RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

C. MIRANDA

Su di un problema al contorno relativo all'equazione del calore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 8 (1937), p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1937__8__1_0>

SU DI UN PROBLEMA AL CONTORNO RELATIVO ALL' EQUAZIONE DEL CALORE [1]

Memoria di C. MIRANDA *a Roma.*

In una mia nota [2], recentemente presentata all' Accademia delle Scienze della Società Reale di Napoli, ho fatto vedere come, valendosi di un nuovo metodo di inversione della trasformata di LAPLACE, si possa pervenire alla formula risolutiva di un problema al contorno relativo all' equazione del calore, che è di tipo diverso da quelli ordinariamente considerati. Tale problema si può far rientrare come caso particolare nel seguente:

Integrazione dell' equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t),$$

con le condizioni ai limiti

$$u(1, t) = 0\,, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = 0$$

e la condizione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x)\,,$$

(1) Lavoro eseguito nell' *Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.*

(2) C. MIRANDA, *Sull' inversione della trasformata di Laplace.* [In corso di stampa nei Rend. della R. Acc. delle Sc. della Soc. R. di Napoli, Febbraio 1937].

dove k è una costante positiva e $u_0(x)$, $f(x, t)$ sono delle funzioni assegnate.

Nella presente memoria farò vedere come, valendosi del metodo esposto nella mia nota già citata, si possa pervenire a scrivere anche la formula risolutiva del problema sopra enunciato. Siccome però non si conosce alcun teorema di esistenza e di unicità per la soluzione del nostro problema, occorre anche far vedere che la funzione fornita dalla formula a cui si perviene, supponendo esistente la soluzione, verifica tutte le equazioni del problema.

La soluzione trovata si presenta sotto la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \operatorname{sen} \mu_n (1 - x),$$

dove le quantità μ_n sono le radici positive dell' equazione

$$\mu \operatorname{sen} \mu - k \cos \mu = 0.$$

Poichè il sistema delle funzioni $\operatorname{sen} \mu_n (1 - x)$ non è ortogonale è stato necessario un preliminare studio, inteso a investigare la possibilità di sviluppare un' assegnata funzione $F(x)$ in serie di tali funzioni. Una più accurata revisione della bibliografia riguardante l' argomento mi ha portato, però, a riconoscere che buona parte dei risultati da me ottenuti, in queste ricerche preliminari, sono contenuti, salvo taluni cambiamenti di natura formale, in una memoria dello KNESER (³) sulle equazioni integrali così dette « caricate ». Mi limiterò pertanto a richiamare i teoremi di cui dovrò valermi, esponendo soltanto la dimostrazione di quelli che sono da ritenersi nuovi.

(³) A. KNESER, *Belastete Integralgleichungen.* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo, Tomo 37 (1914_1) pagg. 169–197].

1 – Autovalori ed autosoluzioni di un particolare problema ai limiti.

Consideriamo il problema al contorno relativo all' equazione differenziale

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda u = 0 \tag{1}$$

e alle condizioni ai limiti

$$u(1) = 0 , \tag{2}$$

$$\lambda u(0) - k u'(0) = 0 , \tag{3}$$

dove k è una costante reale e positiva.

Si trova facilmente che gli autovalori del parametro λ nel detto problema al contorno sono tutte e sole le radici dell'equazione

$$\sqrt{\lambda} \operatorname{sen h} \sqrt{\lambda} + k \cos h \sqrt{\lambda} = 0 . \tag{4}$$

