RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIANFRANCO CIMMINO

Sui sistemi di infinite equazioni integrali lineari con infinite funzioni incognite

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 8 (1937), p. 21-46

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__21_0>

SUI SISTEMI DI INFINITE EQUAZIONI INTEGRALI LINEARI CON INFINITE FUNZIONI INCOGNITE

di Gianfranco Cimmino *a Napoli*

Raccolgo nella presente memoria alcuni risultati relativi ai sistemi di infinite equazioni integrali lineari con infinite funzioni incognite, che si presentano come diretta estensione sia dei teoremi fondamentali sulle equazioni integrali, o sistemi di un numero finito di equazioni integrali con egual numero di funzioni incognite, sia degli analoghi teoremi relativi ai sistemi di infinite equazioni lineari (algebriche) in infinite incognite.

Le ipotesi fissate a proposito dei sistemi presi in esame (n. 1) permettono l'applicazione del metodo delle approssimazioni successive in piccolo (n. 2). Il teorema dell'alternativa sussiste pure, ove si aggiunga una ipotesi di completa continuità (n. 3); esso viene qui dimostrato (n. 4) con un procedimento che si impernia sulla stessa idea fondamentale di cui mi sono valso in un'altra mia ricerca [1]; nel caso particolare di una ordinaria equazione integrale, anzichè di un sistema infinito, questa dimostrazione si discosta da tutte quelle consuete e consente di pervenire allo scopo in maniera estremamente semplice sotto ipotesi che sono alquanto più generali di quelle che si fanno di solito.

Nel n. 5 è dato un criterio per l'applicabilità del metodo delle ridotte, o più generalmente perchè le soluzioni di un si-

[1] G. Cimmino – *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del second' ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa,* in corso di stampa negli Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

stema approssimante il sistema dato convergano verso le soluzioni di quest' ultimo.

Nel n. 6 si mostra come si possa ricondurre il sistema infinito a un sistema finito, secondo un procedimento, che costituisce la naturale estensione di quello ideato per le equazioni integrali ordinarie da E. SCHMIDT (2), come pure di quello, pei sistemi di infinite equazioni lineari (algebriche), che da F. RIESZ viene fatto risalire ad A. C. DIXON (3).

Infine (n. 7) si studiano alcuni casi particolari, in cui, pur non essendo sempre verificate le ipotesi fondamentali poste a base di tutta la trattazione, è possibile tuttavia ricondurre la risoluzione dei sistemi considerati a quella di sistemi finiti.

È da osservare che le questioni esaminate e i ragionamenti esposti nella presente ricerca sono quasi sempre strettamente connessi alla natura particolare del problema di cui si tratta e dello spazio funzionale concreto al quale ci si riferisce, sicchè, tranne in qualche dettaglio, o il risultato stesso, o la via seguita per ricavarlo possono presentare, mi sembra, un certo interesse, indipendentemente dalle teorie generali esistenti riguardo agli operatori ed alle equazioni lineari in spazi funzionali astratti (4).

Noto infine che i sistemi differenziali infiniti da me studiati in una precedente ricerca (5) sono equivalenti a sistemi integrali, che rientrano nel tipo generale qui considerato, in un caso limite che verrà specificato in seguito.

(2) E. SCHMIDT – *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Zweite Abhandlung: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung*, Math. Ann., Bd. 64 (1907), pp. 161-174.

(3) F. RIESZ – *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris (1913), pp. 98-106.

(4) Cfr. p. es. S. BANACH – *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa (1932).

(5) G. CIMMINO – *Sui sistemi di infinite equazioni differenziali lineari con infinite funzioni incognite*, R. Acc. Naz. dei Lincei, Serie VI, Vol. V, Fasc. VIII (1933).

1. - Preliminari.

Sia dato un numero $p > 1$ e un dominio D dello spazio a r dimensioni, in cui, detto x il punto corrente, indicheremo con dx l'elemento di volume. Siano poi $A(x, y)$ e $B(x)$ rispettivamente una matrice infinita, di elementi $a_{hk}(x, y)$, e una successione, di elementi $b_k(x)$, sulle quali faremo le ipotesi seguenti:

a) per x quasi ovunque in D, le $|a_{hk}(x, y)|^{\frac{p}{p-1}}$ siano funzioni di y sommabili su D; le $|a_{hk}(x, y)|^p$, per y quasi ovunque in D, e le $|b_k(x)|^p$ siano funzioni di x sommabili su D;

b) per x, y quasi ovunque in D, la $A(x, y)$ riesca limitata [6] e la somma dei quadrati degli elementi di $B(x)$ convergente;

c) detti $|A(x, y)|$ e $|B(x)|$ ordinatamente l'estremo superiore di $A(x, y)$ e la $\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2(x)}$, la $|A(x, y)|^{\frac{p}{p-1}}$ sia, per x quasi ovunque in D, una funzione di y sommabile su D; la $\left(\int_D |A(x, y)|^{\frac{p}{p-1}} dy\right)^{p-1}$ e la $|B(x)|^p$ siano funzioni di x sommabili su D.

Indicheremo con Σ_p lo spazio funzionale di tutte le successioni $U(x)$, per cui valgono le ipotesi fatte in a), *b*), *c*) su $B(x)$. Pensando la $U(x)$ come *punto*, o come *vettore* di Σ_p, i suoi elementi si diranno anche *coordinate*, o *componenti*. Definiamo come *distanza* di due punti $U(x)$, $V(x)$ di Σ_p la quantità $\left(\int_D |U(x) - V(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, come *norma* di $U(x)$ la sua distanza dallo zero, e conveniamo di dire semplicemente che una succes-

(6) Le nozioni che qui si presuppongono sulle matrici infinite sono riassunte, p. es., nella memoria cit. in (5), pp. 5-8.

sione di punti $U^{(n)}(x)$ di Σ_p *converge* verso un punto $U(x)$ dello spazio stesso, quando, per $n \to \infty$, tende a zero la distanza dei due punti $U(x)$, $U^{(n)}(x)$.

Lo spazio Σ_p così costituito è dunque uno spazio lineare metrico completo.

Lo spazio $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$, definito come Σ_p, scambiando soltanto p con $\frac{p}{p-1}$, si dirà spazio *complementare* di Σ_p.

Ciò posto, consideriamo la seguente equazione integrale, contenente un parametro λ, nel vettore incognito $U(x)$,

$$U(x) - \lambda \int_D A(x, y)\, U(y)\, dy = B(x). \tag{1}$$

Una *soluzione* $U(x)$ di (1) sarà, per definizione, un vettore di Σ_p, per il quale sia soddisfatta la (1), tranne al più nei punti di un insieme di misura nulla contenuto in D.

