

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

**La teoria delle matrici applicata ai sistemi di  
equazioni differenziali lineari**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 7 (1936), p. 55-109

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1936\\_\\_7\\_\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1936__7__55_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LA TEORIA DELLE MATRICI APPLICATA AI SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

di GIUSEPPE ZWIRNER a Padova.

## INTRODUZIONE

Fin dai lavori di RIEMANN, FUCHS, KLEIN, POINCARÉ, JORDAN e di molti altri, sulla teoria delle equazioni differenziali lineari si è posto chiaramente in evidenza il legame di tale teoria con quella delle matrici. Il VOLTERRA in due sue memorie <sup>(1)</sup> ha rilevato però che il legame fra queste due teorie è molto più intimo di quanto può risultare a prima vista, dimostrando che vi è una dipendenza diretta dell'una dall'altra la quale pone in chiaro la stretta analogia fra la integrazione delle funzioni e quella delle equazioni differenziali lineari.

Il VOLTERRA, nel lavoro citato, introdusse infatti due operazioni infinitesimali sulle matrici (i cui elementi sono funzioni di una o più variabili) analoghe alla derivazione ed integrazione ordinarie le quali danno il passaggio diretto dagli integrali fondamentali di una equazione differenziale lineare ai suoi coefficienti ed inversamente dai coefficienti agli integrali fondamentali.

Recentemente il LAPPO-DANIELEVSKY <sup>(2)</sup> ritornò sullo stesso

<sup>(1)</sup> V. VOLTERRA, *Sui fondamenti della teoria delle equazioni lineari*. [Memorie della Società Italiana delle Scienze, ser. 3<sup>a</sup>, to. VI, n. 8, (1887)].

<sup>(2)</sup> LAPPO-DANIELEVSKY, *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*. Vol I. Académie des Sciences de l'URSS [Travaux de l'Institut Pshysico-Mathématique, Stekloff (1934)].

argomento con intendimenti analoghi a quelli del VOLTERRA ma fondando le sue ricerche sul concetto di matrice funzione di una matrice. Nella prima parte del suo lavoro sviluppò infatti con ampiezza la teoria delle funzioni di una o più matrici applicando poi i risultati così ottenuti alla risoluzione del problema di POINCARÉ per i sistemi di equazioni lineari differenziali con punti singolari regolari dando la rappresentazione della matrice integrale regolare in tutto il suo campo di esistenza e le espressioni analitiche esplicite del gruppo di monodromia del sistema mettendone in evidenza la sua dipendenza dai coefficienti del sistema e dai suoi punti singolari.

L'Autore però giunge a risultati concreti solo a prezzo di notevoli difficoltà ed è anche da osservarsi che lo sviluppo in serie dato per la matrice integrale regolare altro non è che lo sviluppo dato dal PEANO <sup>(3)</sup>, nel campo reale, in un suo lavoro sui sistemi di equazioni lineari differenziali. Le stesse considerazioni furono poi dal LAPPO-DANIELEVSKY estese anche alla soluzione del problema della rappresentazione della matrice integrale d'un sistema di equazioni differenziali lineari nelle vicinanze d'un punto singolare irregolare che è un polo per i coefficienti.

Nel presente lavoro riprendo i concetti di derivata ed integrale d'una matrice secondo VOLTERRA deducendo però le proprietà di questo calcolo integrale direttamente dalla teoria già nota sulle equazioni lineari differenziali. Ho applicato poi questi concetti alla ricerca delle espressioni della matrice integrale nell'intorno di un suo punto di diramazione, mettendone in evidenza la stretta analogia con la teoria dei divisori elementari, passando poi alla integrazione delle matrici i cui elementi hanno un polo del 1° ordine. Nell'ultima parte infine ho dedotto il gruppo di monodromia di una matrice con punti singolari regolari mostrando come gli elementi di tale gruppo sieno funzioni intere degli elementi della matrice e dandone, per tali elementi, a differenza di quanto fa il LAPPO-DANIELEVSKY, la loro espressione in termini finiti.

(<sup>3</sup>) G. PEANO, *Integraxione per serie delle equaxioni differenziali*. [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXII, 1884, pag. 437-444].

## PREMESSE

1. Come è noto, dati  $n^2$  numeri  $a_{ik}$ , chiamasi matrice d'ordine  $n$  il quadro

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Il determinante formato con gli elementi della matrice  $A$  sarà indicato con

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e si chiamerà il determinante della matrice  $A$ . L'elemento generico  $a_{ik}$  di  $A$  verrà anche indicato con  $\{A\}_{ik}$ .

La matrice i cui elementi sono tutti eguali al numero  $a$ , si indicherà con  $\|a\|$ .

La matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

si chiamerà matrice identica e si indicherà con  $U$ .

Sia

$$A_1, A_2, \dots, A_p$$

un sistema di  $p$  matrici di ordine rispettivamente

$$r_1, r_2, \dots, r_p .$$

Indicheremo con il simbolo

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_p]$$

la matrice d'ordine

$$n = r_1 + r_2 + \dots + r_p,$$

della forma

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_p \end{vmatrix},$$

dove tutti gli elementi di questa matrice, che sarà chiamata quasi diagonale, sono nulli, salvo gli elementi appartenenti al quadro diagonale indicato che sono gli elementi delle matrici

$$A_1, A_2, \dots, A_p.$$

In altri termini, gli elementi della matrice  $A$  sono definiti dalle formule seguenti

$$\{ A \}_{kl} \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} A_1 \{kl} & \text{se } 1 \leq k \leq r_1 \quad \text{e} \quad 1 \leq l \leq r_1, \\ 0 & \text{se } 1 \leq k \leq r_1 \quad \text{e} \quad r_1 + 1 \leq l \leq n, \\ 0 & \text{se } r_1 + \dots + r_{q-1} + 1 \leq k \leq r_1 + \dots + r_q \\ & \text{e } 1 \leq l \leq r_1 + \dots + r_{q-1}, \end{array} \right. & (q=2, 3, \dots, p) \\ \left\{ \begin{array}{ll} A_q \{k-r_1-\dots-r_{q-1}, l-r_1-\dots-r_{q-1} & \\ \text{se } r_1 + \dots + r_{q-1} + 1 \leq k \leq r_1 + \dots + r_q & \\ & (q=2, 3, \dots, p) \\ \text{e } r_1 + \dots + r_{q-1} + 1 \leq l \leq r_1 + \dots + r_q, & \\ 0 & \text{se } r_1 + \dots + r_{q-1} + 1 \leq k \leq r_1 + \dots + r_q \\ & (q=2, 3, \dots, p-1) \\ \text{e } r_1 + \dots + r_q + 1 \leq l \leq n. & \end{array} \right. \end{cases}$$

Nel seguito considereremo solamente matrici quadrate e supporremo che l'ordine di tali matrici sia sempre eguale ad un numero fisso  $n$ , salvo i casi dove si farà una indicazione speciale sul loro ordine.

2. Diremo che due matrici  $A$  e  $B$  sono eguali :

$$A = B,$$

se esse sono identiche, cioè se sussistono le  $n^2$  relazioni

$$\{ A \}_{ik} = \{ B \}_{ik}.$$

L'addizione delle matrici  $A$  e  $B$  sarà definita dalle formule

$$\{ A + B \}_{ik} = \{ A \}_{ik} + \{ B \}_{ik}.$$

Tale operazione gode evidentemente della proprietà commutativa ed associativa. La moltiplicazione delle matrici  $A$  e  $B$  è definita dalle formule

$$\{ A \cdot B \}_{ik} = \{ A \}_{i1} \cdot \{ B \}_{1k} + \{ A \}_{i2} \cdot \{ B \}_{2k} + \dots + \{ A \}_{in} \cdot \{ B \}_{nk}.$$

Si vede così che in generale le matrici  $A \cdot B$  e  $B \cdot A$  sono differenti :

$$A \cdot B \neq B \cdot A,$$

in modo che la moltiplicazione non gode della proprietà commutativa.

Il determinante del prodotto di due matrici è eguale, come è noto, al prodotto dei determinanti di queste matrici. Si vede inoltre facilmente che il prodotto gode della proprietà distributiva ed associativa, cioè

$$(A + B) C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

In certi casi l'operazione della moltiplicazione è però anche commutativa. Per esempio il prodotto della matrice  $A$  per sè stessa è commutativo e perciò si potrà parlare della potenza intera e positiva  $m$  della matrice  $A$  come prodotto di  $m$  matrici eguali ad  $A$ . Si pone ancora

$$A^0 = U, \quad A^1 = A.$$

La matrice inversa della matrice  $A$  è definita come la matrice  $A^{-1}$  che soddisfa all'eguaglianza

$$(1) \quad A \cdot A^{-1} = U.$$

In virtù della relazione

$$\Delta(A \cdot A^{-1}) = \Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = \Delta(U) = 1,$$

la matrice inversa non può esistere che per le matrici a determinante diverso da zero. Chiameremo propria una matrice  $A$  se è  $\Delta(A) \neq 0$ , impropria nel caso contrario. È noto che se la matrice  $A$  è propria, esiste una matrice unica  $A^{-1}$  soddisfacente alla (1). Gli elementi di tale matrice sono definiti dalle formule

$$\{A^{-1}\}_{ik} = \frac{\Delta_{ki}(A)}{\Delta(A)}$$

dove  $\Delta_{ki}(A)$  è il complemento algebrico dell'elemento  $\{A\}_{ki}$  nel determinante  $\Delta(A)$ . È facile inoltre vedere che si ha ancora

$$A^{-1} \cdot A = U.$$

L'addizione e la moltiplicazione delle matrici quasi diagonali si fa facilmente. Sia

$$A_1, \quad A_2, \quad \dots \quad A_p$$

e

$$B_1, \quad B_2, \quad \dots \quad B_p$$

due sistemi di matrici d'ordine  $r_1, r_2, \dots, r_p$ , dove

$$r_1 + r_2 + \dots + r_p = n.$$

Si ha immediatamente

$$[A_1, A_2, \dots, A_p] + [B_1, B_2, \dots, B_p] = [A_1 + B_1, A_2 + B_2, \dots, A_p + B_p]$$

$$[A_1, A_2, \dots, A_p] \cdot [B_1, B_2, \dots, B_p] = [A_1 B_1, A_2 \cdot B_2, \dots, A_p \cdot B_p]$$