Posto $\lambda = -\mu^2$ la (4) diventa

$$\mu \operatorname{sen} \mu - k \cos \mu = 0 , \tag{5}$$

che può anche scriversi

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{k}{\mu} . \tag{5'}$$

Si vede subito che la (5') ha infinite radici reali

$$\pm \mu_0 , \pm \mu_1 , \ldots , \pm \mu_n , \ldots ,$$

soddisfacenti alle limitazioni

$$0 < \mu_0 < \frac{\pi}{2} , \tag{6}$$

$$(7) \qquad n\pi < \mu_n < n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Dalla diseguaglianza $\operatorname{tang} \mu \geq \mu - n\pi$, valida per $n\pi \leq \leq \mu < n\pi + \frac{\pi}{2}$ si trae facilmente

$$n\pi < \mu_n < \frac{n\pi + \sqrt{n^2\pi^2 + 4k}}{2},$$

da cui, per $n > 0$,

$$(7') \qquad n\pi < \mu_n < n\pi + \frac{k}{n\pi}.$$

La (7') può essere vantaggiosamente sostituita alla (7) per $n > \frac{2k}{\pi^2}$.

Si trova anche che gli autovalori $\lambda_n = -\mu_n^2$ sono tutti di rango uno, giacchè ad ognuno di essi compete la sola autosoluzione

$$c_n \operatorname{sen} \mu_n (1 - x),$$

designando c_n una costante arbitraria.

Detta ora $f(x)$ una funzione continua nell' intervallo (0, 1), indichiamo con $u(x, \lambda)$ la soluzione dell' equazione

$$(1') \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda u = f(x),$$

soddisfacente alle (2) e (3). Tale funzione è meromorfa in λ ed ammette per poli del primo ordine tutti e soli gli autovalori λ_n. Essa è poi sviluppabile in serie di frazioni razionali al modo di Cauchy:

$$(8) \qquad u(x,\lambda) = -2k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \mu_n (1-x)}{(\lambda + \mu_n^2)(k + \operatorname{sen}^2 \mu_n)} \int_0^1 f(y) \operatorname{sen} \mu_n (1-y)\, dy,$$

risultando la serie a secondo membro di detta formula uniformemente convergente nell'intervallo (0, 1).

Dalla (8) si può poi dedurre il seguente teorema:

Teorema I. - *Se* $F(x)$ *è una funzione continua nell'intervallo* (0, 1), *con le sue derivate dei primi due ordini, nulla per* $x=1$, *si ha*

$$F(x)= \tag{9}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{k+\operatorname{sen}^2\mu_n}\left[F(0)\operatorname{sen}\mu_n+k\int_0^1 F(y)\operatorname{sen}\mu_n(1-y)\,dy\right],$$

risultando la serie a secondo membro della (9) *uniformemente convergente nell'intervallo* (0, 1).

Per esempio per $F(x)=1-x$ si ha

$$1-x=2k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\mu_n\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{\mu_n^2(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}, \tag{10}$$

e, per $F(x)=\frac{1}{2}(1-x^2)$,

$$\frac{1-x^2}{2}=2k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{\mu_n^2(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}\cdot\int_0^1\operatorname{sen}\mu_n(1-y)\,dy. \tag{11}$$

Osserveremo anche che, derivando la (10) e ponendo $x=0$, si ha

$$1=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2\mu_n}{k+\operatorname{sen}^2\mu_n}. \tag{12}$$

2 - Sulla convergenza in media delle serie di autosoluzioni.

Dalle relazioni

$$\int_0^1 \operatorname{sen} \mu_m (1-x) \operatorname{sen} \mu_n (1-x)\, dx =$$

$$\begin{cases} = -\dfrac{\operatorname{sen} \mu_m \operatorname{sen} \mu_n}{k} & \text{per } m \neq n \\[2ex] = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 \mu_n}{k} + \dfrac{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n}{2k} & \text{per } m = n, \end{cases}$$

detta $F(x)$ una funzione reale, di quadrato sommabile nell' intervallo $(0, 1)$, segue

$$(13) \qquad \int_0^1 \left| F(x) - 2k \sum_{n=0}^{q} \frac{\operatorname{sen} \mu_n (1-x)}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \int_0^1 F(y) \operatorname{sen} \mu_n (1-y) dy \right|^2 dx =$$

$$= \int_0^1 F^2(x)\, dx - 2k \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \left(\int_0^1 F(x) \operatorname{sen} \mu_n (1-x)\, dx \right)^2 -$$

$$- 4k \left(\sum_{n=0}^{q} \frac{\operatorname{sen} \mu_n}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \int_0^1 F(x) \operatorname{sen} \mu_n (1-x)\, dx \right)^2,$$

da cui

$$(14) \qquad 2k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \left(\int_0^1 F(x) \operatorname{sen} \mu_n (1-x)\, dx \right)^2 \leq \int_0^1 F^2(x)\, dx\,.$$