La (1) esprime il fatto che le $u_1, u_2, \ldots$ verificano il sistema di infinite equazioni integrali

$$u_h(x) = \lambda \int_D \sum_{k=1}^{\infty} a_{hk}(x, y)\, u_k(y)\, dy + b_h(x), \quad (h = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

laddove - giova notarlo esplicitamente - il secondo membro non sarà certo privo di senso, in virtù delle ipotesi *a*), *b*), *c*) fatte su $A(x, y)$ e su $U(x)$. Invero, qualunque sia n e per x quasi ovunque in D, la $\sum_{k=1}^{n} a_{hk}(x, y)\, u_k(y)$ è una funzione sommabile di y in base ad *a*), ed è limitata superiormente in valore assoluto da $|A(x, y)| \cdot |U(y)|$ in base a *b*), mentre poi da *c*) risulta che $|A(x, y)| \cdot |U(y)|$ è funzione sommabile di y, avendosi

$$\int_D |A(x, y)| \cdot |U(y)|\, dy \leq \left(\int_D |A(x, y)|^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_D |U(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}}; \tag{3}$$

ne segue che si può passare al limite per $n \to \infty$ sotto al segno $\int$ nella espressione $\int_D \sum_{k=1}^{n} a_{hk}(x, y)\, u_k(y)\, dy$, sicchè si riconosce non soltanto che l'integrale al secondo membro di (2), come si è detto, ha senso, ma anche che il suo valore assoluto elevato alla p-ma potenza è una funzione di x sommabile su D, come risulta da (3), novamente in base a c).

Nelle ipotesi precedenti, si può supporre, come caso limite, $p = \infty$ (7), oppure $p = 1$; corrispondentemente, le a) e c) si dovranno sostituire con le altre:

a') per x quasi ovunque in D, le $|a_{hk}(x, y)|$ sono funzioni di y sommabili su D; le $|a_{hk}(x, y)|$, per y quasi ovunque in D, e le $|b_k(x)|$ sono funzioni di x limitate in D;

c') la $|A(x, y)|$ è, per x quasi ovunque in D, una funzione di y sommabile su D; la $\int_D |A(x, y)|\, dy$ e la $|B(x)|$ sono funzioni di x limitate in D;

e:

a'') per x quasi ovunque in D, le $|a_{hk}(x, y)|$ sono funzioni di y limitate in D, le $|a_{hk}(x, y)|$, per y quasi ovunque in D, e le $|b_k(x)|$ sono funzioni di x sommabili su D;

c'') la $|A(x, y)|$ è, per x quasi ovunque in D, una funzione di y limitata in D e, detto $\alpha(x)$ il suo estremo superiore, la $\alpha(x)$ e la $|B(x)|$ sono funzioni di x sommabili su D.

Il ragionamento di poc'anzi si può ripetere anche nei casi limiti $p = \infty$ e $p = 1$. La disuguaglianza (3), per $p = \infty$, indicando con β l'estremo superiore di $|U(x)|$ in D, va sostituita con la

$$(3') \qquad \int_D |A(x, y)| \cdot |U(y)|\, dy \leq \beta \cdot \int_D |A(x, y)|\, dy,$$

(7) È questo il caso limite al quale si allude nelle parole in fine della introduzione.

e per $p = 1$, con l'altra

$$(3'') \qquad \int_D |A(x, y)| \cdot |U(y)| \, dy \leq \alpha(x) \cdot \int_D |U(y)| \, dy .$$

L'integrale al secondo membro di (2) sarà dunque, per $p = \infty$, una funzione limitata e per $p = 1$, una funzione sommabile di x in D.

2. - Teorema di esistenza e di unicità in piccolo.

Nelle ipotesi ora specificate, il metodo delle approssimazioni successive conduce senza difficoltà alla dimostrazione del seguente teorema :

I. - *L'equazione* (1), *almeno per valori di* λ *sufficientemente prossimi a zero, possiede una, ed una sola, soluzione* $U(x)$.

Infatti, definiamo una successione di vettori $U^{(n)}(x)$, mediante le posizioni

$$(4) \qquad \begin{gathered} U^{(0)}(x) = B(x) , \\ U^{(n)}(x) = \lambda \int_D A(x, y) \, U^{(n-1)}(y) \, dy + B(x), \qquad (n = 1, 2, \ldots) . \end{gathered}$$

Si riconosce facilmente che ciascuna $U^{(n)}(x)$ soddisfa alle stesse ipotesi che in a), b), c) si sono enunciate per $B(x)$. Tali ipotesi, invero, sono verificate, per definizione, da $U^{(0)}(x)$, e inoltre, supposto che esse siano verificate da $U^{(n-1)}(x)$, ragionando come nel n. precedente, si trova che l' $\int_D A(x, y) \, U^{(n-1)}(y) \, dy$ non è privo di senso, che esso rappresenta un vettore per cui la somma dei quadrati delle componenti converge per x quasi ovunque in D, che, come risulta dalla (3), la p-ma potenza di ciascuna di tali componenti è una funzione sommabile su D, e infine per la somma dei quadrati delle componenti medesime sussiste la disuguaglianza

$$\left| \int_D A\, U^{(n-1)} dy \right|^p \leq \left(\int_D |A| \cdot |U^{(n-1)}| \, dy \right)^p \leq$$

$$\leq \left(\int_D |A|^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} \cdot \int_D |U^{(n-1)}|^p dy ,$$

sicchè si può concludere appunto che per tutte le $U^{(n)}(x)$ valgono le ipotesi fatte su $B(x)$ in a), b), c).

Ciò posto, dalle (4) deduciamo

$$U^{(n)}(x) - U^{(n-1)}(x) = \lambda \int_D A(x,\, y) \left[U^{(n-1)}(y) - U^{(n-2)}(y) \right] dy ,$$

$$(n = 2,\ 3, \ldots),$$

onde, prendendo la somma dei quadrati delle componenti al primo e al secondo membro,

$$(5) \qquad \begin{aligned} & |U^{(n)} - U^{(n-1)}| \leq \\ & \leq |\lambda| \cdot \left(\int_D |A|^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_D |U^{(n-1)} - U^{(n-2)}|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

e infine, applicando iteratamente questa disuguaglianza.

$$(6) \qquad \begin{aligned} & |U^{(n)} - U^{(n-1)}| \leq \\ & \leq |\lambda|^n \cdot \left(\int_D |A|^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left[\int_D \left(\int_D |A|^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx \right]^{\frac{n-1}{p}} \cdot \left(\int_D |B|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

$$\int_D | U^{(n)} - U^{(n-1)} |^p dx \leq \tag{7}$$
$$\leq | \lambda |^{np} \cdot \left[\int_D \left(\int_D | A |^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx \right]^n \cdot \int_D | B |^p dy .$$