consegue che

$$[A_1, A_2, \dots, A_p]^m = [A_1^m, A_2^m, \dots, A_p^m].$$

**3.** Indicheremo con  $|A|$  la matrice i cui elementi sono i moduli  $|\{A_{ik}\}|$  degli elementi della matrice  $A$ . Se per le due matrici  $A$  e  $B$  valgono le  $n^2$  relazioni

$$|\{A_{ik}\}| < |\{B_{ik}\}|$$

noi scriveremo

$$|A| < B.$$

Consideriamo ora una successione di matrici  $A_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ). Si dirà che tale successione ha per limite la matrice  $A$ , e si scriverà

$$(2) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} A_p = A,$$

se, prefissato un numero positivo arbitrario  $\epsilon$ , si potrà trovare un numero positivo  $N$  tale che per  $p > N$  si abbia

$$|A_p - A| < \|\epsilon\|.$$

La (2) equivale evidentemente alle  $n^2$  relazioni seguenti

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{A_p\}_{ik} = \{A\}_{ik}.$$

Diremo poi che la serie di matrici



$$A_1 + A_2 + \dots + A_p + \dots = \sum_1^{\infty} A_p$$

è convergente ed ha per somma la matrice  $A$ , e si scriverà,

$$(3) \quad A = \sum_1^{\infty} A_p,$$

se risulta

$$A = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_1^m A_p.$$

La (3) è equivalente alle  $n^2$  relazioni

$$\{A\}_{ik} = \sum_1^{\infty} \{A_p\}_{ik}.$$

**4.** Sia  $A$  una matrice qualsiasi ed  $S$  una matrice a determinante diverso da zero. La matrice

$$(4) \quad B = S A S^{-1}$$

si chiamerà la trasformata della matrice  $A$  a mezzo della matrice  $S$ .

Dalla (4) si ha

$$A = S^{-1} B S,$$

in modo che  $A$  è la trasformata di  $B$  a mezzo della matrice  $S^{-1}$ .

La trasformazione della matrice non cambia il suo determinante

$$\Delta(B) = \Delta(S) \cdot \Delta(A) \cdot \Delta(S^{-1}) = \Delta(A).$$

**5.** Occupiamoci ora della riduzione a forma normale di una matrice. Indicando con  $\lambda$  una variabile ausiliaria, si consideri la matrice

$$A - \lambda U.$$

Il suo determinante

$$(5) \quad \Delta(A - \lambda U) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

è un polinomio di grado  $n$  in  $\lambda$ .

L'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

si chiamerà l'equazione caratteristica della matrice  $A$  e le sue radici si diranno i numeri caratteristici di  $A$ .

Se  $\lambda_1$  è una radice di tale equazione avente l'ordine di molteplicità eguale ad  $l_0$ , il determinante (5) sarà divisibile per  $(\lambda - \lambda_1)^{l_0}$  e non divisibile per  $(\lambda - \lambda_1)^{l_0 + 1}$ . Sia

$$(\lambda - \lambda_1)^{l_0}$$

la più alta potenza del binomio  $(\lambda - \lambda_1)$  che divide ancora tutti i minori del determinante  $\Delta(A - \lambda U)$  dell'ordine  $n - \omega$ . I numeri  $l_0, l_1, l_2, \dots$  non possono che decrescere, perchè ogni minore d'ordine  $n - \omega + 1$  si può considerare come una somma di termini di cui ciascuno è il prodotto d'un minore d'ordine  $n - \omega$  per un elemento di  $\Delta(A - \lambda U)$ . Dunque ogni divisore comune ai minori d'ordine  $n - \omega$  deve essere anche un divisore di ciascun minore d'ordine  $n - \omega + 1$  e perciò anche dei minori d'ordine superiore.

Ne consegue che se uno dei numeri  $l_0, l_1, l_2, \dots$  è nullo, tutti i seguenti sono pure nulli. Se  $l_r$  è l'ultimo esponente  $l$  che non sia nullo, si avranno le disuguaglianze

$$l_0 > l_1 > l_2 > \dots > l_r.$$

Posto allora

$$l_0 - l_1 = e_0, \quad l_1 - l_2 = e_1, \quad \dots \quad l_{r-1} - l_r = e_{r-1}, \quad l_r = e_r,$$

si avrà

$$e_0 + e_1 + \dots + e_r = l_0$$

e quindi

$$(\lambda - \lambda_1)^{l_0} = (\lambda - \lambda_1)^{e_0} (\lambda - \lambda_1)^{e_1} \dots (\lambda - \lambda_1)^{e_r}.$$

Sieno ora  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  le radici distinte dell'equazione caratteristica,

$$\lambda - \lambda_1, \quad \lambda - \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda - \lambda_m,$$

i divisori *lineari* distinti del determinante  $\Delta(A - \lambda U)$  ed  $l_0^1, l_0^2, \dots, l_0^m$  i loro esponenti. Decomponiamo i numeri  $l_0^i$  in elementi  $e$  con la regola precedente in modo che si avrà, per esempio,

$$l_0^i = e_0^i + e_1^i + \dots + e_{r_i}^i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Sarà allora

$$\Delta(A - \lambda U) = \Pi (\lambda - \lambda_i)^{e_j^i} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, r_i)$$

Ciascuno dei fattori  $(\lambda - \lambda_i)^{e_j^i}$  che compare nell'ultimo prodotto venne chiamato dal WEIERSTRASS (\*) un *divisore elementare*.

Sia  $(\lambda - \lambda_i)^e$  un divisore elementare di  $\Delta(A - \lambda U)$ ; questo divisore sarà detto semplice o multiplo secondo che il suo esponente  $e$  sarà eguale o superiore all'unità. Supponiamo che un divisore lineare  $\lambda - \lambda_i$  fornisca i divisori elementari  $(\lambda - \lambda_i)^{e_0}, (\lambda - \lambda_i)^{e_1}, \dots, (\lambda - \lambda_i)^{e_r}$  in numero di  $r + 1$ . Il determinante  $\Delta(A - \lambda U)$  sarà divisibile per  $(\lambda - \lambda_i)^{e_0 + e_1 + \dots + e_r}$ . Tutti i minori d'ordine  $n - 1$  saranno divisibili per  $(\lambda - \lambda_i)^{e_1 + e_2 + \dots + e_r}$  ... i minori d'ordine  $n - r$  saranno divisibili per  $(\lambda - \lambda_i)^{e_r}$ . In

(\*) *Zur Theorie bilinearen und quadratischen formen.* [Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 18 Mai 1868].

particolare se tutti i divisori elementari sono semplici, cioè  $e_0 = e_1 = \dots = e_r = 1$ , si vede che il determinante  $\Delta(A - \lambda U)$  sarà divisibile per  $(\lambda - \lambda_i)^{r+1}$ , i minori d'ordine  $n-1$  per  $(\lambda - \lambda_i)^r \dots$  i minori d'ordine  $n-r$  saranno divisibili per  $\lambda - \lambda_i$ .

Da ciò si vede che bisogna distinguere la molteplicità del divisore  $\lambda - \lambda_i$  considerato come divisore lineare, dalla molteplicità dello stesso divisore considerato come divisore elementare.

Si dimostra inoltre che i divisori elementari della matrice  $A$  e della sua trasformata, a mezzo di una matrice  $S$ , sono eguali <sup>(5)</sup>.

Sieno

$$(\lambda - \lambda_1)^{e_1}, (\lambda - \lambda_2)^{e_2}, \dots, (\lambda - \lambda_p)^{e_p}$$

tutti i divisori elementari della matrice  $A$ , in modo che

$$e_1 + e_2 + \dots + e_p = n$$

e  $p \leq n$ ; fra i numeri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  alcuni possono essere fra loro eguali.

Indichiamo con  $T^{(e_i)}$  la matrice d'ordine  $e_i$ , della forma

$$T^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{array} \right\| .$$

Si può allora dimostrare che la matrice  $A$  si può mettere sotto la forma

$$(6) \quad A = S^{-1} [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] S ,$$

<sup>(5)</sup> V. VOLTERRA, *Sui fondamenti della teoria delle equazioni lineari*. [Memorie della Società Italiana delle Scienze, ser. 3<sup>a</sup>, to. VI, n. 8, 1887].

dove qualche elemento della matrice  $S$  resta arbitrario, ogni suo altro elemento e funzione razionale degli elementi e dei numeri caratteristici della matrice  $A$  e delle funzioni lineari ed omogenee degli elementi arbitrari della matrice  $S$ . La matrice  $A$  posta sotto la forma (6) si dirà ridotta a *forma normale*.

Se poi tutte le radici dell'equazione caratteristica sono distinte, la matrice  $A$  si può mettere sotto la forma

$$A = S^{-1} \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} S$$

### § 1. - Derivata di Volterra di una matrice.

1. Sia  $A$  una matrice di ordine  $n$  i cui elementi sieno funzioni monogene della variabile complessa  $z$  in un campo  $\sigma$ . Diremo allora che la matrice  $A$  è funzione monogena della variabile  $z$  nello stesso campo.

Poniamo  $z = x + iy$  ed indichiamo con  $\frac{\partial A}{\partial x}$  la matrice i cui elementi sono le derivate parziali, rispetto ad  $x$ , degli elementi della matrice  $A$ . Analogo significato avranno le scritture  $\frac{\partial A}{\partial y}$ ,  $\frac{dA}{dz}$ .

Se  $a_{ik}$  è l'elemento generico di  $A$ , si ha

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial a_{ik}}{\partial y} = \frac{da_{ik}}{dz}$$

e quindi

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{dA}{dz}.$$

Posto  $A = A_1 + iA_2$ , si vede che la condizione necessaria e sufficiente affinché  $A$  sia, nel senso di RIEMANN, funzione

monogena della variabile complessa  $z$  nel campo  $\sigma$ , è

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial A_2}{\partial y} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = -\frac{\partial A_1}{\partial y} \end{array} \right.$$

Diremo ancora che la matrice  $A$  è olomorfa in  $\sigma$  se le funzioni che ne costituiscono gli elementi sono funzioni olomorfe in  $\sigma$ .

Consideriamo ora, in luogo della derivata ordinaria  $\frac{dA}{dx}$ , le due espressioni

$$A^{-1} \frac{dA}{dx}, \quad \frac{dA}{dx} A^{-1}$$

che chiameremo rispettivamente **derivata destra** e **derivata sinistra** di VOLTERRA della matrice  $A$ .