Dico ora che sussiste il seguente

Lemma. *Per ogni funzione reale* $F(x)$, *di quadrato sommabile nell' intervallo* $(0, 1)$, *si ha*

$$(15) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \mu_n}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \int_0^1 F(x) \operatorname{sen} \mu_n (1 - x)\, dx = 0\,,$$

$$(16) \qquad 2k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \left(\int_0^1 F(x) \operatorname{sen} \mu_n (1 - x)\, dx \right)^2 = \int_0^1 F^2(x)\, dx\,.$$

Supponiamo in primo luogo $F(x)$ nulla per $x = 1$ e dotata di derivate prima e seconda continue nell' intervallo $(0, 1)$. La (15) si può allora ottenere ponendo $x = 0$ nella (9) e tenendo presente la (12). Dopo ciò moltiplicando la (9) per $F(x)$ e integrando nell' intervallo $(0, 1)$ si perviene anche alla (16).

Per dimostrare ora il teorema nella sola ipotesi che $F(x)$ sia di quadrato sommabile consideriamo la funzione

$$F_p(x) = 2 \sum_{n=1}^{p} \operatorname{sen} n\pi (1 - x) \int_0^1 F(y) \operatorname{sen} n\pi (1 - y)\, dy\,,$$

e diciamo (15_p) e (16_p) le formule, certo valide, che si ottengono dalle (15) e (16) ponendo in esse $F_p(x)$ al posto di $F(x)$. Basandosi sulle (7′) e (14) e sulla circostanza che le $F_p(x)$ convergono in media verso $F(x)$ e che i termini della serie (16_p) sono tutti positivi, si mostra facilmente che le serie a primo membro delle (15_p) e (16_p) convergono uniformemente rispetto a p. Si può, pertanto, passare al limite in dette formule per $p \to \infty$ e si perviene cosí alle (15) e (16).

Siamo oramai in grado di dimostrare il seguente

Teorema II. - *Se $F(x)$ è una funzione reale, di quadrato sommabile nell' intervallo $(0, 1)$, la serie a secondo membro della (9) converge in media verso $F(x)$.*

Ed invero la detta serie può considerarsi come somma delle due seguenti

$$2k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \mu_n (1 - x)}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \int_0^1 F(y) \operatorname{sen} \mu_n (1 - y)\, dy\,,$$

$$2\,F(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\mu_n \operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{k+\operatorname{sen}^2\mu_n},$$

la prima delle quali converge in media verso $F(x)$, in virtù delle (13) e (15). Basterà quindi far vedere che la seconda delle dette serie converge in media a zero Dalla equaglianza

$$\int_0^1\left[\sum_{n=p}^{p+q}\frac{\operatorname{sen}\mu_n \operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{k+\operatorname{sen}^2\mu_n}\right]^2 dx =$$

$$=\frac{1}{2k}\sum_{n=p}^{p+q}\frac{\operatorname{sen}^2\mu_n}{k+\operatorname{sen}^2\mu_n}-\frac{1}{k}\left(\sum_{n=p}^{p+q}\frac{\operatorname{sen}^2\mu_n}{k+\operatorname{sen}^2\mu_n}\right)^2$$

segue, immediamente, l' asserita convergenza in media; che la somma della nostra serie sia, poi, lo zero, discende in modo ovvio dalla (15).

3. - Un nuovo criterio di convergenza degli sviluppi in serie di autosoluzioni.

