big\} ,$$

è facile verificare che anche il secondo integrale è positivo. Si ha quindi:

(III) $$K_3(x,t) > 0 .$$

Analogamente si trova

$$\text{(VI)} \qquad K_6(x,t) > 0 .$$

Per il nucleo $K_2(x,t)$ bisogna distinguere due casi: $x < c$, e $x > c$; con procedimenti analoghi ai precedenti si trova allora:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} K_2(x,t) < 0 & \text{per} \quad x < c \\ K_2(x,t) > 0 & \text{»} \quad x > c, \end{cases}$$

e infine:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} K_5(x,t) > 0 & \text{per} \quad x < d \\ K_5(x,t) < 0 & \text{»} \quad x > d. \end{cases}$$

Per le (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) il segno del nucleo $K(x,t)$ resta determinato come mostra la figura seguente:

Segno di $K(x,t)$ [10]

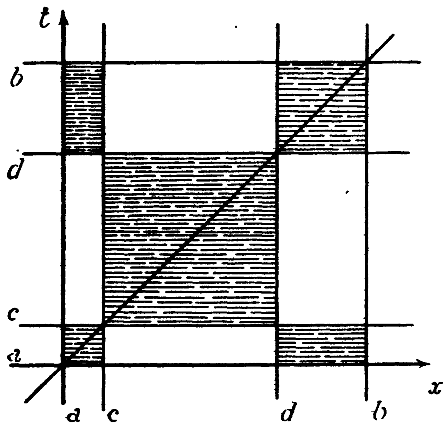

Fig. 4

Dimostriamo ora che, nell' ipotesi che $K(x,t)$ abbia il segno indicato nella figura precedente, tutte le traccie del nucleo sono

[10] Nella parte tratteggiata $K(x, t)$ è positivo, nella parte bianca è negativo.

positive, ossia:

$$A n = \int_a^b \cdots \int_a^b K(s_1, s_2)\, K(s_2, s_3) \ldots K(s_n, s_1)\, ds_1 \ldots ds_n > 0 ,$$

qualunque sia n; noi dimostreremo anzi che è

$$(4) \qquad K(s_1, s_2)\, K(s_2, s_3) \ldots\ldots K(s_{n-1}, s_n)\, K(s_n, s_1) > 0 ,$$

comunque varino $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n$ nel quadrato di lato $b - a$, eccettuati i punti a, b, c, d [per i quali il primo membro della (4) è nullo, essendo $K(a, t) \equiv K(b, t) \equiv K(c, t) \equiv K(d, t) \equiv 0$ ([11])]. Per $n = 1$ la (4) diventa $K(s_1, s_1) > 0$, che è verificata facilmente nella fig. 4. Supponiamo dunque $n > 1$. Vogliamo allora dimostrare che il prodotto

$$P = K(s_{i-1}, s_i)\, K(s_i, s_{i+1})$$

non varia di segno se, restando fissi s_{i-1} e s_{i+1}, s_i varia in (a, b). Infatti possono presentarsi i seguenti casi:

s_{i-1}	s_{i+1}	$a < s_i < c$	$c < s_i < d$	$d < s_i < b$
$a < s_{i-1} < c$	$a < s_{i+1} < c$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$
$a < s_{i-1} < c$	$c < s_{i+1} < d$	$P < 0$	$P < 0$	$P < 0$
$c < s_{i-1} < d$	$a < s_{i+1} < c$	$P < 0$	$P < 0$	$P < 0$
$a < s_{i-1} < c$	$d < s_{i+1} < b$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$
$d < s_{i-1} < b$	$a < s_{i+1} < c$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$
$c < s_{i-1} < d$	$c < s_{i+1} < d$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$
$c < s_{i-1} < d$	$d < s_{i+1} < b$	$P < 0$	$P < 0$	$P < 0$
$d < s_{i-1} < b$	$c < s_{i+1} < d$	$P < 0$	$P < 0$	$P < 0$
$d < s_{i-1} < b$	$d < s_{i+1} < b$	$P > 0$	$P > 0$	$P > 0$

([11]) Cfr. (II) del § 4 e regola a) del § 3.