Ne segue che, se λ è tale da rendere verificata la disuguaglianza

$$| \lambda | \cdot \left[\int_D \left(\int_D | A |^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx \right]^{\frac{1}{p}} < 1 , \tag{8}$$

il vettore $U^{(n)}(x)$ converge, per $n \to \infty$, verso un vettore $U(x)$ di Σ_p, giacchè, per la (6), sempre che valga la (8), sarà

$$| U^{(n)} | \leq | U^{(0)} | + | U^{(1)} - U^{(0)} | + \ldots + | U^{(n)} - U^{(n-1)} | \leq \tag{9}$$
$$\leq | B | + \frac{| \lambda | \cdot \left(\int_D | A |^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_D | B |^p dy \right)^{\frac{1}{p}}}{1 - | \lambda | \cdot \left[\int_D \left(\int_D | A |^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx \right]^{\frac{1}{p}}} ,$$

sicchè, in base all'ipotesi *c*), $| U^{(n)} |^p$ resterà inferiore a una funzione indipendente da n e sommabile su D, e pertanto anche la p-ma potenza di $| U(x) |$ sarà sommabile su D. Inoltre, dalla

$$\lim_{n \to \infty} | U(x) - U^{(n)}(x) | = 0 , \tag{10}$$

che sussiste quasi ovunque in D, e dalla disuguaglianza

$$| U | \leq | U^{(n)} | + | U - U^{(n)} | ,$$

in base a (9), si trae, al limite per $n \to \infty$, che $| U(x) |$ è pure maggiorato dall' espressione al secondo membro di (9).

Si conclude dunque che il vettore $U(x)$, verso il quale convergono le approssimazioni successive $U^{(n)}(x)$ definite da (4), è una soluzione di (1), poichè in (4) è lecito passare al limite sotto al segno $\int$ per $n \to \infty$.

Quanto all'unicità della soluzione $U(x)$ trovata (dove naturalmente si considerano come non distinte due soluzioni coincidenti quasi ovunque in D), basta osservare che, se $U(x)$ è una soluzione di (1), ove $B(x)$ sia identicamente zero, sussisterà, in base al ragionamento che precede, la disuguaglianza (5), dove, al posto delle differenze $U^{(n)} - U^{(n-1)}$ ed $U^{(n-1)} - U^{(n-2)}$ al primo e al secondo membro si sostituisca la U, onde la disuguaglianza stessa, iteratamente applicata, mostra che, se, vale la (8), $|\,U(x)\,|$ dev'essere quasi ovunque eguale a zero in D.

Per un fissato valore di λ, chiameremo *risolvente* della *matrice-nucleo* $A(x, y)$, una matrice $A^*(x, y, \lambda)$, per la quale valgano le stesse ipotesi fatte in *a*), *b*), *c*) su $A(x, y)$ e tale che il vettore $U(x)$ definito da

$$U(x) = \lambda \int_D A^*(x, y, \lambda)\, B(y)\, dy + B(x)$$

sia una soluzione di (1), per ogni vettore $B(x)$ verificante le ipotesi per esso specificate in *a*), *b*), *c*).

Da quanto precede, risulta che, se λ verifica la (8), definite le *matrici-nuclei iterate* $A_n(x, y)$ di $A(x, y)$ mediante le posizioni

$$A_1(x, y) = A(x, y), \quad A_n(x, y) = \int_D A_{n-1}(x, t)\, A(t, y)\, dt,$$

$$(n = 2, 3, \ldots)$$

si avrà una matrice-nucleo risolvente definita da

$$A^*(x, y, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A_n(x, y).$$

Per ciascuna delle iterate $A_n(x, y)$, come per la risolvente $A^*(x, y, \lambda)$, così ottenuta, saranno verificate le ipotesi indicate per $A(x, y)$ in $a)$, $b)$, $c)$.

Quanto abbiamo detto in questo n. vale, soltanto con lievi modificazioni formali che non stiamo a indicare esplicitamente, anche nei due casi limiti $p = \infty$ e $p = 1$ menzionati nel n. precedente.

3. – Completa continuità.

La matrice $A(x, y)$ dà luogo a una trasformazione lineare, definita da

$$V(x) = \int_D A(x, y)\, U(y)\, dy,$$

la quale muta punti $U(x)$ di Σ_p in punti $V(x)$ del pari appartenenti a Σ_p.

Alle $a)$, $b)$, $c)$ aggiungeremo da ora in poi un' altra ipotesi, la quale, come adesso proveremo, si presenta come una condizione di completa continuità per la detta trasformazione lineare. Detta $A^{(\nu)}$ la matrice ottenuta da A sostituendovi con degli zeri tutti gli elementi con un indice almeno maggiore di ν, supporremo, cioè, che sia

$$\text{(11)} \qquad \lim_{\nu \to \infty} \min. \int_D \left(\int_D | A - A^{(\nu)} |^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx = 0 .$$

Se è verificata questa condizione, possiamo infatti mostrare che è verificata anche la seguente:

$d)$ per ogni successione di punti $U^{(n)}$ di Σ_p, aventi le norme superiormente limitate da un numero indipendente da n, dalla successione dei punti $V^{(n)} = \int_D A(x, y)\, U^{(n)}(y)\, dy$ si può sempre estrarre una successione convergente.

Per ottenere ciò, approssimiamo in media ogni elemento di $A^{(\nu)}$ mediante una funzione continua, in maniera tale da costruire una matrice $A_k^{(\nu)}$, formata da funzioni continue e avente – come $A^{(\nu)}$ - tutti eguali a zero gli elementi di indici non entrambi $\leq \nu$, per la quale risulti

$$\lim_{k \to \infty} \int_D \left(\int_D | A^{(\nu)} - A_k^{(\nu)} |^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx = 0 . \tag{12}$$

Presa poi un' arbitraria successione di vettori $U^{(n)}$, le cui norme siano superiormente limitate, cominciamo con l' osservare che è

$$\begin{aligned} &\left(\int_D \left| \int_D A \, (U^{(m)} - U^{(n)}) \, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_D \left| \int_D (A - A^{(\nu)}) (U^{(m)} - U^{(n)}) \, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left(\int_D \left| \int_D (A^{(\nu)} - A_k^{(\nu)}) \, (U^{(m)} - U^{(n)}) \, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left(\int_D \left| \int_D A_k^{(\nu)} (U^{(m)} - U^{(n)}) \, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned} \tag{13}$$