Prima di iniziare lo studio del nostro problema al contorno dobbiamo far vedere che la (9) è valida in ipotesi sulla $F(x)$ meno restrittive di quelle imposte dal teorema I. Sussiste a questo proposito il seguente teorema:

Teorema III. - *Il teorema* I *sussiste nella sola ipotesi che* $F(x)$ *sia continua e a variazione limitata nell'intervallo* (0, 1) *e nulla per* $x = 1$.

In virtù del teorema II, se la serie a secondo membro della (9) converge uniformemente, essa ha certo per somma $F(x)$. Per dimostrare la uniforme convergenza della detta serie mettiamoci, in un primo momento, nell'ipotesi che $F(x)$ sia nulla anche per $x = 0$.

In virtù della (7′) si ha, per $n > 0$,

$$|\operatorname{sen}\mu_n(1-x) - \operatorname{sen} n\pi(1-x)| < \frac{k}{n\pi}$$

onde segue, applicando il lemma del n. 2, che la uniforme convergenza della serie (9) implica quella della serie

$$(17) \qquad 2k\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi(1-x)}{k+\operatorname{sen}^2\mu_n}\int_0^1 F(y)\operatorname{sen}\mu_n(1-y)\,dy\,.$$

Detto ora M il minimo modulo di $F(x)$ e V la sua variazione totale nell' intervallo (0, 1) si ha, per $n > 0$, applicando il teorema della media ([4]) e tenendo presente la (7′),

$$\left|\int_0^1 F(y)\operatorname{sen}\mu_n(1-y)\,dy - \int_0^1 F(y)\operatorname{sen} n\pi(1-y)\,dy\right| \leq \frac{4k(M+V)}{n^2\pi^2}\,.$$

Pertanto la serie (17) sarà certo uniformemente convergente se tale è la serie

$$(18) \qquad 2k\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi(1-x)}{k+\operatorname{sen}^2\mu_n}\int_0^1 F(y)\operatorname{sen} n\pi(1-y)\,dy\,.$$

La uniforme convergenza di tale serie è infine assicurata da noti teoremi, in virtù delle ipotesi fatte su $F(x)$ e della circostanza che le quantità

$$\frac{k}{k+\operatorname{sen}^2\mu_n}$$

formano una successione crescente, superiormente limitata dall' unità.

([4]) Cfr. M. Picone, *Appunti di Analisi superiore* [Editore Rondinella Napoli], pag. 248 in nota.

Il nostro teorema resta così completamente dimostrato nel caso particolare in cui è $F(0) = 0$. Per dimostrare il teorema nel caso generale basta osservare che una funzione $F(x)$, verificante le ipotesi del terema si può sempre considerare la somma di una funzione $\varphi(x)$ continua e a variazione limitata nell'intervallo $(0, 1)$, nulla per $x = 0$ e $x = 1$ e della funzione lineare $F(0)(1 - x)$, che abbiamo già visto essere sviluppabile in serie uniformemente convergente di funzioni sen $\mu_n (1 - x)$.

4. - Posizione di un problema al contorno relativo all'equazione del calore.

Come abbiamo già detto, il compito principale che ci siamo prefissi di assolvere in questo lavoro, è quello dell'integrazione dell'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) , \tag{19}$$

con le condizioni ai limiti

$$u(1, t) = 0 , \tag{20}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = 0 , \tag{21}$$

e la condizione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x) . \tag{22}$$

Alla soluzione $u(x, t)$ del nostro problema imporremo inoltre di verificare le seguenti ipotesi:

a) $u(x, t)$ è funzione continua di x e t per $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$.

b) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}$ sono funzioni continue di x e t per $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$.

c) Comunque si assegni un numero complesso λ, con parte reale positiva e un numero positivo ε, gli integrali

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x, t)\, dt\,, \quad \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \frac{\partial u}{\partial x}\, dt\,, \quad \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dt$$

sono uniformemente convergenti al variare di x nell'intervallo $(0, 1)$ e inoltre è

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t)\, e^{-\lambda t} = 0\,.$$

Affinchè $u(x, t)$ possa soddisfare l'ipotesi a) è intanto necessario supporre che $u_0(x)$ sia una funzione continua nell'intervallo $(0, 1)$, nulla per $x = 1$. Su $f(x, t)$ faremo poi l'ipotesi che essa sia una funzione continua per $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ e che, inoltre, comunque si assegni un numero positivo α, se ne possa trovare un altro $L(\alpha)$ tale che riesca

$$| f(x, t) | \leq L(\alpha)\, e^{\alpha t}\,.$$

In accordo con le ipotesi fatte su $u(x, t)$ e $f(x, t)$ richiederemo inoltre che le (19) e (21) siano soddisfatte per $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$.