Ne segue che per determinare il segno del primo membro della (4) possiamo supporre, per es.:

$$a < s_2, s_3, \ldots, s_n < c .$$

E siccome in questa ipotesi è

$$K(s_{i+1}, s_{i+2}) > 0 ,$$

ci resta da far vedere che è positivo il prodotto

$$K(s_1, s_2)\, K(s_n, s_1) ,$$

con $$a < s_2 < c , \quad a < s_n < c .$$

Si posson dare tre casi:

$$a < s_1 < c , \qquad c < s_1 < d , \qquad d < s_1 < b .$$

Si verifica subito, consultando la figura, che in questi tre casi è

$$K(s_1, s_2)\, K(s_n, s_1) > 0 .$$

§ 7. - Corollario.

Data l'equazione (12)

$$\text{(1)} \qquad [\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda [A(x)\, y(x)]'' + \lambda [B(x)\, y(x)]' + \\ + \lambda [C_1(x) + \varepsilon\, C_2(x)]\, y(x) = 0$$

con le ipotesi: $\vartheta'''(x)$, $A''(x)$, $B'(x)$, $C_1(x)$, $C_2(x)$ *continue in* (α, β), $\vartheta(x) > 0$ *in* (α, β), λ *ed* ε *costanti; e dati in* (α, β) *quattro punti* a, b, c, d, $[a < c < d < b]$ *qualsiasi; se avviene che la funzione* $(x - c)(x - d)\, C_2(x)$, *senza essere identicamente*

(12) In generale non autoaggiunta [cfr. § 1].

nulla, non assume valori di segno opposto in (a, b), *allora, salvo al più tre valori della costante* ε, *esiste almeno un autovalore* [valore speciale di λ] *per il quale la* (1) *ammette un integrale* $y(x)$ *non identicamente nullo, che si annulla nei quattro punti fissati* a, b, c, d.

Infatti la ricerca delle soluzioni dell'equazione (1) che si annullano in quattro punti a, b, c, d, $[a < c < d < b]$ si riduce [cfr. § 2] a trovare le autosoluzioni dell'equazione integrale omogenea di seconda specie.

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt, \tag{2}$$

dove è

$$K(x, t) = K_1(x, t) + \varepsilon K_2(x, t),$$

dove $K_1(x, t)$ e $K_2(x, t)$ sono nuclei delle equazioni integrali analoghe alla (2) cui soddisfano rispettivamente le soluzioni $y(x)$ delle equazioni differenziali.

$$[\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda [A(x)\, y(x)]'' + \lambda [B(x)\, y(x)]' + \\ + \lambda C_1(x)\, y(x) = 0$$

$$[\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda C_2(x)\, y(x) = 0,$$

che si annullano nei punti prefissati a, b, c, d.

Indicando con A_3, $A_3^{(1)}$, $A_3^{(2)}$ le terze traccie dci nuclei $K(x, t)$, $K_1(x, t)$, $K_2(x, t)$, si ha, per il teorema precedente,

$$A_3^{(2)} > 0 \qquad [\text{oppure } A_3^{(2)} < 0].$$

In ogni caso è

$$A_3^{(2)} \neq 0.$$

Ed essendo:

$$A_3 = A_3^{(1)} + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + A_3^{(2)} \varepsilon^3 ,$$

con c_1, c_2 costanti indipendenti da ε, ne segue che A_3 può annullarsi al più per tre valori di ε, l'equazione (2) ammette almeno un autovalore.

§ 8. – Teorema.

Data l'equazione: ([13])

$$(1) \qquad [\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda [A(x)\, y(x)]'' + \lambda C(x)\, y(x) = 0 ,$$

con le ipotesi: $\vartheta'''(x)$, $A''(x)$, $C'(x)$ *continue in* (α, β), $\vartheta(x) > 0$ *in* (α, β), λ *costante; e dati in* (α, β) *quattro punti* a, b, c, d, $[a < c < d < b]$ *qualsiasi; se avviene che le due funzioni:* $A(x)$ *e* $(x - c)(x - d)\, C(x)$, *senza essere identicamente nulle, hanno segno costante e fra loro uguale in* (a, b), *allora esiste almeno un autovalore* [valore speciale di λ], *cui corrispondono soluzioni dell'equazione che si annullano nei quattro punti* a, b, c, d *prefissati.*