Ora, il primo termine al secondo membro si può rendere piccolo a piacere prendendo ν sufficientemente grande entro una certa successione, come risulta da (11) in base alle disuguaglianze

$$\begin{aligned} &\int_D \left| \int_D (A - A^{(\nu)}) (U^{(m)} - U^{(n)}) \, dy \right|^p dx \leq \\ &\leq \int_D \left(\int_D | A - A^{(\nu)} | \cdot | U^{(m)} - U^{(n)} | \, dy \right)^p dx \leq \\ &\leq \int_D \left(\int_D | A - A^{(\nu)} |^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx \cdot \int_D | U^{(m)} - U^{(n)} |^p dy \, ; \end{aligned} \tag{14}$$

per la stessa ragione, per un fissato valore di ν, si può rendere piccolo a piacere il secondo termine al secondo membro di (13), prendendo k sufficientemente grande, come risulta da (12); infine, anche il terzo termine, per un fissato ν e un fissato k, si può rendere piccolo a piacere, prendendo m ed n sufficientemente grandi entro una certa successione, come risulta dal fatto che, essendo gli elementi di $A_k^{(\nu)}$ funzioni continue, il vettore $\int_D A_k^{(\nu)} U^{(n)} dy$ ha per componenti delle funzioni di x, che riescono uniformemente continue al variare di n, sicchè, per una opportuna successione di valori di n, esse convergeranno tutte uniformemente in D.

4. - Teorema dell' alternativa.

Vogliamo ora anzitutto determinare quale sia il sottospazio di Σ_p che viene descritto dal vettore $U(x) - \lambda \int_D A(x, y)\, U(y)\, dy$ al variare di $U(x)$ in Σ_p. A tal fine cerchiamo a quale condizione un vettore $V(x)$, di componenti $v_k(x)$, dello spazio complementare $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$, può verificare la relazione di ortogonalità

$$(15) \qquad \int_D \sum_{h=1}^{\infty} v_h(x) \left[u_h(x) - \lambda \int_D \sum_{k=1}^{\infty} a_{hk}(x, y)\, u_k(y)\, dy \right] dx = 0 ,$$

qualunque sia $U(x)$ in Σ_p. È subito visto, intanto, che ciò effettivamente accade nel caso che $V(x)$ costituisca una soluzione del sistema

$$(16) \qquad v_h(x) = \lambda \int_D \sum_{k=1}^{\infty} a_{kh}(y, x)\, v_k(y)\, dy , \qquad (h = 1, 2, \ldots) ;$$

infatti, in questo caso, è

$$\int_D \sum_{h=1}^{\infty} u_h(x)\, v_h(x)\, dx = \lambda \int_D \sum_{h=1}^{\infty} u_h(x)\, dx \int_D a_{kh}(y, x)\, v_k(y)\, dy =$$

$$= \lambda \int_D \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y) \left(\int_D \sum_{h=1}^{\infty} a_{kh}(y, x)\, u_h(x)\, dx \right) dy ,$$

dove gli scambi fra segni di sommatoria e di integrale sono leciti, sempre in virtù delle ipotesi *a*), *b*), *c*).

Ma possiamo pure dimostrare in maniera assai semplice che, inversamente, soltanto quando $V(x)$ è una soluzione della (16) potrà sussistere la relazione di ortogonalità (15) per tutti i punti $U(x)$ di Σ_p.

Infatti, prendiamo, in particolare, il punto $U(x)$ con tutte le coordinate nulle, tranne la i-esima, la quale sia definita come eguale a zero in tutti i punti D fuori di un certo insieme misurabile $E < D$, ed eguale alla costante $\frac{1}{mis\, E}$ in tutti i punti di E. La (15) diventa allora

$$0 = \frac{1}{mis\, E} \int_E v_i(x)\, dx - \lambda \int_D \sum_{h=1}^{\infty} v_h(x) \left(\int_E a_{hi}(x, y) \frac{1}{mis\, E} dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{mis\, E} \int_E \left[v_i(y) - \lambda \int_D \sum_{h=1}^{\infty} a_{hi}(x, y)\, v_h(x)\, dx \right] dy ,$$

e questa, data l' arbitrarietà dell' insieme E, ed essendo l' indice i pure arbitrario, si riduce, con un passaggio al limite, per x quasi ovunque in D, alla (16).

L' equazione

$$(17) \qquad V(x) = \lambda \int_D \overline{A}(y, x)\, V(y)\, dy ,$$

che rappresenta simbolicamente il sistema (16), si dirà la *omogenea trasposta* della (1).

Il risultato che abbiamo ottenuto col ragionamento ora esposto si può enunciare dicendo che il sottospazio di $\Sigma_{\frac{p}{p-1}}$, ortogonale al sottospazio Σ^* di Σ_p, descritto dal primo membro dell'equazione (1) al variare di $U(x)$ in Σ_p, è quello costituito da tutte e sole le soluzioni $V(x)$ dell'omogenea trasposta. Ciò equivale a dire che il sottospazio $\overline{\Sigma}^*$ di Σ_p, che si ottiene completando Σ^* con l'aggiunta di tutti i suoi punti limiti, è quello costituito da tutti e soli gli $U(x)$ di Σ_p ortogonali alle soluzioni $V(x)$ dell'omogenea trasposta (17); in particolare, quindi, è l'intero spazio Σ_p, se la (1) non ammette soluzioni che non siano equivalenti a zero.

In base a ciò, vogliamo adesso dedurre il seguente teorema:

II. - *Quando l'equazione* (1) *è omogenea, essa ammette al più un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti; quando non è omogenea, condizione necessaria e sufficiente affinchè essa ammetta soluzione (determinata a meno di una delle eventuali soluzioni non equivalenti a zero dell'equazione omogenea associata) è che il termine noto* $B(x)$ *riesca ortogonale a tutte le eventuali soluzioni non equivalenti a zero dell'equazione omogenea trasposta.*

La prima affermazione del teorema risulta dal fatto che, se $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots$ sono vettori linearmente indipendenti di Σ_p, fissato a piacere un numero positivo $\delta < 1$, si può trovare, per ogni n, una combinazione lineare $c_1^{(n)} U^{(1)} + \ldots + c_n^{(n)} U^{(n)}$, che abbia per norma 1 e la cui distanza da una qualsiasi combinazione lineare delle $U^{(1)}, \ldots, U^{(n-1)}$ risulti $> \delta$. Detto, invero, d l'estremo inferiore delle distanze di $U^{(n)}$ da tutte le combinazioni lineari delle $U^{(1)}, \ldots, U^{(n-1)}$, sarà $d > 0$, perchè altrimenti $U^{(n)}$ non sarebbe linearmente indipendente da $U^{(1)}, \ldots, U^{(n-1)}$. Prese delle costanti $\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_{n-1}$ tali che la distanza di $U^{(n)}$ da $\overline{c}_1 U^{(1)} + \ldots + \overline{c}_{n-1} U^{(n-1)}$ riesca $< \frac{d}{\delta}$, la combinazione lineare $c_1^{(n)} U^{(1)} + \ldots + c_n^{(n)} U^{(n)}$ di cui si è affermata l'esistenza si avrà, per esempio, prendendo il vettore $U^{(n)} - (\overline{c}_1 U^{(1)} + \ldots$