Per indicare tali derivate adopereremo il simbolo  $D$  per la derivata destra ed il simbolo  $D'$  per la sinistra. Avremo dunque, per definizione

$$DA = A^{-1} \frac{dA}{dx}; \quad D'A = \frac{dA}{dx} A^{-1}.$$

Quando si vorrà mettere in evidenza la variabile di derivazione, al simbolo  $D$  o  $D'$  si metterà come indice tale variabile.

È ovvio che si può parlare di derivata di VOLTERRA di una matrice solo quando essa è a determinante diverso da zero. Nel seguito considereremo perciò sempre matrici a determinante diverso da zero, salvo i casi dove si farà una indicazione speciale.

Come è facile prevedere ad ogni teorema relativo alla derivata destra di VOLTERRA ne corrisponderà uno per la derivata sinistra che si otterrà dal primo con lo scambio della parola derivata destra in derivata sinistra e trasformata in trasformata inversa. Nel seguito enuncieremo perciò, in generale, solamente le proprietà relative alla derivata destra.

Con le nuove definizioni date si vede che le condizioni di monogeneità della matrice  $A$  si possono mettere sotto la forma

$$D_x A = \frac{1}{i} D_y A.$$

TEOREMA I. - Se  $A$  è una matrice funzione della variabile complessa  $x$  ed il suo determinante vale sempre uno, la somma degli elementi principali della matrice  $DA$  vale zero.

Infatti, indicato con  $a_{ik}$  l'elemento della matrice  $A$  che appartiene alla  $i$ -ma orizzontale ed alla  $k$ -ma verticale, avremo che l'analogo elemento della matrice  $A^{-1}$  sarà  $A_{ki}$ , dove  $A_{ki}$  indica il complemento algebrico di  $a_{ki}$  nel determinante di  $A$ . L'elemento generico della diagonale principale della matrice  $DA$  sarà allora

$$\sum_i A_{ii} \frac{da_{ii}}{dx}$$

e la somma degli elementi principali di  $DA$  sarà perciò

$$\sum_i A_{ii} \frac{da_{ii}}{dx} = \frac{d}{dx} \Delta(A) = 0 \quad \text{c. v. d.}$$

Andiamo ora a stabilire il teorema sulla derivazione, secondo VOLTERRA, del prodotto di due matrici e ricordiamo ancora una volta che le matrici che considereremo sono supposte a determinante diverso da zero, almeno nei punti da noi considerati.

TEOREMA II. - Se  $A$  e  $B$  sono due matrici funzioni della variabile  $x$ , si ha

$$D(A \cdot B) = DB + B^{-1} \cdot DA \cdot B$$

cioè: *La derivata destra di VOLTERRA del prodotto di due matrici è eguale alla derivata destra di VOLTERRA della seconda matrice accresciuta della trasformata della derivata destra della prima a mezzo della seconda.* Infatti

$$\begin{aligned} D(A \cdot B) &= (A \cdot B)^{-1} \frac{d}{dx} (A \cdot B) = \\ &= B^{-1} \cdot A^{-1} \left( \frac{dA}{dx} \cdot B + A \frac{dB}{dx} \right) = B^{-1} \cdot DA \cdot B + DB. \end{aligned}$$

In modo analogo si prova, per la derivata sinistra, che

$$D'(A \cdot B) = D' A + A \cdot D' B \cdot A^{-1}.$$

**TEOREMA III.** - *La derivata destra di VOLTERRA di una matrice non cambia se si moltiplica a sinistra la matrice per una matrice costante.*

Analogamente: *La derivata sinistra di VOLTERRA di una matrice non cambia se si moltiplica a destra la matrice per una matrice costante.*

Per dimostrare ciò basta applicare il teorema precedente tenendo presente che la derivata di VOLTERRA di una matrice costante è zero.

**TEOREMA IV.** - *La derivata a destra di VOLTERRA è la trasformata della derivata a sinistra di VOLTERRA mediante la matrice primitiva.*

Infatti, dalla relazione

$$D' A \cdot A = A \cdot DA,$$

si deduce

$$DA = A^{-1} \cdot D' A \cdot A.$$

**TEOREMA V.** - *Vale la relazione*

$$D' A^{-1} = -DA.$$

Infatti, derivando nel senso ordinario della parola la identità

$$A^{-1} \cdot A = U,$$

si ha

$$\frac{dA^{-1}}{dx} \cdot A + A^{-1} \frac{dA}{dx} = 0$$

da cui

$$D' A^{-1} = -DA.$$

**TEOREMA VI.** - *Se due matrici  $A$  ( $\Delta(A) \neq 0$ ) e  $B$  sono tali che*



$$A \cdot B \equiv 0$$

deve essere

$$B \equiv 0.$$

Infatti, posto

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

dovrà essere

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} \sum_1^n a_{1r} b_{r1} & \sum_1^n a_{1r} b_{r2} & \dots & \sum_1^n a_{1r} b_{rn} \\ \sum_1^n a_{2r} b_{r1} & \sum_1^n a_{2r} b_{r2} & \dots & \sum_1^n a_{2r} b_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_1^n a_{nr} b_{r1} & \sum_1^n a_{nr} b_{r2} & \dots & \sum_1^n a_{nr} b_{rn} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

e quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_r a_{1r} b_{rs} = 0 \\ \sum_r a_{2r} b_{rs} = 0 \\ \dots \\ \sum_r a_{nr} b_{rs} = 0 \end{array} \right. \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

da cui, essendo  $\Delta(A) \neq 0$ , si deduce

$$b_{rs} = 0.$$

**TEOREMA VII.** - *Se la derivata di VOLTERRA di una matrice è identicamente nulla, la matrice è una costante.*

Essendo infatti

$$DA = A^{-1} \frac{dA}{dx} \equiv 0,$$

per il teorema precedente, si ha

$$\frac{dA}{dx} \equiv 0$$

da cui si deduce

$$A = \text{costante} .$$

**TEOREMA VIII.** - *Se due matrici  $A$  e  $B$  hanno la stessa derivata destra di VOLTEERRA esse differiscono per una matrice costante moltiplicativa a sinistra.*

Infatti

$$D(A \cdot B^{-1}) = DB^{-1} + B \cdot DA \cdot B^{-1} = -B \cdot DB \cdot B^{-1} + B \cdot DA \cdot B^{-1} \equiv 0$$

e per il teorema precedente, si deduce che

$$A \cdot B^{-1} = C$$

da cui

$$A = C \cdot B .$$

## § 2. - Integrale di Volterra di una matrice.

1. Sia  $A$  una matrice olomorfa entro un campo  $\sigma$  e determiniamo una matrice  $B$  soddisfacente all'equazione differenziale

$$(1) \quad \frac{dB}{dx} = B \cdot A .$$

L'esistenza della matrice  $B$  dipende dalla esistenza degli integrali di un particolare sistema di eq. diff. lineari. Invero, se esplicitiamo l'equazione (1) otteniamo  $n$  sistemi di eq. diff. lineari nei quali figurano come incognite i coefficienti  $b_{ik}$  della matrice  $B$ . Ad esempio, gli elementi della  $r$ -ma orizzontale di  $B \cdot A$  sono .

$$\sum_k b_{rk} a_{k1}, \quad \sum_k b_{rk} a_{k2}, \quad \dots \quad \sum_k b_{rk} a_{kn}$$

e quindi la precedente equazione si spezza negli  $n$  sistemi di eq. diff. lineari

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{db_{r1}}{dx} = \sum_k b_{rk} a_{k1} \\ \frac{db_{r2}}{dx} = \sum_k b_{rk} a_{k2} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{db_{rn}}{dx} = \sum_k b_{rk} a_{kn} \end{array} \right. \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

È d'altra parte noto che se i coefficienti  $a_{ik}$  del sistema (1') sono funzioni olomorfe di  $x$  nell'intorno di un punto  $x = a$ , il detto sistema ammette una soluzione olomorfa nell'intorno di detto punto, riducendosi a quantità assegnate per  $x = a$ .

La matrice  $B$  sarà chiamata fondamentale se il suo determinante sarà diverso da zero. Relativamente al valore di questo determinante, come è noto, esso è dato da

$$\Delta(B) = C e^{\int \lambda(A) dx},$$

dove  $C$  è una costante ed  $\lambda(A) = \sum_1^n a_{kk}$ .

Di conseguenza il  $\Delta(B)$  o è uguale a zero identicamente (se  $C = 0$ ) o può essere zero solamente nei punti singolari delle funzioni  $a_{kk}$ .

Equivalentemente l'equazione (1) alla

$$(2) \quad DB = A,$$

si vede che la matrice  $B$  ha per derivata destra di VOLTERRA la matrice  $A$  in ogni punto del dominio dove quest'ultima è olomorfa.

Se  $B$  è una matrice integrale fondamentale della (1), anche la matrice  $C \cdot B$ , dove  $C$  è una matrice costante arbitraria, purchè sia  $a$  determinante diverso da zero, sarà pure una matrice integrale della (1). Inversamente, ogni matrice integrale della (1)

ossia della (2) si otterrà dalla matrice fondamentale  $B$  moltiplicandola a sinistra per una matrice costante. La matrice  $C \cdot B$  sarà chiamata **Integrale indefinito destro di Volterra della matrice  $A$** .

Da quando precede risulta che la esistenza degli integrali di un sistema di equazioni diff. lineari ci permette di assicurare l'esistenza dell'integrale indefinito destro di VOLTERRA di una assegnata matrice  $A$  nell'intorno di un punto ordinario per la matrice. Inoltre sappiamo che i punti singolari della matrice integrale possono trovarsi solamente nei punti singolari della matrice  $A$ .

In modo analogo si definisce l'integrale indefinito sinistro di VOLTERRA di una matrice. L'integrale destro di VOLTERRA della matrice  $A$  verrà indicato con il simbolo  $\int A dx$  ed il sinistro con  $\int' A dx$ .

Riassumendo abbiamo che

$$\int A dx$$

rappresenta una matrice olomorfa, nell'intorno di un punto ordinario della matrice  $A$ , avente per derivata destra la matrice  $A$ .