Infatti, nelle nostre ipotesi, le funzioni $h(x, t)$, $\alpha_1(x, t)$, $\alpha_4(x, t)$ sono continue con derivate parziali prime continue nel quadrato Q di lato $b - a$ – come appare dalle loro espressioni integrali, [cfr. (1), (2), (3) del § 4] – inoltre, [per la nuova ([14]) ipotesi: $C'(x)$ continua], anche $\tau(x, t)$ viene ad essere continua con derivate parziali prime continue in Q [cfr. (4) del § 4] e quindi, come appare dalle (II) del § 4, il nucleo $K(x, t)$ – dell'equazione integrale corrispondente alla (1) con il procedimento del § 2 – è continuo con derivate parziali prime continue in Q.

([13]) In generale non autoaggiunta [cfr. § 1].

([14]) Fin qui avevamo semplicemente supposto $C(x)$ continua.

([15]) Cfr. T. Lalesco – *Introdution à la théorie des équations intégrales.* [Paris; A. Hermann; 1912], pagine 87-89.

Ne segue in particolare che il nucleo $K(x, t)$ è *lipscitziano* del primo ordine in Q. Ma se il nucleo di un' equazione integrale di seconda specie è lipscitziano [di un ordine qualsiasi], allora il genere di $D(\lambda)$ [determinante di FREDHOLM] è nullo ([15]), se quindi $D(\lambda)$ ha infiniti zeri è

$$D(\lambda) = \prod_{n}^{1\ldots\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right);$$

e se gli zeri di $D(\lambda)$ sono in numero finito, n:

$$D(\lambda) = \prod_{i}^{1\ldots n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right);$$

e se $D(\lambda)$ non ha zeri, ossia l'equazione omogenea non ha autovalori:

$$D(\lambda) \equiv 1 .$$

Ma ricordiamo che è: ([16])

$$D(\lambda) = e^{-\left(A_1 \lambda + A_2 \frac{\lambda^2}{2} + \ldots + A_n \frac{\lambda^n}{n} + \ldots\right)}$$

[dove A_n è l' $n.^{\text{ma}}$ traccia del nucleo]; perciò: *Condizione necessaria e sufficiente perchè la* (1) *non ammetta autovalori, è che siano nulle tutte le traccie del nucleo* $K(x, t)$ *corrispondente.* Dimostriamo che nelle nostre ipotesi la prima traccia, ossia

$$A_1 = \int_a^b K(x, x)\, dx$$

è diversa da zero, e allora il teorema sarà dimostrato. Le nostre ipotesi sono soddisfatte solo in questi due casi: che sia contem-

([16]) Cfr. E. GOURSAT – *Cours d' Analyse Mathématique*, [3e édition; 1923] T. III, p. 374.

poraneamente:

$$(2) \quad A(x) > 0 \quad \text{per} \quad a < x < b \quad \text{e} \begin{cases} C(x) > 0 & \text{per} \quad a < x < c \\ C(x) < 0 & \text{»} \quad c < x < d \\ C(x) > 0 & \text{»} \quad d < x < b, \end{cases}$$

oppure

$$(2)' \quad A(x) < 0 \quad \text{per} \quad a < x < b \quad \text{e} \begin{cases} C(x) < 0 & \text{per} \quad a < x < c \\ C(x) > 0 & \text{»} \quad c < x < d \\ C(x) < 0 & \text{»} \quad d < x < b. \end{cases}$$

Supponiamo che si verifichi il caso (2) [per il caso (2)′ la dimostrazione è analoga]. Abbiamo:

$$A_1 = \int_a^c K(x, x)\, dx + \int_c^d K(x, x)\, dx + \int_d^b K(x, x)\, dx .$$