$+ \bar{c}_{n-1} U^{(n-1)}$) e dividendone ciascuna componente per la distanza di $U^{(n)}$ da $\bar{c}_1 U^{(1)} + \ldots + \bar{c}_{n-1} U^{(n-1)}$; infatti, la distanza del vettore così ottenuto da un' arbitraria combinazione lineare delle $U^{(1)}, \ldots, U^{(n-1)}$ risulta eguale al rapporto fra la distanza di $U^{(n)}$ da una certa combinazione lineare delle $U^{(1)}, \ldots, U^{(n-1)}$ (che sarà $\geq d$) e la distanza da $U^{(n)}$ a $\bar{c}_1 U^{(1)} + \ldots + \bar{c}_{n-1} U^{(n-1)}$ $\left(\text{che è} < \frac{d}{\delta}\right)$.

Premesso questo, se la (1), per $B = 0$, ammettesse infinite soluzioni linearmente indipendenti $U^{(1)}, \ldots, U^{(n)}, \ldots$, le $c_1^{(n)} U^{(1)} + \ldots + c_n^{(n)} U^{(n)}$ sarebbero ancora delle soluzioni della stessa equazione, risultando sempre $\geq \delta$ la distanza di due qualunque fra esse, e $= 1$ la norma di ciascuna di esse; e ciò riuscirebbe incompatibile col fatto che, in base a *d*), da ogni successione di soluzioni della (1), supposta omogenea, le cui norme siano superiormente limitate, si deve poter estrarre una successione convergente.

Consideriamo ora l' equazione (1) non omogenea, supponendo che il secondo membro sia soggetto alla condizione di ortogonalità a un sistema di soluzioni linearmente indipendenti (e quindi a tutte le soluzioni) dell' omogenea trasposta, in particolare, se l' omogenea trasposta non ammette soluzioni non equivalenti a zero, sia un arbitrario vettore di Σ_p. Da quanto abbiamo premesso risulta che esisterà una successione di vettori $U_1, \ldots, U_k, \ldots$ di Σ_p, tali che, posto

$$(18) \qquad U_k(x) - \lambda \int_D A(x, y)\, U_k(y)\, dy = B_k(x),$$

i vettori B_k convergano verso il secondo membro di (1).

Ciò posto, due casi possono presentarsi: o le norme dei vettori $U_k(x)$ sono superiormente limitate, e allora, per la condizione *d*), dalla successione delle U_k si potrà estrarre una successione convergente, il cui limite sarà una soluzione di (1); oppure le norme dei vettori di una successione estratta da quella dei vettori U_k tendono all' infinito.

In questo caso, si vede anzitutto che la (1), per $B = 0$, deve ammettere soluzioni non equivalenti a zero; a una tale soluzione si perviene infatti, ragionando allo stesso modo come ora, sui vettori U_k, divisi, però, ciascuno per la propria norma, e sulla (18), pure previamente divisa per la norma di U_k. Supposto, dunque, che la (1), per $B=0$, abbia soluzioni non equivalenti a zero, e detto n il massimo numero di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione stessa, siano $U^{(1)}, \ldots, U^{(n)}$ n soluzioni cosiffatte. Fissiamo un numero positivo $\delta < 1$ e, indicato con d_k l'estremo inferiore della distanza di U_k da tutte le combinazioni lineari delle $U^{(1)}, \ldots, U^{(n)}$, prendiamo le costanti $c_1^{(k)}, \ldots, c_n^{(k)}$ in maniera che U_k abbia da $c_1^{(k)} U^{(1)} + \ldots + c_n^{(k)} U^{(n)}$ una distanza $> d_k / \delta$. Allora le norme dei vettori $U_k - (c_1^{(k)} U^{(1)} + \ldots + c_n^{(k)} U^{(n)})$ dovranno essere superiormente limitate, giacchè, se così non fosse, ragionando sempre allo stesso modo su questi vettori, divisi ciascuno per la propria norma, e sulla (18), divisa per la norma medesima, si perverrebbe ad una soluzione di (1), per $B=0$, di norma $=1$ e linearmente indipendente da $U^{(1)}, \ldots, U^{(n)}$, perchè avente da ogni combinazione lineare di $U^{(1)}, \ldots, U^{(n)}$ una distanza $> \delta$; pertanto, si conclude ancora, ragionando come nel primo caso sui vettori

$$U_k - (c_1^{(k)} U^{(1)} + \ldots + c_n^{(k)} U^{(n)}),$$

anzichè sui vettori U_k, l'esistenza di una soluzione per l'equazione non omogenea (1).

Il teorema II è così interamente dimostrato. Esso può completarsi, provando che, se la (1), quando è omogenea, ammette n (≥ 0), e non più di n, soluzioni linearmente indipendenti, lo stesso avverrà pure per la trasposta. Per dimostrare ciò, basta ricalcare un semplice ragionamento, che ho esposto altrove [8], a proposito di un altro problema lineare.

[8] Loc. cit. in [1].

5. - Metodo delle ridotte.

Supponiamo ora che la matrice $A(x, y)$ e il vettore $B(x)$ nella (1) dipendano da un parametro variabile μ: li rappresenteremo, omettendo, per brevità di scrittura, l'indicazione dei punti x, y, con $A(\mu)$, $B(\mu)$; e faremo l'ipotesi che essi, per μ sufficientemente prossimo a un certo valor limite μ_0, verifichino le condizioni a), b), c) (n. 1), e per $\mu \to \mu_0$ convergano verso una matrice A e un vettore B, verificanti le condizioni a), b), c) (n. 1) e d) (n. 3). Cioè sia

$$(19) \qquad \begin{gathered} \lim_{\mu \to \mu_0} \int_D \left(\int_D | A - A(\mu) |^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1} dx = 0 , \\ \lim_{\mu \to \mu_0} \int_D | B - B(\mu) |^p dx = 0 . \end{gathered}$$

Possiamo allora dimostrare il seguente teorema:

III. - *Se la* (1), *per* $B = 0$, *non ammette soluzioni distinte dallo zero, lo stesso avverrà pure per la*

$$(20) \qquad U(\mu) - \lambda \int_D A(\mu)\, U(\mu)\, dy = B(\mu) ,$$

purchè μ *sia sufficientemente prossimo a* μ_0, *e la soluzione* $U(\mu)$ *di* (20) *convergerà, per* $\mu \to \mu_0$, *verso la soluzione* U *di* (1).