Il problema al contorno costituito dalle equazioni (19), (20), (21), (22), che abbiamo così precisato, sarà designato in seguito come problema A) e per esso stabiliremo nel paragrafo seguente il teorema di unicità. Perverremo poi al teorema di esistenza e alla formula risolutiva per il nostro problema, considerando separatamente il caso in cui sia $f(x, t) = 0$ e il caso in cui sia $u_0(x) = 0$. Questi due problemi particolari, alla cui risoluzione si può evidentemente ricondurre quella del problema A), saranno designati rispettivamente come problema B) e problema C). Avvertiamo fin da ora che la dimostrazione del teorema di esistenza per il problema C) richiede qualche ulteriore ipotesi nella funzione $f(x, t)$, che sarà a suo tempo precisata.

5. - Teorema di unicità per il problema A).

Supposto che esista una soluzione $u(x, t)$ del problema A), poniamo

$$u^*(x, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x, t)\, dt, \tag{23}$$

$$u_\varepsilon^*(x, \lambda) = \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} u(x, t)\, dt.$$

La funzione $u^*(x, \lambda)$ dicesi la trasformata di LAPLACE di di $u(x, t)$.

In virtù dell'ipotesi c) si ha

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = \frac{du_\varepsilon^*}{dx}, \quad \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dt = \frac{d^2 u_\varepsilon^*}{dx^2}.$$

Si ha anche

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} \frac{\partial u}{\partial t}\, dt = -u(x, \varepsilon) + \lambda u_\varepsilon^*(x, \lambda).$$

Se designiamo con $f^*(x, \lambda)$ la trasformata di LAPLACE di $f(x, t)$, certamente esistente nelle nostre ipotesi, moltiplicando (19) (20) e (21) per $e^{-\lambda t}$, integrando fra ε e $+\infty$, e facendo successivamente tendere ε a zero, abbiamo:

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} - \lambda u^* = -u_0(x) + f^*(x, \lambda), \tag{24}$$

$$u^*(1) = 0, \tag{25}$$

$$(26) \qquad \left[\lambda u^* - k\frac{du^*}{dx}\right]_{x=0} = u_0(0) .$$

L' equazione differenziale (24) e le condizioni (25) e (26) valgono a determinare in modo univoco la $u^*(x, \lambda)$. Poichè la trasformazione funzionale (23) si può, com' è noto, invertire al più in un modo si conclude che:

Teorema IV. - *Il problema al contorno A) ammette al più una soluzione.*

6. - Formula risolutiva e teorema di esistenza per il problema *B*).

Prendiamo ora a considerare il problema *B*), supponiamo cioè che sia $f(x, t) = 0$.

Posto

$$u^*(x, \lambda) = \frac{1-x}{\lambda + k} u_0(0) + v(x, \lambda) ,$$

si ha per $v(x, \lambda)$ l' equazione differenziale

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \lambda v = \frac{\lambda}{\lambda + k} u_0(0)\,(1-x) - u_0(x) ,$$

e le condizioni ai limiti

$$v(1) = 0 , \qquad \left[\lambda v - k\frac{dv}{dx}\right]_{x=0} = 0 .$$

La (8) fornisce allora

$$v(x, \lambda) = -\frac{2\lambda k}{\lambda + k} u_0(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{(\lambda+\mu_n^2)(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}\left[-\frac{\cos\mu_n}{\mu_n} + \frac{\operatorname{sen}\mu_n}{\mu_n^2}\right] +$$