Si vede subito che il primo e terzo termine sono positivi; infatti [cfr. fig. 1, e poi la quarta delle (II) del § 4, tenendo presente la (1) di questo §]

$$\int_a^c K(x, x)\, dx = -\frac{1}{h(c, d)} \int_a^c \alpha_4(x, c)\, \tau(a, x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{h(c, d)} \int_a^c \alpha_4(x, c) \int_a^x \frac{1}{\vartheta(v)} \left[\frac{1}{2} C(x)(x - v)^2 + A(x)\right] dx\, dv .$$

Ricordando $\vartheta(x) > 0$ in (a, b); $h(c, d) > 0$; dalle (2) e dalla figura 3, segue

$$\int_a^c K(x, x)\, dx > 0 .$$

Così, analogamente,

$$\int_d^b K(x, x)\, dx > 0 .$$

È poi:

$$h(c,d)\int_c^d K(x,x)\,dx=\int_c^d\Big\{\alpha_1(x,d)\,\tau(b,x)-\alpha_1(x,b)\,\tau(d,x)\Big\}dx=$$

$$=\int_c^d\Big\{\alpha_1(x,d)\int_x^b\frac{1}{\vartheta(v)}\Big[\frac{1}{2}\,C(x)\,(x-v)^2+A(x)\Big]dv-$$

$$-\,\alpha_1(x,b)\int_x^d\frac{1}{\vartheta(v)}\Big[\frac{1}{2}\,C(x)\,(x-v)^2+A(x)\Big]dv\Big\}dx\,.$$

In questa espressione sia il termine con $A(x)$ che quello con $C(x)$ sono positivi. Infatti il primo è [cfr. (2) del § 4]

$$\int_c^d A(x)\int_a^c\frac{1}{\vartheta(u)}\int_a^x\frac{1}{\vartheta(z)}\int_a^d\frac{1}{\vartheta(\xi)}\int_x^b\frac{1}{\vartheta(v)}\,(\xi-u)$$

$$(\xi-z)\,(u-z)\,dx\,du\,dz\,d\xi\,dv\,-$$

$$-\int_c^d A(x)\int_a^c\frac{1}{\vartheta(u)}\int_a^x\frac{1}{\vartheta(z)}\int_a^b\frac{1}{\vartheta(\xi)}\int_x^d\frac{1}{\vartheta(v)}\,(\xi-u)$$

$$(\xi-z)\,(u-x)\,dx\,du\,dz\,d\xi\,dv=$$

$$=\int_c^d A(x)\int_a^c\frac{1}{\vartheta(u)}\int_c^x\frac{1}{\vartheta(z)}\int_x^d\frac{1}{\vartheta(\xi)}\int_d^b\frac{1}{\vartheta(v)}\,(u-x)\Big\{(\xi-u)\,(\xi-z)\,-$$

$$-\,(v-u)\,(v-z)\Big\}\cdot dx\,du\,dz\,d\xi\,dv\,,$$

che è positivo. Il termine con $C(x)$ si trova essere, con procedimento analogo,

$$\frac{1}{2}\int_c^d C(x)\int_a^c\frac{1}{\vartheta(u)}\int_c^x\frac{1}{\vartheta(z)}\int_x^d\frac{1}{\vartheta(\xi)}\int_d^b\frac{1}{\vartheta(v)}\,(u-z)\Big\{(\xi-u)$$

$$(\xi-z)\,(x-v)^2-(v-u)\,(v-z)\,(x-\xi)^2\Big\}\cdot dx\,du\,dz\,d\xi\,dv\,,$$

che è positivo, essendo $C(x) < 0$ nel rispettivo intervallo,

$$u - z < 0 \quad \text{e}$$

$$(\xi - u)(\xi - z)(x - v)^2 - (v - u)(v - z)(x - \xi)^2 =$$
$$= (v - \xi)(x - u)(v - z)(\xi - x) + (v - \xi)(v - x)(\xi - u)(x - z),$$

che manifestamente è positiva, muovendosi le variabili negli intervalli assegnati. Quindi nel caso (2) è $A_1 > 0$.

§ 9. - Corollario.