2. Considerato entro il campo  $\sigma$ , ove supponiamo la matrice  $A$  olomorfa, due punti  $a$  e  $x$ , chiameremo *integrale definito destro di VOLTERRA* lungo la linea  $ax$ , la quale può essere qualunque, purchè interna a  $\sigma$ , la matrice  $B$  soddisfacente all'equazione differenziale lineare (1) e riducentesi alla matrice unità per  $x = a$ .

Come è noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari esiste una ed una sola matrice soddisfacente alle condizioni date. La matrice  $B$  ora definita verrà indicata con il simbolo

$$(3) \quad B = \int_a^x A dx$$

e sarà una matrice olomorfa, in un dominio del punto  $a$ , avente per derivata destra la matrice  $A$  e riducendosi alla matrice identica per  $x = a$ . Analoga definizione vale per l'integrale definito sinistro di VOLTERRA.

**3.** Della matrice fondamentale  $B$  definita dalla (3) se ne può dare uno sviluppo in serie in una parte del campo di esistenza.

Supponiamo perciò che la matrice  $A(x)$  sia olomorfa nel punto  $x = a$  e consideriamo il seguente sviluppo in serie

$$(4) \quad B(x) = U + \int_a^x A dx + \int_a^x \left[ \int_a^x A dx \cdot A \right] dx + \\ + \int_a^x \left[ \int_a^x \left( \int_a^x A dx \right) A dx \cdot A \right] dx + \dots$$

dove  $x$  è un punto qualsiasi del dominio del punto  $a$  dove  $A(x)$  è olomorfa. L'uniforme convergenza di tale sviluppo è stata dimostrata dal PEANO in un suo lavoro sulle equazioni diff. lineari <sup>(6)</sup> nella ipotesi che gli elementi della matrice  $A(x)$  sieno funzioni reali di variabile reale. Si può però provare facilmente che tale serie converge uniformemente anche quando gli elementi della matrice  $A(x)$  sono funzioni olomorfe. Infatti, essendo le funzioni  $a_{ik}(x)$  delle matrici  $A(x)$  limitate nel dominio del punto  $a$ , detto  $m$  il loro massimo modulo e supponendo di eseguire le integrazioni lungo la retta congiungente i punti  $a$  ed  $x$ , il  $(p+1)$ -mo termine della serie (4) risulterà, in modulo, minore di

$$\| m \|^p \frac{|x-a|^p}{|p|} = \left\| m^p n^{p-1} \frac{|x-a|^p}{|p|} \right\|.$$

<sup>(6)</sup> G. PEANO, *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*. [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXII, 1884, pag. 437-444].

Essendo la serie, di termine generale  $m^p n^{p-1} \frac{|x-a|^p}{|p|}$ , convergente e di somma  $\frac{1}{n} e^{nm|x-a|}$ , si avrà:

$$|B(x)| < \left\| \frac{1}{n} e^{nm|x-a|} \right\|.$$

La matrice  $B(x)$  risulterà perciò olomorfa nel campo considerato.

La  $B(x)$ , definita dalla (4), si riduce inoltre per  $x=a$  alla matrice identica e verifica alla (1) poichè:

$$(4') \quad \frac{dB}{dx} = A + \int_a^x A dx \cdot A + \dots = \left[ U + \int_a^x A dx + \dots \right] A = B \cdot A.$$

Il modo più naturale per giungere alla (4) consiste nell'integrare le successive equazioni

$$\frac{dB_0}{dx} = 0, \quad \frac{dB_1}{dx} = B_0 A, \quad \frac{dB_2}{dx} = B_1 A, \dots$$

Analogamente, per l'integrale sinistro di VOLTERRA, si trova lo sviluppo in serie

$$(5) \quad B(x) = U + \int_a^x A(x) dx + \int_a^x \left[ A \int_a^x A dx \right] dx + \\ + \int_a^x \left[ A \int_a^x \left( A \int_a^x A dx \right) dx \right] dx + \dots$$

La matrice inversa della  $B$ , definita dalla (4), si ricava facilmente.

Ricordando infatti la relazione

$$D' B^{-1} = -DB = -A,$$

si ha

$$\frac{dB^{-1}}{dx} = -A \cdot B^{-1}$$

e dalla (5) consegue

$$(6) \quad B^{-1} = U - \int_a^x A(x) dx + \int_a^x \left[ A \int_a^x A dx \right] dx - \\ - \int_a^x \left[ A \int_a^x \left( A \int_a^x A dx \right) dx \right] dx + \dots$$

Le formule (5) e (6) mostrano che

$$(7) \quad B^{-1} = \bar{B}$$

dove con  $\bar{B}$  si indica l'integrale sinistro di VOLTERRA della matrice  $-A$ .

La (7) dà quindi una relazione fra l'integrale definito destro e sinistro di VOLTERRA di una matrice.

4. Se due matrici  $A$  e  $A'$ , di elementi  $a_{ik}(x)$  e  $a'_{ik}(x)$ , soddisfano alle  $n^2$  relazioni

$$|a'_{ik}(x) - a_{ik}(x)| < \varepsilon,$$

dove  $\varepsilon$  è un numero positivo arbitrario, diremo che differiscono fra loro meno di  $\varepsilon$  e scriveremo

$$(8) \quad |A' - A| < \|\varepsilon\|.$$

Supponiamo ora che sussista la (8), che i moduli degli elementi della matrice  $A$  sieno minori di  $m$ , cioè  $|A| < \|m\|$  e determiniamo un limite superiore per la differenza degli integrali  $B(a, x)$  e  $B'(a, x)$  relativi alle due matrici  $A$  e  $A'$ . Come vedemmo, il  $(p+1)$ -mo termine della serie (4) risulta, in modulo, più piccolo di  $\left\| m^p n^{p-1} \frac{|x-a|^p}{p} \right\|$  e perciò

$$|B'(a, x) - B(a, x)| < \|\varepsilon\| \cdot |x - a| + \\ + \left\| \sum_2^{\infty} [(m + \varepsilon)^2 - m^2] n^{p-1} \frac{|x - a|^p}{\underline{p}} \right\|$$

ossia ..

$$(9) \quad |B'(a, x) - B(a, x)| < \left\| \frac{1}{n} e^{m|x-a|} [e^{\varepsilon|x-a|} - 1] \right\|.$$

5. Si può avere della matrice integrale di VOLTERRA anche uno sviluppo in serie di TAYLOR. Si consideri infatti dapprima l'equazione

$$(10) \quad \frac{dB}{dx} = \frac{A_0}{1-x} B,$$

dove  $A_0$  è una matrice costante. Dalla (10), si ha

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{A_0(A_0 + U)}{(1-x)^2} B \\ \frac{d^3 B}{dx^3} = \frac{A_0(A_0 + U)(A_0 + 2U)}{(1-x)^3} B \\ \dots \dots \dots$$

e quindi, nel punto  $x = 0$ ,

$$\left(\frac{dB}{dx}\right)_0 = A_0 B_0 \\ \left(\frac{d^2 B}{dx^2}\right)_0 = A_0(A_0 + U) B_0 \\ \left(\frac{d^3 B}{dx^3}\right)_0 = A_0(A_0 + U)(A_0 + 2U) B_0 \\ \dots \dots \dots$$

Si può dunque scrivere (formalmente) lo sviluppo in serie

$$(11) \quad B = \left[ U + A_0 x + \frac{A_0(A_0 + U)}{\underline{2}} x^2 + \frac{A_0(A_0 + U)(A_0 + 2U)}{\underline{3}} x^3 + \dots \right] B_0$$



Dimostriamo ora che questa serie definisce una matrice olomorfa di  $x$  entro un cerchio di centro  $x = 0$  e di raggio 1. Sia  $m$  il massimo modulo degli elementi di  $A_0$ ; avremo che il  $(p+1)$ -mo termine della (11) sarà minore di

$$\frac{\|m\| (\|m\| + U) (\|m\| + 2U) \dots (\|m\| + (p-1)U)}{|p|} |x|^p = \\ = \left\| \frac{m(nm+1)(nm+2) \dots (nm+p-1)}{|p|} \right\| |x|^p.$$

Ora la serie di termine generale  $\frac{m(nm+1) \dots (nm+p-1)}{|p|} |x|^p$  è convergente per  $|x| < 1$  e quindi tale risulterà anche la serie (11) definendo perciò una funzione olomorfa entro il cerchio di centro  $x = 0$  e raggio 1.

Consideriamo ora l'equazione

$$(12) \quad \frac{dB}{dx} = A \cdot B,$$

dove la  $A$  è una matrice funzione di  $x$  olomorfa entro il cerchio di centro  $\zeta$  e raggio  $r$ . Si consideri la matrice

$$\frac{A_0}{1 - \frac{x - \zeta}{r}},$$

dove la  $A_0$  ha come elementi i massimi moduli dei termini di  $A$ .

Indicando con  $\text{mod} \frac{d^m A}{dx^m} \Big|_{x=\zeta}$  la matrice i cui elementi sono i moduli degli elementi della matrice  $\frac{d^m A}{dx^m}$  calcolati nel punto  $x = \zeta$ , si ha

$$\text{mod} \frac{d^m A}{dx^m} \Big|_{x=\zeta} \leq \text{mod} \frac{d^m \frac{A_0}{1 - \frac{x - \zeta}{r}}}{dx^m} \Big|_{x=\zeta}$$

L'equazione, dominante della (12),

$$(13) \quad \frac{d\bar{B}}{dx} = \frac{A_0}{1 - \frac{x-\zeta}{r}} \cdot \bar{B},$$

ammette, e ciò si prova con procedimento analogo a quello già fatto per l'equazione (10), una matrice integrale olomorfa entro il cerchio di centro  $x = \zeta$  e di raggio  $\text{mod}(x - \zeta) < r$ . Anche l'equazione (12) ammetterà perciò una matrice integrale convergente nello stesso cerchio, sviluppabile, in tale campo, in serie di TAYLOR e riducentesi per  $x = \zeta$  a  $B_0$ . Supponiamo ora che gli elementi della matrice  $A$  sieno uniformi ed abbiano in tutto il piano solamente dei punti singolari isolati. Sia  $L$  un cammino congiungente due punti non singolari  $\zeta$  e  $x$  e non passante per alcun punto singolare.