Supponiamo che valga l'ipotesi del teorema, consideriamo cioè la (1) per un λ, che non sia un autovalore. E vi sia, se è possibile, una successione di valori di μ, per ciascuno dei quali esista una soluzione $U(\mu)$, distinta dallo zero, dell'equazione omogenea associata a (20). Scriveremo tale equazione nella forma seguente

$$U(\mu) = \lambda \int_D A\, U(\mu)\, dy - \lambda \int_D (A - A(\mu))\, U(\mu)\, dy\,, \tag{21}$$

supponendo inoltre $U(\mu)$ ridotto ad aver norma $= 1$.

Al secondo membro di (21), poichè A verifica, per ipotesi, la condizione *d*) e $U(\mu)$ è normalizzato, il primo termine, per una opportuna successione di valori di μ, convergerà verso un vettore limite U_0, mentre il secondo termine convergerà a zero, in base alla prima delle (19), giacchè si hanno le disuguaglianze

$$\begin{aligned} &\int_D \left| \int_D (A - A(\mu))\, U(\mu)\, dy \right|^p dx \leq \int_D \left(\int_D |A - A(\mu)| \cdot |U(\mu)|\, dy \right)^p dx \leq \\ (22)\qquad &\leq \int_D \left(\int_D |A - A(\mu)|^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx \cdot \int_D |U(\mu)|^p\, dy\,. \end{aligned}$$

Dunque anche il primo membro $U(\mu)$ di (21), per la detta successione di valori di μ, tenderà a U_0. Ma allora U_0 sarebbe una soluzione non equivalente a zero (perchè di norma $= 1$) dell'equazione omogenea associata alla (1), contro l'ipotesi fatta.

Supposto ora che λ non sia un autovalore per la (1) (e quindi, per quanto abbiamo visto, neppure per la (20), purchè μ sia abbastanza prossimo a μ_0), è facile riconoscere che le norme dei vettori $U(\mu)$, in prossimità di $\mu = \mu_0$, devono essere superiormente limitate, giacchè in caso contrario, per una opportuna successione di valori μ, il vettore $B(\mu)$ diviso per la norma di $U(\mu)$ convergerebbe a zero, e ragionando come sopra sulla (20), previamente divisa per la norma di $U(\mu)$, si dedurebbe l'esistenza di un vettore U_0, di norma $= 1$, soluzione dell'equazione omogenea associata alla (1).

A questo punto, è ormai chiaro, in base alle (19) e all'ipotesi che A verifichi la condizione *d*), che da ogni successione di valori di μ si può estrarre una sottosuccessione per cui $U(\mu)$ converge; inoltre il limite è unico, perchè deve essere una soluzione U della (1), dove λ non è un autovalore. Sicchè resta provato l'asserto.

In particolare si può assumere in luogo di (20), come sistema approssimante il sistema infinito di equazioni integrali rappresentato da (1), quello che si chiama la *ridotta* ν*-esima*, e cioè il sistema finito di ordine ν, che si ottiene facendo variare tutti gli indici da 1 a ν, anzichè da 1 a ∞. Indicando con $A^{(\nu)}$, $B^{(\nu)}$ le ridotte ν-esime di A e B, ottenute sostituendo con degli zeri tutti gli elementi con un indice $> \nu$, e supposto che siano verificate le condizioni *a*) *b*), *c*) e le relazioni di limite

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_D \left(\int_D | A - A^{(\nu)} |^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx = 0 , \qquad \lim_{\nu \to \infty} \int_D | B - B^{(\nu)} |^p dx = 0 ,$$

(la prima delle quali, come abbiamo visto (n. 3), porta di conseguenza la condizione *d*)), il teorema ora dimostrato ci assicura che si può applicare alla (1) il *metodo delle ridotte*, consistente nel ricercare la soluzione del sistema infinito, come limite della soluzione della ridotta ν-esima, per $\nu \to \infty$.

6. - Riduzione del sistema infinito a un sistema finito nel caso della completa continuità.

Supponendo sempre verificata la condizione di completa continuità espressa dalla (11), mostreremo ora come, servendosi del risultato ottenuto nel n. 2 circa l'applicabilità in piccolo del metodo delle approssimazioni successive, si possa ricondurre la risoluzione del sistema infinito a quella di un sistema finito.

A tale scopo, cominciamo col fissare un numero positivo r arbitrariamente grande, e consideriamo la (1), per tutti i valori di λ in modulo minori di r. In base alla (11), si potrà determinare un indice ν tale che sia

$$(23) \qquad r \cdot \left[\int_D \left(\int_D | A - A^{(\nu)} |^{\frac{p}{p-1}} dy \right)^{p-1} dx \right]^{p-1} < 1 .$$

Ciò posto, scomponiamo la matrice A nella somma di due altre, che diremo $P^{(\nu)}$ e $Q^{(\nu)}$, la prima ottenuta da A sostituendovi con degli zeri tutti gli elementi aventi uno dei due indici $\leq \nu$ e l'altro $> \nu$, la seconda ottenuta da A sostituendovi con degli zeri tutti gli elementi con indici entrambi $\leq \nu$ e quelli con indici entrambi $> \nu$.

Consideriamo, anzitutto, due casi particolari: 1°) quello in cui la A si riduca alla sola $P^{(\nu)}$, 2°) quello in cui la A si riduca alla sola $Q^{(\nu)}$.