Data l'equazione: (17)

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &[\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda[(A(x) + \varepsilon)y(x)]'' + \\ &+ \lambda[B(x)\, y(x)]' + \lambda\, C(x)\, y(x) = 0 \end{aligned}$$

con le ipotesi $\vartheta'''(x), A''(x), B'(x), C'(x)$ *continue in* (α, β), $\vartheta(x) > 0$ *in* (α, β), λ *ed* ε *costanti; e dati in* (α, β) *quattro punti* a, b, c, d, $[a < c < d < b]$ *qualsiasi; allora, accettuato al più un valore di* ε, *esiste almeno un autovalore* λ *cui corrisponde una soluzione dell'equazione che si annulla nei punti* a, b, c, d *prefissati.*

Infatti il nucleo dell'equazione integrale ottenuta operando sulla (1) con il procedimento del § 2 è [v. § 8] lipscitziano e se scriviamo che la prima traccia deve annullarsi otteniamo una relazione in cui il coefficiente di ε è positivo [ripetere procedimento del § 8], quindi si ha un'espressione lineare in ε col coefficiente di ε diverso da zero che può annullarsi al massimo per un valore di ε.

(17) In generale non autoaggiunta [cfr. § 1].

Terza Parte

Una classe di equazioni che ammettono infiniti autovalori e tutti reali.

§ 10. - Teorema

Data l'equazione:

$$
\text{(1)} \qquad [\vartheta(x)\, y'(x)]''' + \lambda\, [A(x)\, y(x)]'' + \lambda\, [B(x)\, y(x)]' + \\ + \lambda\, C(x)\, y(x) = 0\,,
$$

con le ipotesi $\vartheta'''(x)$, $A''(x)$, $B'(x)$, $C(x)$ *continue in* (α, β), $\vartheta(x) > 0$ *in* (α, β), λ *costante; e dati in* (α, β) *quattro punti* a, b, c, d $[a < c < d < b]$ *qualsiasi; consideriamo le tre funzioni:*

$$
F_1(t) = 2 \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} (s - v)\, ds\, dv
$$

$$
F_2(t) = \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} (s - v)\, (2t - s - v)\, ds\, dv
$$

$$
F_3(t) = \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} (s - v)\, [t(t - s - v) + sv]\, ds\, dv\,;
$$

se si ha:

$$
A(t) = F_3(t)\, \Phi(t), \quad B(t) = F_2(t)\, \Phi(t)\,, \quad C(t) = F_1(t)\, \Phi(t)\,,
$$

dove $\Phi(t)$ *è una funzione continua e di segno costante in* (a, b) *e ivi derivabile due volte con derivata seconda continua, allora l'equazione* (1) *ammette infiniti autovalori tutti reali, cui corrispondono integrali dell'equazione che si annullano nei punti* a, b, c, d *prefissati.*

Infatti si ha ora, [cfr. (4) del § 4]

$$\tau(x,t) = \int_t^x \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} (s-v)\left[(t-\xi)^2 - (2t-s-v)(t-\xi) + \right.$$

$$\left. + t(t-s-v) + sv\right] d\xi\, ds\, dv \cdot \Phi(t) =$$

$$= \int_t^x \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (s-v)(\xi-s)(\xi-v)\, d\xi\, ds\, dv \cdot \Phi(t),$$

da cui si ha subito [cfr. regola *a*) del § 3]

$$\tau(c,t) \equiv \tau(d,t) \equiv 0;$$

e inoltre:

$$\tau(a,t) = \int_a^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (v-s)(s-\xi)(v-\xi)\, d\xi\, ds\, dv \cdot \Phi(t) =$$

$$= \int_a^t \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_a^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_a^d \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (v-s)(s-\xi)(v-\xi)\, d\xi\, ds\, dv \cdot \Phi(t) =$$

$$= \alpha_1(t,d)\, \Phi(t).$$

$$\tau(b,t) = -\int_t^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^c \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^d \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (v-s)(\xi-s)(\xi-v)\, d\xi\, ds\, dv \cdot \Phi(t) =$$

$$= -\int_d^b \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int_t^b \frac{1}{\vartheta(s)} \int_c^b \frac{1}{\vartheta(v)} \cdot (v-s)(\xi-s)(\xi-v)\, d\xi\, ds\, dv \cdot \Phi(t) =$$

$$= -\alpha_4(t,c)\, \Phi(t).$$

Si ha allora, dalle (II) del § 4;