L'integrale definito dalla condizione iniziale  $B_0$  è rappresentato, come vedemmo, da una serie intera  $P(x - \zeta)$  convergente nel cerchio  $C_0$  di centro  $\zeta$  e passante per il punto singolare più vicino a  $\zeta$ . Per mezzo della  $P(x - \zeta)$  si può seguire la variazione della matrice integrale lungo il cammino  $L$ , per quel tratto di  $L$  che non sorte dal cerchio  $C_0$ . La linea  $L$  sorta da  $C_0$  nel punto  $a$ ; prendiamo allora su  $L$  un punto  $x_1$  interno a  $C_0$  e così vicino ad  $a$  che il cerchio  $C_1$ , di centro  $x_1$  e passante per il punto singolare più vicino, sorta in parte da  $C_0$ . Il valore dell'integrale nel punto  $x_1$  potrà aversi a mezzo della serie  $P(x - \zeta)$ ; sia  $B_1$  tale valore. La matrice integrale dell'equazione data che per  $x = x_1$  si riduce a  $B_1$  è rappresentata da una serie intera  $P_1(x - x_1)$  convergente nel cerchio  $C_1$ . Essendo le due serie  $P(x - \zeta)$  e  $P_1(x - x_1)$  eguali nella parte comune ai due cerchi  $C_0$  e  $C_1$ , la serie  $P(x - x_1)$  rappresenta il prolungamento analitico nel cerchio  $C_1$  della matrice definita nel cerchio  $C_0$  dalla serie  $P(x - \zeta)$ . Se tutto il tratto di  $L$  compreso fra  $x_1$  e  $x$  non è compreso nel cerchio  $C_1$  si prenderà un nuovo punto  $x_2$  sopra  $L$  all'interno di  $C_1$  e così di seguito. Si arriverà così certamente ad un cerchio contenente il punto  $x$  con un numero finito di operazioni, perchè i raggi di convergenza delle serie ammettono un limite inferiore

non nullo. Si vede quindi *che si può prolungare analiticamente l'integrale lungo un cammino della variabile che non passi per alcuno dei punti singolari degli elementi della matrice A.*

Il ragionamento fatto si estende anche al caso di singolarità qualunque degli elementi della matrice  $A$  che possono essere funzioni polidrome.

### § 3. - Proprietà degli integrali definiti di Volterra.

1. TEOREMA I. - *Se la linea  $ax$  lungo la quale si eseguisce l'integrazione si divide in due parti mediante un punto  $c$ , si ha*

$$\int_a^x Adx = \int_a^c Adx \cdot \int_c^x Adx .$$

Osserviamo infatti che entrambe le matrici

$$\int_a^x Adx, \quad \int_a^c Adx \cdot \int_c^x Adx$$

soddisfano all'equazione differenziale  $\frac{dB}{dx} = B \cdot A$  ed assumono per  $x = a$  lo stesso valore. Per la unicità della soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari abbiamo dunque

$$\int_a^x Adx = \int_a^c Adx \cdot \int_c^x Adx .$$

TEOREMA II. - *Vale la relazione*

$$\int_a^x Adx = \left[ \int_x^a Adx \right]^{-1}$$

cioè: *Invertendo il verso d'integrazione lungo la linea  $ax$  si ottiene la matrice inversa.* Tale relazione si deduce facilmente dal teorema precedente.

**TEOREMA III.** - *Se  $C$  è una matrice costante ed  $A$  una matrice funzione della variabile complessa  $x$ , si ha*

$$\int_a^x C^{-1} \cdot A \cdot C dx = C^{-1} \int_a^x A dx \cdot C$$

cioè: *L'integrale della trasformata di una matrice è uguale alla trasformata dell'integrale, quando la matrice trasformante è costante.*

Infatti, le matrici

$$\int_a^x C^{-1} \cdot A \cdot C dx, \quad C^{-1} \cdot \int_a^x A dx \cdot C$$

per  $x = a$  si riducono alla matrice identica ed hanno la stessa derivata destra di VOLTERRA.

**TEOREMA IV.** - *Se  $A(x)$  e  $B(x)$  sono due matrici, si ha*

$$\int_a^x A^{-1} \cdot B \cdot A dx = A(a) \cdot \int_a^x (B + DA) dx \cdot A^{-1}(x).$$

Tale relazione si dimostra in modo analogo alla precedente.

**TEOREMA V.** - *Se  $B(x)$  è l'integrale indefinito destro della matrice  $A(x)$ , si ha*

$$\int_a^x A(x) dx = B^{-1}(a) \cdot B(x).$$

La dimostrazione è analoga alla precedente.

TEOREMA VI. - Se  $s$  è una linea chiusa contenuta interamente nel campo  $\sigma$  dove la matrice  $A(z)$  è olomorfa, si ha

$$\int_s A dz = U.$$

Infatti la matrice

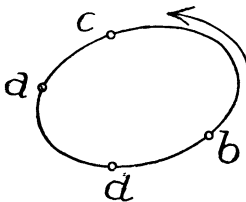
$$B = \int_a^x A dz$$

è, come sappiamo, una matrice olomorfa entro  $\sigma$ . Facendo descrivere alla variabile  $z$ , partendo dal punto  $a$ , una linea chiusa tutta contenuta in  $\sigma$ , la matrice  $B$  ritornerà in  $a$  con gli stessi valori iniziali, cioè si ridurrà alla matrice identica.

TEOREMA VII. - Se  $s$  è una linea chiusa e si ha la relazione

$$\int_s A dz = U$$

supponendo di principiare la integrazione da un punto della linea  $s$  (ritornando poi al punto stesso), la stessa relazione sussisterà cominciando la integrazione da un altro punto della curva  $s$ .



Sia infatti  $a$  il punto della curva  $s$  da cui si incomincia la integrazione la prima volta, e supponiamo di eseguire una seconda integrazione lungo la stessa linea  $s$  cominciando da un altro punto  $b$  e percorrendola nello stesso senso della prima volta (vedi figura).

Si avrà, per il teorema I del § 3

$$\int_{bcab} Adz = \int_{bca} Adz \cdot \int_{adb} Adz$$

$$\int_{abca} Adz = \int_{adb} Adz \cdot \int_{bca} Adz$$

quindi

$$(1) \quad \int_{bcab} Adz = \left( \int_{adb} Adz \right)^{-1} \cdot \int_{abca} Adz \cdot \left( \int_{adb} Adz \right).$$

Ora se

$$\int_{abca} Adz = U$$

dalla (1) risulta

$$\int_{bcab} Adz = U.$$

TEOREMA VIII. - Se si ha  $y = \varphi(z)$ , avremo

$$\int_{y_0}^{y_1} Ady = \int_{z_0}^{z_1} A \varphi'(z) dz$$

in cui

$$y_0 = \varphi(z_0), \quad y_1 = \varphi(z_1).$$

Infatti, se  $B$  ha per derivata destra di VOLTERRA, rispetto ad  $y$ ,  $A$ , avremo

$$D_+ B = A \varphi'(z)$$

il che dimostra il teorema.

#### § 4. - Integrazioni indefinite di Volterra.

1. Determiniamo ora l'integrale indefinito destro di VOLTERRA di una matrice costante e cominciamo dal considerare i seguenti casi particolari.

α) Sia

$$(1) \quad A = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

una matrice costante. Per avere l'integrale indefinito destro della matrice  $A$ , data dalla (1), basterà determinare, come sappiamo, una matrice fondamentale dell'equazione

$$\frac{dB}{dx} = B \cdot A,$$

ossia  $n$  integrali particolari indipendenti del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = \lambda y_1 \\ \frac{dy_2}{dx} = \lambda y_2 \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = \lambda y_n \end{array} \right.$$

Si avrà, evidentemente, come matrice integrale della (1),

$$B = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda x} \end{vmatrix}$$

β) Un integrale della matrice

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{array} \right\|$$

sarà dato dalla matrice  $B$  formata da  $n$  soluzioni particolari indipendenti del sistema

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + \lambda y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2 + \lambda y_3 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_{n-1} + \lambda y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = \lambda y_n \end{array} \right.$$

Si avrà così la matrice

$$B = \left\| \begin{array}{cccc} e^{\lambda x} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n-1}}{n-1} e^{\lambda x} & \frac{x^{n-2}}{n-2} e^{\lambda x} & \frac{x^{n-3}}{n-3} e^{\lambda x} & \dots & e^{\lambda x} \end{array} \right\|$$

γ) Si abbia ora la matrice

$$A = [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}]$$



ove  $T^{(e_i)}$  è la matrice d'ordine  $e_i$

$$T^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{array} \right\|.$$

Posto

$$B = [S_1^{(e_1)}, S_2^{(e_2)}, \dots, S_p^{(e_p)}],$$

dove  $S_i^{(e_i)}$  è la matrice d'ordine  $e_i$

$$S_i^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccc} e^{\lambda_i x} & 0 & \dots & 0 \\ x e^{\lambda_i x} & e^{\lambda_i x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{e_i-1}}{e_i-1} e^{\lambda_i x} & \frac{x^{e_i-2}}{e_i-2} e^{\lambda_i x} & \dots & e^{\lambda_i x} \end{array} \right\|,$$

si avrà

$$\frac{dB}{dx} = [S_1^{(e_1)} \cdot T_1^{(e_1)}, \dots, S_p^{(e_p)} \cdot T_p^{(e_p)}] = B \cdot A.$$

Si consideri infine una matrice costante qualsiasi

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|.$$

Posto  $A$  sotto forma normale, avremo:

$$A = M^{-1} [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)} \dots T_p^{(e_p)}] M$$

ove  $M$  è una matrice costante e le  $\lambda_i$  sono le radici dell'equazione di grado  $n$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Un integrale della matrice  $A$  sarà (vedi teor. III § 3)

$$M^{-1} [S_1^{(e_1)}, S_2^{(e_2)}, \dots, S_p^{(e_p)}] M$$

e quindi l'integrale generale destro risulterà

$$(2) \quad B = C \cdot [S_1^{(e_1)}, S_2^{(e_2)}, \dots, S_p^{(e_p)}] \cdot M$$

ove  $C$  è una matrice costante arbitraria.

La matrice  $B$  definita dalla (2) ci dà quindi l'integrale generale di un sistema di  $n$  equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, cioè del sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

dove i coefficienti  $a_{ik}$  sono costanti.