Nel primo di questi due casi, essendo verificata la (23), vediamo che si potrà definire, per tutti i valori di λ per cui $|\lambda| < r$, fatta eccezione soltanto al più per un numero finito di tali valori, la matrice-nucleo risolvente $P^*(x, y, \lambda)$ di $P^{(\nu)}(x, y)$, la quale sarà dello stesso tipo di $P^{(\nu)}$, avrà, cioè, tutti zero gli elementi con uno dei due indici $\leq \nu$ e l'altro $> \nu$. Infatti, indicati con $p_{hk}(x, y)$ gli elementi di $P^{(\nu)}(x, y)$, il sistema rappresentato da (1) diventa, nel caso attuale,

$$(24)\quad \begin{cases} u_h(x) = \lambda \displaystyle\int_D \sum_{k=1}^{\nu} p_{hk}(x, y)\, u_k(y)\, dy + b_h(x), & (h = 1, 2, \ldots, \nu), \\ u_h(x) = \lambda \displaystyle\int_D \sum_{k=\nu+1}^{\infty} p_{hk}(x, y)\, u_k(y)\, dy + b_h(x), & (h = \nu + 1, \nu + 2, \ldots); \end{cases}$$

si hanno, cioè, due sistemi distinti, il primo di ν equazioni nelle ν incognite $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, l'altro di infinite equazioni nelle infinite incognite $u_{\nu+1}, u_{\nu+2}, \ldots$. Il primo, tranne al più che per un numero finito di valori di λ, per $|\lambda| < r$, ammette una matrice-nucleo risolvente, a ν linee e ν colonne, mentre al secondo, in virtù delle disuguaglianze (23) e $|\lambda| < r$, potrà (n. 2) applicarsi il metodo delle approssimazioni successive, il quale fornisce pure una matrice-nucleo risolvente, questa volta a infinite linee e infinite colonne. Giustaponendo queste due matrici e completando il quadro con degli zeri, sì da formare una matrice infinita dello stesso tipo di $P^{(\nu)}$, si viene a ottenere evidentemente la risolvente $P^*(x, y, \lambda)$.

Nel secondo caso particolare, il sistema rappresentato dalla (1), indicati con $q_{hk}(x, y)$ gli elementi di $Q^{(\nu)}(x, y)$, si riduce a

$$
(25) \quad
\begin{aligned}
u_h(x) &= \lambda \int_D \sum_{k=\nu+1}^{\infty} q_{hk}(x, y)\, u_k(y)\, dy + b_h(x), \qquad (h = 1, 2, \ldots, \nu), \\
u_h(x) &= \lambda \int_D \sum_{k=1}^{\nu} q_{hk}(x, y)\, u_k(y)\, dy + b_h(x), \quad (h = \nu + 1, \nu + 2, \ldots).
\end{aligned}
$$

Sostituendo nelle prime ν di queste equazioni i valori delle $u_k(y)$ che si deducono dalle rimanenti, si ricava

$$
u_h(x) = \lambda^2 \int_D \sum_{i=1}^{\nu} \left(\int_D \sum_{k=\nu+1}^{\infty} q_{hk}(x, y)\; q_{ki}(y, t)\, dy \right) u_i(t)\, dt +
$$

$$
+ \lambda \int_D \sum_{k=\nu+1}^{\infty} q_{hk}(x, y)\, b_k(y)\, dy + b_h(x);
$$

questo è un sistema di ν equazioni integrali nelle ν funzioni incognite $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, e ammette quindi - fatta eccezione, per $|\lambda| < r$, soltanto al più per un numero finito di valori di λ - una matrice-nucleo risolvente di ordine ν. Sostituendo le $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ così determinate nella seconda delle (25), per $h = \nu + 1, \nu + 2, \ldots$, si ricavano poi anche le $u_{\nu+1}, u_{\nu+2}, \ldots$

Passiamo ora al caso generale che sia $A = P^{(\nu)} + Q^{(\nu)}$, sicchè potremo scrivere la (1)

$$
(26) \quad U(y) = \lambda \int_D P^{(\nu)}(x, y)\; U(y)\, dy + \lambda \int_D Q^{(\nu)}(x, y)\; U(y) dy + B(x).
$$

Questa equazione, per $|\lambda| < r$, tranne al più per un numero finito di valori di λ, equivale, per quanto abbiamo visto nel primo caso particolare, alla

$$
(27) \qquad \begin{aligned} U(x) = \lambda^2 \int_D \left(\int_D P^*(x, y, \lambda)\, Q^{(\nu)}(y, t)\, dy \right) U(t)\, dt \,+ \\ + \lambda \int_D P^*(x, y, \lambda)\, B(y)\, dy + B(x) , \end{aligned}
$$

la quale a sua volta è una equazione integrale fra matrici infinite, che rientra nel secondo dei due casi particolari innanzi considerati, giacchè nella matrice prodotto $P^* Q^{(\nu)}$ riescono tutti zero gli elementi con indici entrambi $\leq \nu$, oppure entrambi $> \nu$.

I valori eccettuati di λ sono anzitutto quelli per cui non esiste la risolvente $P^*(x, y, \lambda)$, o ciò che è lo stesso, gli autovalori della ridotta ν–esima di $A(x, y)$. Ma se è $|\lambda| < r$ e λ è un autovalore di $A^{(\nu)}$ per ogni ν per cui vale la (23), allora per la (19) e per quanto abbiamo dimostrato nel n. prec., λ sarà pure un autovalore di $A(x, y)$. Vi sono poi i valori di λ, per cui la omogenea associata a (27) ammette soluzione distinta dallo zero. Ma se è verificata la omogenea associata a (27) sarà verificata pure di conseguenza la omogenea associata a (26), cioè ancora λ è un autovalore di $A(x, y)$.

Inoltre, poichè, come si è visto, la (27) equivale a un sistema di ordine ν, i cui coefficienti e termini noti saranno funzioni meromorfe in λ, riconosciamo che l'equazione (1) ammette una matrice-nucleo risolvente $A^*(x, y, \lambda)$ per tutti i valori di λ, tranne al più per quelli che sono zeri di una certa funzione intera, i quali sono gli autovalori di $A(x, y)$. Per gli autovalori non esistono quindi punti di accumulazione al finito.

7. – Alcuni altri tipi di sistemi infiniti riducibili a sistemi finiti.

Notevoli difficoltà si presentano, in generale, se si vogliono sostituire, nello studio che precede, le ipotesi *a*), *b*) *c*), *d*) con altre meno restrittive; del resto, anche lasciando cadere soltanto l'ipotesi di completa continuità formulata in *d*), o quella espressa dalla (11), dei semplicissimi esempi mostrano come non sussistano più i risultati a cui siamo pervenuti.