$$h(c,d)\,K_1(x,t) = -\alpha_1(x,d)\,\alpha_4(t,c)\cdot\Phi(t)$$

$$K_2(x,t) = K_1(x,t)$$

$$h(c,d)\,K_4(x,t) = -\alpha_4(x,c)\,\alpha_1(t,d)\cdot\Phi(t)$$

$$K_5(x,t) \equiv K_4(x,t)\,.$$

Inoltre la (5) del § 4 diventa ora:

$$\alpha_1(x,d)\,\tau(b,t) + \alpha_4(x,c)\,\tau(a,t) - h(c,d)\,\tau(x,t) = 0\,,$$

da cui, [cfr. (II) del § 4]:

$$K_3(x,t) = K_1(x,t)\,, \qquad K_6(x,t) = K_4(x,t)\,.$$

Si ha infine, per il nucleo, l'espressione:

per $x \leq t$ $\qquad K(x,t) = -\dfrac{1}{h(c,d)}\,\alpha_1(x,d)\,\alpha_4(t,c)\,\Phi(t)$

per $x \geq t$ $\qquad K(x,t) = -\dfrac{1}{h(c,d)}\,\alpha_4(x,c)\,\alpha_1(t,d)\,\Phi(t)\,.$

Si ha quindi un *nucleo di Schmidt* ([18]) nel quadrato Q, e i suoi autovalori, a meno del fattore costante

$$-h(c,d)\,sgn\,\Phi(t)\,,$$

coincidono con quelli del nucleo simmetrico $\overline{K}(x,t)$ così definito

per $x \leq t$ $\qquad \overline{K}(x,t) = \alpha_1(x,d)\,\alpha_4(t,c)\sqrt{\Phi(x)\,\Phi(t)}$

per $x \geq t$ $\qquad \overline{K}(x,t) = \alpha_4(x,c)\,\alpha_1(t,d)\sqrt{\Phi(x)\,\Phi(t)}\,.$

([18]) Cfr. E. Goursat, loc. cit., p. 457.

Un tale nucleo ammette autovalori soltanto reali e noi proveremo che essi sono in numero infinito. Ammettiamo per assurdo che essi siano un numero finito n, precisamente siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; indicando con

$$\sqrt{\Phi(x)}\, u_1(x), \quad \sqrt{\Phi(x)}\, u_2(x), \quad \ldots, \quad \sqrt{\Phi(x)}\, u_n(x);$$

$$\int_a^b \Phi(x)\, u_i^2(x)\, dx = 1, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

le autofunzioni corrispondenti, le $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ sono autofunzioni dell'equazione integrale

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt,$$

sono perciò derivabili e si annullano in a, c, d, b; inoltre, per $x \geq t$, si ha: (19)

$$\alpha_1(t, d)\, \alpha_4(x, c) = \frac{u_1(x)\, u_1(t)}{\lambda_1} + \ldots + \frac{u_n(x)\, u_n(t)}{\lambda_n},$$

e in particolare, per qualunque x in (a, b),

$$\alpha_1(x, d)\, \alpha_4(x, c) = \sum_1^n{}_i \frac{u_i^2(x)}{\lambda_i},$$

da cui, derivando rispetto a x, si ha:

$$\alpha_1'(x, d)\, \alpha_4(x, c) + \alpha_1(x, d)\, \alpha_4'(x, c) =$$

$$= 2 \sum_1^n{}_i \frac{u_i(x)\, u_i'(x)}{\lambda_i},$$

(19) Cfr. E. Goursat, loc. cit., p. 442.

e per $x = a$, essendo:

$$\alpha_1(a, d) = 0\,, \quad u_i(a) = 0\,,$$

ne segue:

$$[\alpha_1'(x, d)]_{x=a} \cdot \alpha_4(a, c) = 0\,,$$

la quale è assurda, essendo, [cfr. fig. 2 e 3]

$$\alpha_4(a, c) = h(c, d) > 0\,, \qquad [\alpha_1'(x, d)]_{x=a} > 0\,.$$

Bisogna quindi ammettere l'esistenza di infiniti autovalori.