Si osservi che la risoluzione del sistema (3) è ricondotta alla risoluzione di  $p$  sistemi lineari del tipo 1'). Il sistema (3) si scinde quindi in tanti sistemi lineari quanti sono i divisori elementari della matrice formata con i suoi coefficienti, contenente ciascun sistema tante incognite quante ne indica l'ordine di molteplicità del corrispondente divisore elementare.

L'integrazione del sistema (3) è così ricondotta all'integrazione di una sua forma normale (7).

(7) GOURSAT, [Analyse Mathématique vol. II, pag. 509].

### § 5. - Punti singolari di una matrice.

1. Ricordiamo che una matrice venne chiamata olomorfa in un punto se le funzioni che ne costituiscono gli elementi sono olomorfe in quel punto. Se una matrice in un punto non è olomorfa, chiameremo quel punto un punto singolare per la matrice.

Distingueremo i punti singolari della matrice in due categorie secondo che essi sono di *diramazione* della matrice oppure non sono tali. Sia  $\alpha$  un punto singolare isolato per la matrice  $A(z)$  e supponiamo che nelle vicinanze di tale punto  $A(z)$  sia uniforme. Per la matrice integrale  $B(z)$  il punto  $\alpha$  sarà in generale un punto singolare e nelle vicinanze di tale punto può essere multiforme. Se partendo da un punto  $a$  descriviamo, nel senso positivo, un contorno chiuso  $s$  attorno ad  $\alpha$ , non si troverà, in generale, la matrice fondamentale iniziale. Avendo supposto  $A(z)$  uniforme in tale intorno la matrice  $B(z)$  ritornerà in  $a$  moltiplicata a sinistra per una matrice costante. Indicando cioè con  $B(\overset{\dagger}{z})$  la matrice fondamentale iniziale e con  $B(\bar{z})$  la matrice che si ottiene descrivendo il contorno chiuso  $s$ , si avrà, detta  $M$  una matrice costante,

$$B(\bar{z}) = M \cdot B(\overset{\dagger}{z}).$$

La matrice  $M$  sarà chiamata, secondo VOLTERRA, il *modulo* della matrice  $B(z)$  relativo al punto di diramazione considerato.

Osserviamo che il determinante della matrice  $M$  è diverso da zero perchè si ha

$$\Delta(M) = \frac{\Delta(B(\bar{z}))}{\Delta(B(\overset{\dagger}{z}))}.$$

Il modulo  $M$  caratterizza la ramificazione della matrice  $A(z)$  e la costruzione di  $M$  è un problema fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali lineari. Se si opera così per tutti i contorni possibili si otterrà un insieme di matrici che formeranno un gruppo  $G$ . Questo si chiamerà il gruppo dell'equazione

$$(1) \quad DB = A.$$

Il modulo, relativo ad un dato contorno, dipende, oltre che dalla matrice  $A(z)$ , anche dalla scelta della matrice integrale fondamentale, vale a dire dalle condizioni iniziali. Infatti se  $B(z)$  e  $B_1(z)$  sono due matrici integrali fondamentali ed  $M, M_1$  i loro moduli, essendo

$$B_1(z) = CB(z),$$

dove  $C$  è una matrice costante, si avrà, dopo un giro attorno al punto singolare,

$$\begin{aligned} B_1(\bar{z}) &= CB(\bar{z}) = C \cdot M \cdot B(\bar{z}) = C \cdot M \cdot C^{-1} \cdot C \cdot B(\bar{z}) = \\ &= C \cdot M \cdot C^{-1} \cdot B_1(\bar{z}), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$(2) \quad M_1 = C \cdot M \cdot C^{-1}.$$

Inversamente, se vale la (2) esiste evidentemente una matrice integrale  $B_1(z) = CB(z)$  che ha per modulo  $M_1$ . Osserviamo inoltre che  $\Delta(M_1) \neq 0$  perchè

$$\Delta(M_1) = \frac{\Delta(B_1(\bar{z}))}{\Delta(B_1(\bar{z}))}$$

*Abbiamo quindi che i moduli di due matrici integrali relativi allo stesso contorno sono uno la trasformata dell'altro.*

L'insieme delle matrici  $C \cdot M \cdot C^{-1}$  formerà un gruppo che si potrà indicare con  $C \cdot G \cdot C^{-1}$  e che potrà, come il gruppo  $G$ , essere riguardato come il gruppo dell'equazione (1) relativo alla matrice integrale  $B_1(z)$ .

Allo scopo di avere un solo gruppo per l'equazione (1) non considereremo come distinti il gruppo  $G$  e le sue trasformate per le diverse matrici.

**2.** Da quanto precede risulta quindi che l'integrale della matrice  $A(z)$  esteso ad una linea chiusa  $s$ , racchiudente il punto singolare  $\alpha$ , dipende dal punto da cui si incomincia l'integrazione.

Precisamente, se  $a$  e  $b$  sono due punti di tale contorno, si avrà

$$\int_{bcab} Adz = \left( \int_{adb} Adz \right)^{-1} \int_{abca} Adz \cdot \left( \int_{adb} Adz \right),$$

dove le integrazioni sono eseguite nel verso positivo (vedi fig. a pag. 82). Tale relazione si deduce d'altronde anche dalla formula (1) del § 3.

Posto allora

$$B(x) = \int_a^x Adz,$$

il modulo della matrice  $B(x)$  relativo al contorno  $s$  sarà dato dal valore dell'  $\int_s Adz$  quando si comincia l'integrazione a partire dal punto  $a$ . Se  $B_1(z)$  indica una matrice integrale fondamentale qualsiasi della matrice  $A$ , essendo (teor. V, § 3)

$$B_1(z) = B_1(a) \cdot \int_a^z Adz,$$

il modulo di  $B_1(z)$ , relativo al contorno  $s$ , sarà

$$B_1(a) \cdot \int_s Adz \cdot B_1^{-1}(a).$$

**3.** Consideriamo ora un campo doppiamente connesso limitato da due curve chiuse  $s_1$  e  $s_2$  e supponiamo che in tale campo la matrice  $A(z)$  sia olomorfa. Si uniscano le due linee  $s_1$  e  $s_2$  mediante un taglio e sieno  $l_1$  e  $l_2$  i due orli del taglio. Si otterrà così un campo semplicemente connesso entro il quale  $A(z)$  è olomorfa. Si ha (teor. VI § 3)

$$\int_{s_1} Adz \cdot \int_{l_2} Adz \cdot \int_{s_2} Adz \cdot \int_{l_1} Adz = U$$

ossia

$$(3) \quad \int_{l_2} Adz \cdot \int_{s_2} Adz \cdot \int_{l_1} Adz = \left( \int_{s_1} Adz \right)^{-1},$$

supponendo di eseguire le integrazioni lungo le diverse linee nel senso indicato dalle frecce nella fig. 1. Essendo,

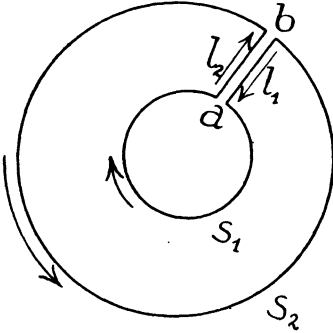


Fig. 1

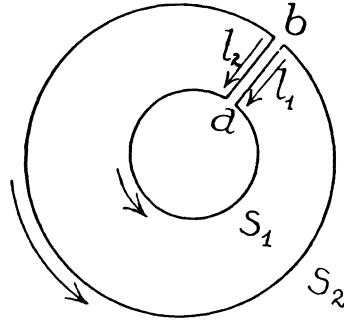


Fig. 2

$$\int_{l_2} Adz = \left( \int_{l_1} Adz \right)^{-1}$$

ed eseguendo le integrazioni nel verso indicato dalle frecce nella fig. 2, la (3) diventa

$$\int_{s_1} Adz = \left( \int_{l_1} Adz \right)^{-1} \int_{s_2} Adz \cdot \left( \int_{l_1} Adz \right).$$

Possiamo quindi enunciare il seguente :

TEOREMA I. - *Se due linee chiuse limitano un campo doppiamente connesso entro il quale la matrice  $A(z)$  è olomorfa, l'integrale esteso ad un contorno è la trasformata dell'integrale esteso all'altro contorno quando le integrazioni si incomincino dai punti  $a$  e  $b$ .*

Sia ora  $B(z)$  una matrice integrale fondamentale qualsiasi di  $A(z)$ . Lungo la curva  $s_1$  si avrà

$$B(z) = B(a) \int_a^z A(z) dz$$

e lungo la curva  $s_2$

$$B(z) = B(b) \cdot \int_b^z A(z) dz.$$

Il modulo di  $B(z)$  lungo la curva  $s_1$ , come sappiamo, è

$$M = B(a) \cdot \int_{s_1} A(z) dz \cdot B^{-1}(a)$$

e lungo la curva  $s_2$

$$M_1 = B(b) \cdot \int_{s_2} A(z) dz \cdot B^{-1}(b) = C \cdot M \cdot C^{-1},$$

avendo posto

$$C = B(b) \int_a^b A(z) dz \cdot B^{-1}(a)$$

e le integrazioni lungo le linee  $s_1$  e  $s_2$  essendo iniziate rispettivamente dai punti  $a$  e  $b$  e nello stesso verso. Abbiamo perciò il seguente

**TEOREMA II.** — *I moduli di una matrice integrale relativi a due curve chiuse, contornanti lo stesso punto di diramazione, sono uno la trasformata dell'altro.*

Si vede così che il modulo relativo ad un punto di diramazione dipende sia dalla matrice integrale scelta che dal contorno racchiudente il punto singolare. Tutti questi moduli si ottengono però da uno di essi a mezzo di trasformazioni.

Da quanto precede segue che se indichiamo con  $M$ ,  $M_1$  i moduli di due matrici integrali fondamentali relativi allo stesso contorno, oppure relativi alla stessa matrice ed a due contorni racchiudenti lo stesso punto singolare, si avrà, scrivendo tali moduli sotto forma normale,

$$M = S_1 [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] S_1^{-1}$$

$$M_1 = S_2 [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] S_2^{-1}.$$

Si vede così che la matrice

$$W = [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}]$$

viene ad essere comune a tutte le matrici  $M$  e sarà perciò chiamata **l'invariante** o, secondo il VOLTERRA, **il residuo** della matrice  $A(z)$  relativo al punto singolare considerato.