$$+ 2k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{(\lambda+\mu_n^2)(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)} \int_0^1 u_0(y) \operatorname{sen}\mu_n(1-y)\, dy ,$$

da cui, tenendo anche presenti la (10) e la (5),

(27) $$u^*(x, \lambda) =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \mu_n (1-x)}{(\lambda + \mu_n^2)(k + \operatorname{sen}^2 \mu_n)} \left[u_0(0) \operatorname{sen} \mu_n + k \int_0^1 u_0(y) \operatorname{sen} \mu_n (1-y) dy \right].$$

Tenendo presente che

$$\frac{1}{\lambda + \mu_n^2} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-\mu_n^2 t} dt,$$

dalla (27) si ha, formalmente,

(28) $$u(x, t) =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n^2 t} \operatorname{sen} \mu_n (1-x)}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \left[u_0(0) \operatorname{sen} \mu_n + k \int_0^1 u_0(y) \operatorname{sen} \mu_n (1-y) dy \right].$$

Vogliamo ora dimostrare il seguente

Teorema V. – *Nelle ipotesi poste per $u_0(x)$ esiste una soluzione del problema B) ed essa è data per $t > 0$, dalla* (28).

Si vede subito, intanto, che la serie a secondo membro della (28), e tutte quelle che da essa si ottengono derivandola termine a termine, sono uniformemente convergenti al variare di x nell'intervallo (0, 1) e di t in ogni intervallo che non contenga lo zero. La $u(x, t)$ è dunque, per $t > 0$, continua con tutte le sue derivate ed è facile verificare che essa soddisfa le (19), (20), (21).

Per dimostrare che $u(x, t)$ è continua anche per $t = 0$ e soddisfa la (22), facciamo, in un primo momento, l'ipotesi che $u_0(x)$ sia dotata di derivate dei primi due ordini finite e continue nell'intervallo (0, 1). Allora, in virtù del teorema I, la serie a secondo membro della (28) è, per $t=0$, uniformemente convergente al variare di x nell' intervallo (0, 1) ed ha per somma $u_0(x)$. Ne segue facilmente che la detta serie è uniformemente convergente per $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ e quindi $u(x, t)$ è continua anche per $t=0$ e verifica la (22).

Per dimostrare ora il nostro teorema, nella sola ipotesi della continuità di $u_0(x)$, consideriamo una successione di funzioni

$$u_{01}(x)\,,\quad u_{02}(x)\,,\ldots,\; u_{0p}(x)\,,\ldots,$$

nulle per $x=1$, dotate di derivate prime e seconde continue nell' intervallo (0, 1), che converga uniformemente in tale intervallo verso $u_0(x)$.

Le funzioni

$$u_p(x,\ t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n^2 t}\,\mathrm{sen}\,\mu_n(1-x)}{k+\mathrm{sen}^2\mu_n}\left[u_{0p}(0)\,\mathrm{sen}\,\mu_n + {} \right.$$

$$\left. {}+k\int_0^1 u_{0p}(y)\,\mathrm{sen}\,\mu_n(1-y)\,dy\right],$$

riescono continue per $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ e soddisfano alle (19), (20), (21), oltre che alla condizione

$$u_p(x,\ 0) = u_{0p}(x)\,.$$

Si ha inoltre, per $t > 0$,

$$\lim_{p\to\infty} u_p(x,\ t) = u(x,\ t)\,.$$

Il nostro teorema sarà dunque dimostrato se faremo vedere che la successione delle funzioni $u_p(x, t)$ converge uniformemente per $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$.