Supponiamo, p. es., in primo luogo, che la matrice $A(x, y)$ abbia gli elementi al di sopra della diagonale principale tutti nulli. In tal caso, il nostro sistema si riduce al sistema ricorrente

$$
(28) \qquad
\begin{aligned}
u_n(x) &= \lambda \int_D a_{nn}(x, y)\, u_n(y)\, dy + \bar{b}_n(x)\,, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots)\,, \\
\bar{b}_n(x) &= \lambda \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}(x, y)\, u_k(y)\, dy + b_n(x)\,,
\end{aligned}
$$

cioè la risoluzione dell' equazione (1) si riduce alla successiva risoluzione di infinite equazioni integrali ordinarie. Si avrà quindi una matrice-nucleo risolvente $A^*(x, y, \lambda)$, anch' essa con gli elementi al di sopra della diagonale principale tutti nulli, e ciascun suo elemento sarà una funzione meromorfa di λ. Gli elementi della diagonale principale di $A^*(x, y, \lambda)$ saranno i nuclei risolventi $a^*_{nn}(x, y, \lambda)$ degli $a_{nn}(x, y)$; e per ogni valore λ, che non sia polo per nessuno degli $a^*_{nn}(x, y, \lambda)$, l' equazione (1) ammetterà una, ed una sola, soluzione, qualunque sia il termine noto, in particolare l' equazione omogenea non avrà altra soluzione che lo zero. Se invece λ è un autovalore di uno dei nuclei $a_{nn}(x, y)$, allora la (1) o non avrà nessuna soluzione, o ne avrà infinite; in tal caso, λ potrà dunque dirsi un autovalore della (1).

Si noti, però, che, secondo questa definizione, se λ è un autovalore, l' equazione omogenea associata a (1) può anche non ammettere soluzioni distinte dallo zero. Se infatti supponiamo che vi sia una successione illimitata di indici $r_1, r_2, \ldots$, tali che λ sia autovalore di $a_{nn}(x, y)$ quando, e solo quando, n è uno degli $r_1, r_2, \ldots$, supposte tutte nulle le b_n in (28), si troverà che le $u_1, \ldots, u_{r_1-1}$, e quindi anche le $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{r_1}$, sono del pari tutte nulle; per $n = r_1$ la prima delle (28), essendo omogenea, avrà almeno una soluzione u_{r_1} non nulla, ma poi, per $n = r_2$, essendo, in generale non omogenea, ammetterà soluzione soltanto a patto che $\overline{b}_{r_2}$ verifichi certe particolari condizioni. Se ciò non è, bisognerà prendere tutte nulle anche le u_{r_1}, $u_{r_1+1}, \ldots, u_{r_2-1}$; e così seguitando, si vede che, se non sono verificate per le b_k certe condizioni lineari (in numero finito per ciascuna b_k) tutte le u_k dovranno essere zero. Si noti pure che gli autovalori λ di (1) saranno, in questo caso, al più una infinità numerabile, ma potranno non riuscire isolati.

Gli stessi risultati varranno nel caso, lievemente più generale, che, per una certa successione di interi $n_1, n_2, \ldots$, siano tutti nulli in $A(x, y)$ gli elementi a_{hk}, per cui $n_1 + \ldots + n_{\nu-1} < h \leq \leq n_1 + \ldots + n_\nu$, $k > n_1 + \ldots + n_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$, perchè allora, per le componenti del vettore U, si viene pure a trovare un sistema ricorrente, la cui risoluzione equivale alla successiva risoluzione di una successione di sistemi, ciascuno dei quali di un numero finito n_ν di equazioni integrali, con lo stesso numero di funzioni incognite.

Supponiamo, in secondo luogo, che la matrice $A(x, y)$ sia il prodotto di due altre $L(x, y)$ ed $M(y)$, di cui la prima, funzione dei due punti x, y, abbia nulli tutti gli elementi $l_{hk}(x, y)$ con $k > n$, e la seconda, funzione solo di y, abbia nulli tutti gli elementi $m_{hk}(y)$ con $h > n$. Sulle l_{hk} ed m_{hk} facciamo inoltre le seguenti ipotesi:

α) le serie $\sum_{i=1}^{\infty} m_{hi}(x)\, b_{ik}(x)$, $\sum_{i=1}^{\infty} m_{hi}(x)\, l_{ik}(x, y)$ (le quali costituiscono gli elementi delle matrici prodotto $M(x) \cdot B(x)$ e $M(x) \cdot L(x, y)$) siano quasi ovunque convergenti;

β) le somme parziali $\sum_{i=1}^{\nu} m_{hi}(x)\, l_{ik}(x, y)$, per $h, k = = 1, 2, \ldots, n$, siano tutte inferiori in valore assoluto a una certa funzione $\mu(x, y)$;

γ) la condizione a) (n. 1) sia verificata dalla $\mu(x, y)$ e dagli elementi delle matrici $L(x, y)$, $M(x) \cdot L(x, y)$, $B(x)$, $M(x) \cdot B(x)$.

Il sistema che consideriamo nel caso attuale si scrive dunque

$$(29) \qquad u_h(x) = \lambda \int_D \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} l_{hi}(x, y)\, m_{ik}(y)\, u_k(y)\, dy + b_h(x),$$
$$(h = 1,\ 2, \ldots).$$

Prendiamo ora il seguente sistema di ordine n nelle incognite $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$(30) \qquad v_h(x) = \lambda \int_D \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} m_{hi}(x)\, l_{ik}(x, y)\, v_k(y)\, dy +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty} m_{hi}(x)\, b_i(x), \qquad (h = 1,\ 2, \ldots, n),$$

che ha senso in virtù di α). Questo sistema, se λ non è un autovalore, ammette, in base a γ), una ed una sola, soluzione $v_1, v_2, \ldots, v_n$ con le $|v_h|^{\frac{p}{p-1}}$ sommabili.

Dico che le $u_h(x)$ definite da

$$(31) \qquad u_h(x) = \lambda \int_D \sum_{k=1}^{n} l_{hk}(x, y)\, v_k(y)\, dy + b_h(x), \quad (h = 1, 2, \ldots),$$

(dove l'integrale al secondo membro ha senso, per γ)) costituiscono una soluzione del sistema dato. Infatti, il secondo membro di (30), essendo verificata la condizione β), si può anche scrivere

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_{hi}(x) \left[\lambda \int_D \sum_{k=1}^{n} l_{ik}(x, y)\, v_k(y)\, dy + b_i(x) \right],$$

cioè, per (31), $\sum_{i=1}^{\infty} m_{hi}(x)\, u_i(x)$. Ma sostituendo questa serie al posto di $v_h(x)$ nel secondo membro della (31) stessa, si trova appunto la (29).

Se, inversamente, cerchiamo una soluzione $u_i(x)$ di (29), tale che le n serie $\sum_{i=1}^{\infty} m_{hi}(x)\, u_i(x)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ siano convergenti, vediamo che queste devono costituire una soluzione del sistema finito (30). E poichè il ragionamento sussiste in particolare quando le b_h sono tutte zero, quando cioè sono omogenei tanto il sistema (29) quanto quello (30) al quale ci siamo ricondotti, possiamo dire che, in questo caso, gli autovalori di (29) sono quelli del sistema finito (30). Non si presentano più, pertanto, nell' esempio attuale, quelle anomalie circa gli autovalori, che abbiamo rilevate nell' esempio precedentemente considerato.