Se si conosceranno gli invarianti di tutte le matrici  $M$ , il gruppo  $G$  sarà completamente determinato, perchè non si riguarda come distinto dalle sue trasformate  $C^{-1}MC$ .

**5.** Determiniamo ora l'invariante di una matrice  $A(z)$  i cui elementi diventano infiniti del primo ordine in un punto che per semplicità supporremo sia il punto zero. Consideriamo dapprima la matrice

$$A(z) = A_0 \frac{1}{z}$$

dove  $A_0$  è una matrice costante.



Avremo

$$\text{Inv. } A(z) = \text{Trasformata } \int_s A_0 \frac{1}{z} dz$$

dove  $s$  indica una curva chiusa qualsiasi racchiudente il punto zero.

Prendiamo come contorno  $s$  una circonferenza con il centro nel punto  $z=0$  e raggio  $r$ ; sarà:

$$z = r e^{i\theta}, \quad dz = i r e^{i\theta} d\theta$$

e quindi

$$\int_s A_0 \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} i A_0 d\theta.$$

Posta la matrice  $i A_0$  sotto forma normale

$$i A_0 = \text{Trasformata di } [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}],$$

ove

$$T_i^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{array} \right\|,$$

mediante le integrazioni (§ 4), si ha

$$\int_0^{2\pi} i A_0 d\theta = \text{Trasformata di } [S_1^{(e_1)}, S_2^{(e_2)}, \dots, S_p^{(e_p)}]$$

dove

$$S_i^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccc} e^{2\pi\lambda_i} & 0 & \dots & 0 \\ 2\pi e^{2\pi\lambda_i} & e^{2\pi\lambda_i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(2\pi)^{e_i-1}}{e_i-1} & e^{2\pi\lambda_i} & \dots & e^{2\pi\lambda_i} \end{array} \right\|.$$

Posto la matrice

$$W = [S_1^{(e_1)}, S_2^{(e_2)}, \dots, S_p^{(e_p)}]$$

sotto forma normale, si trova facilmente

$$W = S [V_1^{(e_1)}, V_2^{(e_2)}, \dots, V_p^{(e_p)}] S^{-1}$$

ove

$$V_i^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccc} e^{2\pi\lambda_i} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & e^{2\pi\lambda_i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{2\pi\lambda_i} \end{array} \right\|$$

Avremo quindi

$$\text{Inv } A_0 \frac{1}{z} = [V_1^{(e_1)}, V_2^{(e_2)}, \dots, V_p^{(e_p)}].$$

Si consideri ora la matrice

$$A(z) = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{a_{11}}{z} + \varphi_{11}(z) & \frac{a_{12}}{z} + \varphi_{12}(z) & \dots & \frac{a_{1n}}{z} + \varphi_{1n}(z) \\ \frac{a_{21}}{z} + \varphi_{21}(z) & \frac{a_{22}}{z} + \varphi_{22}(z) & \dots & \frac{a_{2n}}{z} + \varphi_{2n}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{z} + \varphi_{n1}(z) & \frac{a_{n2}}{z} + \varphi_{n2}(z) & \dots & \frac{a_{nn}}{z} + \varphi_{nn}(z) \end{array} \right\|$$

dove le  $a_{ik}$  sono costanti e le  $\varphi_{ik}(z)$  sono funzioni olomorfe negli intorno del punto  $z=0$ .

Si avrà

$$\text{Inv } A(z) = \text{Trasformata di } \int_s \left\| \begin{array}{ccc} \frac{a_{11}}{z} + \varphi_{11}(z) & \dots & \frac{a_{1n}}{z} + \varphi_{1n}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{z} + \varphi_{n1}(z) & \dots & \frac{a_{nn}}{z} + \varphi_{nn}(z) \end{array} \right\| dz .$$

Facendo lo stesso cambiamento di variabile del caso precedente, si ha

$$\int_s \left\| \begin{array}{ccc} \frac{a_{11}}{z} + \varphi_{11}(z) & \dots & \frac{a_{1n}}{z} + \varphi_{1n}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{z} + \varphi_{n1}(z) & \dots & \frac{a_{nn}}{z} + \varphi_{nn}(z) \end{array} \right\| dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\| \begin{array}{ccc} ia_{11} + ir\varphi_{11} & \dots & ia_{1n} + ir\varphi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ia_{n1} + ir\varphi_{n1} & \dots & ia_{nn} + ir\varphi_{nn} \end{array} \right\| d\theta .$$

Se  $m$  è un numero superiore al massimo modulo delle funzioni  $\varphi_{ik}(z)$  negli intorno del punto  $z=0$  avremo che le due matrici

$$\left\| \begin{array}{ccc} ia_{11} & \dots & ia_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ia_{n1} & \dots & ia_{nn} \end{array} \right\| , \quad \left\| \begin{array}{ccc} ia_{11} + ir\varphi_{11} & \dots & ia_{1n} + ir\varphi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ia_{n1} + ir\varphi_{n1} & \dots & ia_{nn} + ir\varphi_{nn} \end{array} \right\|$$

differiranno fra loro meno di  $mr$ , onde

$$\int_0^{2\pi} \left\| \begin{array}{cccc} ia_{11} & \dots & ia_{1n} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ ia_{n1} & \dots & ia_{nn} & \end{array} \right\| d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \left\| \begin{array}{cccc} ia_{11} + ir\varphi_{11} & \dots & ia_{1n} + ir\varphi_{1n} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ ia_{n1} + ir\varphi_{n1} & \dots & ia_{nn} + ir\varphi_{nn} & \end{array} \right\| d\theta$$

differiranno fra loro tanto poco quanto si vuole all'impiccolire conveniente di  $r$  (vedi § 2, n. 4). Avremo quindi

$$\text{Inv}_{z=0} A(z) = \text{Trasformata di } \int_s \left\| \begin{array}{cccc} ia_{11} & \dots & ia_{1n} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ ia_{n1} & \dots & ia_{nn} & \end{array} \right\| d\theta.$$

Siamo così ricondotti al caso precedente.

*La determinazione dell'invariante si ottiene quindi dalla risoluzione di una equazione di grado  $n$  i cui coefficienti dipendono soltanto dai termini d'infinito degli elementi della matrice  $A(z)$ .*

Possiamo perciò enunciare il seguente teorema, perfettamente analogo al noto teorema di CAUCHY sulle funzioni analitiche

**TEOREMA** - *Se  $A(z)$  è una funzione olomorfa negli intorno del punto  $z=0$  ed  $s$  è una curva chiusa racchiudente tale punto, l'integrale*

$$\int_s A \frac{1}{z} dz,$$

*a meno di matrici trasformatrici, non dipenderà che dai valori degli elementi della matrice  $A$  nel punto  $z=0$ .*

**6.** Se  $M$  è il modulo della matrice integrale  $B(z)$ , relativo al contorno  $s$ , si ponga tale matrice sotto forma normale

$$M = C^{-1} [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] C$$

e si consideri la matrice integrale

$$B_1(z) = C \cdot B(z) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tale matrice, dopo aver fatto percorrere alla variabile  $z$  il contorno  $s$ , diventa

$$C \cdot M \cdot B(z) = [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] B_1(z)$$

e gli elementi della matrice  $B_1(z)$  si saranno perciò trasformati nei seguenti

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{1h} = \lambda_1 y_{1h} \\ Y_{2h} = \lambda_1 y_{2h} + y_{1h} \\ \dots \dots \dots \\ Y_{e_1 h} = \lambda_1 y_{e_1 h} + y_{e_1 - 1 h} \\ Y_{e_1 + 1 h} = \lambda_2 y_{e_1 + 1 h} \\ Y_{e_1 + 2 h} = \lambda_2 y_{e_1 + 2 h} + y_{e_1 + 1 h} \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

Si vede così che si ottengono tanti gruppi di integrali quanti sono i divisori elementari della matrice  $M$  ognuno contenente tante soluzioni quante ne indica l'ordine del corrispondente divisore elementare. Per ottenere un solo gruppo bisogna che i divisori elementari si riducano ad uno solo.

Al contrario perchè gli integrali soddisfino alla condizione

$$Y = \lambda y$$

bisogna che i divisori elementari sieno tutti semplici.

La legge definita dalla (4) è stata trovata, come è noto, da FUCHS<sup>(8)</sup>.

(8) FUCHS, [Journ. de Crelle, t. 66 e 68].

7. Facciamo ora vedere che la matrice integrale  $B(z)$ , nell'intorno del punto di diramazione, può scomporsi nel prodotto di due matrici, una delle quali è uniforme nelle vicinanze del punto di diramazione e l'altra non dipende che dal modulo  $M$  e può determinarsi facilmente.

Infatti poniamo  $M$  sotto forma normale

$$M = C^{-1} [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] C$$

ove

$$T_i^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{array} \right\|.$$

Posto

$$\lambda_i = e^{2\pi i \omega_i}$$

avremo che la matrice (§ 5, n. 5)

$$W = [\tau_1^{(e_1)}, \tau_2^{(e_2)}, \dots, \tau_p^{(e_p)}],$$

ove

$$\tau_i^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{array} \right\| \frac{1}{z} = \overline{\tau_i^{(e_i)}} \frac{1}{z},$$

ha per invariante nel punto zero

$$[T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}].$$

Abbiamo ora

$$V = \int W dz = \int W_1 \frac{1}{z} dz = \int W_1 d \lg z$$

ove

$$W_1 = [\bar{\tau}_1^{(e_1)}, \bar{\tau}_2^{(e_2)}, \dots, \bar{\tau}_p^{(e_p)}].$$

Posto

$$\lg z = t$$

avremo

$$V = [K_1^{(e_1)}, K_2^{(e_2)}, \dots, K_p^{(e_p)}]$$

ove

$$K_i^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccccc} z^{\lambda_i} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z^{\lambda_i} \lg z & z^{\lambda_i} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{z^{\lambda_i}}{|2|} \lg^2 z & z^{\lambda_i} \lg z & z^{\lambda_i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{z^{\lambda_i}}{|e_i-1|} \lg^{e_i-1} z & \frac{z^{\lambda_i}}{|e_i-2|} \lg^{e_i-2} z & \dots & \dots & z^{\lambda_i} \end{array} \right\|$$

Potrà quindi trovarsi una matrice costante  $N$ , tale che

$$B_1(z) = N^{-1} [K_1^{(e_1)}, K_2^{(e_2)}, \dots, K_p^{(e_p)}] N$$

abbia per modulo nel punto di diramazione  $z = 0$  la matrice  $M$ .  
Ne segue che

$$B_1^{-1}(z) \cdot B(z) = B_2(z)$$

non avrà più diramazione nel punto  $z = 0$  e quindi

$$B(z) = B_1(z) \cdot B_2(z) \quad \text{c. v. d.}$$

La ricerca della matrice uniforme  $B_2(z)$  è in generale una questione molto difficile nella teoria delle equazioni lineari dif-

ferenziali. Tale matrice, nel punto  $z = 0$ , potrà avere o una singolarità *essenziale* od una singolarità *polare*. In quest'ultimo caso si potrà, evidentemente, fare in modo che la matrice  $B_2(z)$  sia olomorfa nell'origine e la matrice integrale fondamentale  $B(z)$  si dirà allora *regolare*.