Ora si ha

$$| u_p(0, t) - u_q(0, t) | \leq 2 \, | u_{0p}(0) - u_{0q}(0) | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \mu_n}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} +$$

$$+ 2k \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \left(\int_0^1 [u_{0p}(y) - u_{0q}(y)] \operatorname{sen} \mu_n (1 - y) \, dy \right)^2 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \mu_n}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \right]^{\frac{1}{2}},$$

da cui, tenendo presenti le (12) e (16),

$$| u_p(0, t) - u_q(0, t) | \leq (1 + \sqrt{k}) \max | u_{0p} - u_{0q} | .$$

Poichè

$$| u_p(x, 0) - u_q(x, 0) | \leq \max | u_{0p} - u_{0q} | ,$$

$$| u_p(1, t) - u_q(1, t) | = 0 ,$$

in virtù di una nota proprietà della equazione del calore (5), si ha

$$| u_p(x, t) - u_q(x, t) | \leq (1 + \sqrt{k}) \max | u_{0p} - u_{0q} | ,$$

onde segue l'asserita uniforme convergenza della successione delle $u_p(x, t)$.

Per dimostrare completamente il nostro teorema bisognerebbe ancora far vedere che la funzione $u(x, t)$ gode della proprietà *c*), ma non ci soffermeremo su ciò, dato che questa circostanza è suscettibile di una verifica diretta quasi immediata.

(5) Cfr. per es. M. Picone, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine.* [Annali di Matematica serie 4ª Tomo VII (1929-30)].

7. - Formula risolutiva e teorema di esistenza per il problema C).

Prendiamo ora a considerare il problema C), supponiamo cioè che sia $u_0(x) = 0$. Dalle (24), (25) e (26), applicando la (8), si ha

$$(29) \qquad u^*(x, \lambda) =$$

$$= -2k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \mu_n (1 - x)}{(\lambda + \mu_n^2)(k + \operatorname{sen}^2 \mu_n)} \int_0^1 f^*(y, \lambda) \operatorname{sen} \mu_n (1 - y)\, dy .$$

Poichè

$$\frac{f^*(x, \lambda)}{\lambda + \mu_n^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(t+\tau)} e^{-\mu_n^2 t} f(x, \tau)\, dt\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^t e^{-\mu_n^2 (t-\tau)} f(x, \tau)\, d\tau \right) dt,$$

dalla (29) si ha, formalmente,

$$(30) \qquad u(x, t) =$$

$$= -2k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \mu_n (1 - x)}{k + \operatorname{sen}^2 \mu_n} \int_0^t e^{-\mu_n^2 (t-\tau)} \left(\int_0^1 f(y, \tau) \operatorname{sen} \mu_n (1 - y)\, dy \right) d\tau.$$

Sussiste il teorema

TEOREMA VI. - *Sia $f(x, t)$ una funzione continua di x e t, a variazione limitata rispetto a x, dotata di derivata prima rispetto a t continua. In tali ipotesi esiste una soluzione del problema C) ed essa è data dalla* (30).

Detta $L(\tau)$ una funzione positiva maggiore del massimo per

$t \leq \tau$ di $|f|$ e $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|$, si ha intanto,

$$(31)\qquad \left|\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}\left(\int_0^1 f(y,\tau)\,\mathrm{sen}\,\mu_n(1-y)\,dy\right)d\tau\right| \leq \frac{L(t)}{\mu_n^2},$$

$$(32)\qquad \left|\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \tau}\,\mathrm{sen}\,\mu_n(1-y)\,dy\right)d\tau\right| \leq \frac{L(t)}{\mu_n^2}.$$

La serie a secondo membro della (30) è dunque uniformemente convergente al variare di x nell'intervallo $(0, 1)$ e di t in ogni intervallo finito, e la sua somma $u(x, t)$ è perciò una funzione continua di x e t che verifica le (20) e (22).