8. Consideriamo l'equazione

$$(5) \quad DB = \frac{A}{z},$$

dove  $A$  è una matrice olomorfa in un cerchio avente il centro nell'origine e il raggio  $r$  ed i cui elementi sono sviluppabili, entro tale cerchio, in serie di TAYLOR, e proviamo che per tale equazione esiste una matrice integrale regolare.

Separiamo nella matrice  $A$  la parte che contiene la  $z$  dalla parte costante, cioè poniamo

$$A = A^{(0)} + \bar{A}z$$

e scriviamo la matrice  $A^{(0)}$  sotto forma normale

$$(6) \quad A^{(0)} = C^{-1} [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, T_p^{(e_p)}] C,$$

dove

$$T_i^{(e_i)} = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{array} \right\|$$

e le  $\lambda$  sono le radici dell'equazione caratteristica

$$F(\lambda) = \left| \begin{array}{cccc} a_{11}^0 - \lambda & a_{12}^0 & \dots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - \lambda & \dots & a_{2n}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \dots & a_{nn}^0 - \lambda \end{array} \right| = 0.$$



Sapendo che la matrice (vedi § 5, n. 5)

$$[T_1, T_2, \dots, T_p] \frac{1}{z}$$

ha lo stesso invariante della matrice  $\frac{A}{z}$ , si ponga

$$B = \int [T_1, T_2, \dots, T_n] \frac{1}{z} dz \cdot \bar{B}.$$

L'equazione (5) diventa allora

$$\frac{d\bar{B}}{dz} = \bar{B} \frac{A}{z} - [T_1, T_2, \dots, T_p] \frac{1}{z} \bar{B},$$

ossia

$$\frac{d\bar{B}}{dz} = \bar{B} (A^{(0)} + \bar{A} z) \frac{1}{z} - [T_1, T_2, \dots, T_p] \frac{1}{z} \bar{B},$$

od anche

$$(7) \quad z \frac{d\bar{B}}{dz} - \bar{B} A^{(0)} + [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] \bar{B} = \bar{B} \bar{A} z,$$

che è l'equazione differenziale alla quale deve soddisfare la matrice  $\bar{B}$ . Proviamo che si può soddisfare alla (7) con una matrice olomorfa riducentesi per  $z=0$  alla matrice unità.

Posto

$$\bar{A} = \sum_1^{\infty} A^{(i)} z^i,$$

e, formalmente,

$$(8) \quad \bar{B} = \sum_0^{\infty} \bar{B}^{(j)} z^j, \quad (B^{(0)} = U)$$

dalla (7) si ricavano le seguenti formule di ricorrenza

$$(9) \quad k \bar{B}^{(k)} - \bar{B}^{(k)} A^{(0)} + [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] \bar{B}^{(k)} = \sum_1^{k-1} \bar{B}^{(k-h)} A^{(h)}.$$

In corrispondenza al divisore elementare  $(\lambda - \lambda_1)^{e_1}$ , della matrice  $A^{(0)}$ , dalle (9) si deducono i seguenti  $e_1$  sistemi

$$(10) \quad a_{1s} \bar{b}_{s1} + a_{2s} \bar{b}_{s2} + \dots + (a_{ss} - k - \lambda_1) \bar{b}_{ss} + \dots + a_{ns} \bar{b}_{sn} = P_{ts}$$

$$(t=1, 2, \dots, e_1; s=1, 2, \dots, n)$$

nelle funzioni incognite  $\bar{b}_{ts}$  ed i cui termini noti  $P_{ts}$  sono delle funzioni razionali intere degli elementi delle matrici  $A^h$  e  $\bar{B}^{k-h}$  ( $h=1, 2, \dots, k-1$ ).

Il determinante dei coefficienti di tali sistemi vale  $F(k + \lambda_1)$  e se ammettiamo che le radici dell'equazione caratteristica non differiscano fra loro per interi positivi non nulli, si avrà

$$F(k + \lambda_1) \neq 0,$$

e dai sistemi (10) si potranno determinare gli elementi delle prime  $e_1$  righe della matrice  $\bar{B}^{(k)}$ . Ragionando in modo analogo sugli altri divisori elementari si verrà a determinare la matrice  $\bar{B}^{(k)}$  e quindi lo sviluppo (8). Ottenuto così lo sviluppo in serie (8) resta ora da dimostrarne la convergenza. Detta  $M$  la matrice i cui elementi sono rispettivamente maggiori ai massimi moduli della matrice  $A$ , si consideri l'equazione

$$(11) \quad S - SA^{(0)} + [T_1^{(e_1)}, T_2^{(e_2)}, \dots, T_p^{(e_p)}] S = S \frac{M}{1 - \frac{z}{r}} z + C,$$

dove  $C$  è la matrice costante della formula (6). Si vede che l'equazione (11) risulta soddisfatta, per  $z=0$ , dalla matrice  $C$  e il determinante funzionale rispetto agli elementi di una linea della matrice  $S$  è  $F(\lambda + 1) \neq 0$ . Esiste quindi nell'intorno dell'origine

un'unica matrice  $S$  soddisfacente all'equazione (11) e che per  $z = 0$  assume il valore  $C$ . Lo sviluppo di questa matrice ha tutti i coefficienti positivi ed è certamente convergente in un intorno dell'origine. Si vede poi facilmente che i coefficienti dello sviluppo della matrice  $\bar{B}$  ricavati dalla (7) hanno un modulo minore dei coefficienti corrispondenti ricavati dalla (11). Si conclude che l'equazione (7) è risolubile e quindi anche l'equazione (5) ed essa ammetterà, in un dominio dell'origine, una matrice integrale regolare.

2. Ci rimane da esaminare il caso che il determinante  $F(\lambda)$  abbia dei divisori che differiscono fra loro per numeri interi non nulli.

Sieno  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  delle radici di  $F(\lambda) = 0$  differenti fra loro per numeri interi ed ordiniamole in modo che le differenze

$$\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3, \dots, \lambda_1 - \lambda_k$$

non sieno un numero intero negativo. Supponiamo, inoltre, che  $\lambda_1$  non differisca d'un numero intero da ogni altra radice di  $F(\lambda) = 0$ .

Applicando i ragionamenti del numero precedente si determineranno  $e$  righe indipendenti della matrice integrale dell'equazione (5), se  $e$  è il grado di molteplicità di  $\lambda - \lambda_1$  in  $F(\lambda)$ . Si potrà allora trasformare l'equazione (5) in una nuova equazione (5') dove le matrici, integranda ed integrale, sono d'ordine  $n - e$ . L'equazione  $F'(\lambda)$  corrispondente avrà delle radici corrispondenti a  $\lambda_2 \dots \lambda_k$  e ad ogni altra radice  $\lambda$  che non sia  $\lambda_1$ . Si ragionerà allora sull'equazione (5') come sull'equazione (5) e così di seguito.

Riassumendo, si avrà che *ad ogni divisore elementare di grado  $e$  e di molteplicità in  $F(\lambda) = 0$  corrisponderà sempre  $e$  righe indipendenti della matrice integrale.*

Siamo venuti in tal modo a determinare un sistema fondamentale di integrali per il sistema di equazioni lineari differenziali



sotto la forma

$$(13) \quad DB = A.$$

Si faccia ora la trasformazione

$$S = B \cdot \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z^{n-1} \end{array} \right\| ,$$

ossia

$$(14) \quad B = S \cdot \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{z^{n-1}} \end{array} \right\| .$$

Avremo :

$$\frac{dS}{dz} = B \cdot \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)z^{n-2} \end{array} \right\| + \frac{dB}{dz} \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z^{n-1} \end{array} \right\| ,$$

e per la (13) e (14)

$$\frac{dS}{dz} = S \cdot \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{z^{n-1}} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)z^{n-2} \end{array} \right\| +$$

$$+ S \cdot \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{z^{n-1}} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{p_n}{z^n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{p_{n-1}}{z^{n-1}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{p_{n-2}}{z^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{p_1}{z} \end{array} \right\| \cdot$$

$$\cdot \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z^{n-1} \end{array} \right\|$$

ossia

$$\frac{dS}{dz} = S \left\{ \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{z} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{z} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{p_n}{z} \\ \frac{1}{z} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{p_{n-1}}{z} \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 & \dots & 0 & -\frac{p_{n-2}}{z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{z} & -\frac{p_1}{z} \end{array} \right\| \end{array} \right\}$$

La matrice del nuovo sistema lineare ha dunque solo poli del 1° ordine.

### 11. L'equazione

$$(15) \quad DB = A,$$

dove gli elementi della matrice  $A$  sono funzioni razionali con poli semplici e regolari all'infinito, si potrà scrivere sotto la forma

$$(15') \quad DB = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{z - a_i},$$

dove  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  sono delle matrici costanti.

Per la matrice integrale  $B$  si potranno avere, negli intorno dei punti singolari  $a_i$ , degli sviluppi in serie analoghi a quelli precedentemente considerati.

L'invariante  $M_i$  di tale equazione, nel punto singolare  $a_i$ , sarà dato da

$$M_i = \text{Trasformata} \int A_i \frac{1}{z} dz$$

e gli elementi  $\{M_i\}_{\lambda\mu}$  saranno perciò delle funzioni intere dei coefficienti  $\{A_i\}_{\lambda\mu}$ . Tale proprietà fu rilevata per la prima volta