Posto ora

$$u_1(x,t) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\mu_n(1-x)}{k+\mathrm{sen}^2\mu_n}\left[\mathrm{sen}\,\mu_n\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}\left(f(0,\tau)-f(1,\tau)\right)d\tau + \right.$$

$$\left. + k\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}d\tau\int_0^1 \left(f(y,\tau)-f(1,\tau)\right)\mathrm{sen}\,\mu_n(1-y)\,dy\right],$$

$$u_2(x,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\mu_n\,\mathrm{sen}\,\mu_n(1-x)}{k+\mathrm{sen}^2\mu_n}\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}\left(f(0,\tau)-f(1,\tau)\right)d\tau,$$

$$u_3(x,t) = -2k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\mu_n(1-x)}{k+\mathrm{sen}^2\mu_n}\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}\,d\tau\int_0^1 f(y,\tau)\,\mathrm{sen}\,\mu_n(1-y)\,dy,$$

si ha

$$(33)\qquad u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t).$$

Se designiamo con $f'(x, t)$ la derivata prima di $f(x, t)$ rispetto a t, abbiamo, con delle integrazioni per parti e valendosi delle (10) e (11),

$$u_1(x,\ t) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{\mu_n^2(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}\Big\{\operatorname{sen}\mu_n\Big[f(0,\ t)-f(1,\ t)-$$

$$-\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}(f'(0,\tau)-f'(1,\ \tau))\,d\tau\Big]+$$

$$+k\int_0^1 \operatorname{sen}\mu_n(1-y)\Big[f(y,\ t)-f(1,\ t)-$$

$$-\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}(f'(y,\ \tau)-f'(1,\ \tau))\,d\tau\Big]dy\Big\}+$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu_n^2 t}\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{\mu_n^2(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}\Big[\operatorname{sen}\mu_n(f(0,\ 0)-f(1,\ 0))+$$

$$+k\int_0^1(f(y,\ 0)-f(1,\ 0))\operatorname{sen}\mu_n(1-y)\,dy\Big].$$

$$u_2(x,\ t) = \frac{1-x}{k}[f(0,\ t)-f(1,\ t)]-$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\mu_n\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{\mu_n^2(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}(f'(0,\tau)-f'(1,\tau))d\tau-$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu_n^2 t}\operatorname{sen}\mu_n\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{\mu_n^2(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}(f(0,\ 0)-f(1,\ 0)),$$

$$u_3(x,\ t) = -\frac{1-x^2}{2}f(1,\ \tau)+$$

$$+2k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{\mu_n^2(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}\int_0^t e^{-\mu_n^2(t-\tau)}d\tau\int_0^1 f'(1,\tau)\operatorname{sen}\mu_n(1-y)dy+$$

$$+2k\,f(1,\ 0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu_n^2 t}\operatorname{sen}\mu_n(1-x)}{\mu_n^2(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}\int_0^1\operatorname{sen}\mu_n(1-y)dy\ .$$

In virtù delle (7') e (32) e dell' ipotesi che $f(x, t)$ sia a variazione limitata, le serie ai secondi membri delle precedenti formule sono, per $t > 0$, derivabili termine a termine una volta rispetto a t e due volte rispetto a x. Dopo ciò, tenendo sempre presenti le (5), (9), (10), (11) e (12), è facile verificare che, per $t > 0$, riesce

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial u_1}{\partial t} = f(x, t) - f(1, t)\,, \quad \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} - k\,\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]_{x=0} = f(1, t) - f(0, t)\,,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \qquad\qquad , \quad \left[\frac{\partial u_2}{\partial t} - k\,\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]_{x=0} = f(0, t) - f(1, t),$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \frac{\partial u_3}{\partial t} = f(1, t) \qquad , \quad \left[\frac{\partial u_3}{\partial t} - k\,\frac{\partial u_3}{\partial x}\right]_{x=0} = 0.$$

Da queste formule, tenendo presente la (33), discende immediatamente che $u(x, t)$ verifica le (19) e (21) e resta con ciò dimostrato il nostro teorema.

Prima di terminare vogliamo ancora osservare che, nella presente dimostrazione, non ci siamo valsi affatto dell' ipotesi, fatta nel n. 4, sul comportamento per $t \to \infty$ di $f(x, t)$. Tale ipotesi interverrebbe qualora si volesse far vedere che $u(x, t)$ verifica la proprietà $c)$; occorrerebbe però, allora, fare un' ipotesi analoga sul comportamento asintotico di $f'(x, t)$.