

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DARIO GRAFFI

Una teoria ereditaria dell'effetto Lussemburgo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 7 (1936), p. 36-54

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1936__7__36_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA TEORIA EREDITARIA DELL' EFFETTO LUSSEMBURGO

Nota di DARIO GRAFFI a Cagliari.

INTRODUZIONE. — In una classica nota del 1909 ⁽¹⁾ il VOLTERRA, allo scopo di interpretare i fenomeni di isteresi, introdusse, per primo, nell'equazioni dell'elettrodinamica termini di carattere ereditario.

Due anni dopo il CISOTTI ⁽²⁾ (che fin dal 1908 aveva avanzato idee analoghe a quelle del VOLTERRA ⁽³⁾) applicò brillantemente le equazioni contenenti termini ereditari allo studio dei fenomeni di dispersione.

In un lavoro uscito di recente nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo ⁽⁴⁾ abbiamo avuto occasione di riprendere le idee avanzate più di un quarto di un secolo fa dal VOLTERRA e dal CISOTTI. Cioè abbiamo giustificato con vari metodi che l'equazioni di propagazione delle onde elettromagnetiche in un gas jonizzato debbono contenere termini ereditari. E in base a considerazioni di carattere elettronico abbiamo supposto questi termini lineari conformemente alle ipotesi dei suddetti autori.

⁽¹⁾ VOLTERRA - *Sull'equazioni dell'elettrodinamica*. Rendiconti Accademia dei Lincei I° Sem. 1909, pag. 203.

⁽²⁾ CISOTTI - *L'ereditarietà lineare e i fenomeni dispersivi*. Rendiconti Istituto Lombardo II° Sem. 1911, vol. XLIV.

⁽³⁾ CISOTTI - *Sull'isteresi magnetica*. Rendiconti Accademia dei Lincei, 1908.

⁽⁴⁾ *Sopra alcuni fenomeni ereditari della elettrologia*. Nota I-V-1935-36. In seguito questo lavoro del quale qui interessa particolarmente la V nota verrà indicato col simbolo F. E.

Ora lo studio della propagazione delle onde elettromagnetiche nei gas jonizzati ha principalmente lo scopo di spiegare la trasmissione delle onde radio che, come è noto, avviene principalmente per mezzo dell'alta atmosfera la quale si sa essere fortemente jonizzata. Perciò le osservazioni sperimentali sulla trasmissione di queste onde costituiscono la verifica delle ipotesi fatte per scrivere le equazioni dell'elettrodinamica in un gas jonizzato.

Orbene, fino a circa tre anni fa, l'ipotesi che queste equazioni fossero lineari ⁽⁵⁾ risultava sempre in accordo con l'esperienza. Nel 1933 fu però scoperto il fenomeno Lussemburgo ⁽⁶⁾ incompatibile con la suddetta ipotesi. Infatti, ammettendo lineari le equazioni dell'elettromagnetismo, risulta subito che il campo elettromagnetico emesso da un antenna radio non viene influenzato dai campi emessi da altre antenne. Ora com'è noto, il fenomeno Lussemburgo consiste nel fatto che un'onda di una stazione molto potente può influenzare il campo elettromagnetico dovuto ad un'altra stazione dando luogo anche a un campo con la modulazione della prima stazione e la frequenza della seconda. Diventa perciò necessario non ritenere lineari le equazioni dell'elettromagnetismo almeno quando non si voglia trascurare il fenomeno Lussemburgo.

Ora nel nostro lavoro citato le proprietà dei gas jonizzati venivano introdotte nelle equazioni dell'elettromagnetismo supponendo il vettore densità di corrente \vec{u} un funzionale del campo elettrico \vec{F} . Per quanto precede si dovrà supporre questo funzionale non lineare. L'ipotesi più semplice che potremo fare in proposito sarà di svilupporlo sviluppabile in serie di TAYLOR (nel senso delle funzioni di linea) e di poter arrestare lo sviluppo senza errore sensibile al primo termine non lineare diverso dallo zero. Si otterranno così equazioni di MAXWELL non lineari, dalle

⁽⁵⁾ Ovviamente supponendo lineari i termini ereditari che compaiono nell'equazioni dell'elettromagnetismo delle equazioni risultano esse pure lineari come chiarito in F. E.

⁽⁶⁾ Per un resoconto dei vari lavori finora apparsi sul fenomeno Lussemburgo si veda la nostra nota inserita nell'*Alta Frequenza*, vol. V, pag. 42. 1936,

quali potremo dedurre le principali proprietà del fenomeno in discorso che l'esperienza ci ha fatto conoscere. Si otterrà così una teoria (che diremo teoria ereditaria) del fenomeno Lussemburgo.

È da notare che un'altra teoria, di carattere elettronico, è stata proposta dai Sigg. BAYLEY e MARTIN (7) più intuitiva e per il calcolo numerico più vantaggiosa (8) di quella ereditaria.

Nondimeno abbiamo creduto opportuno per varie ragioni sviluppare quest'ultima teoria. Anzitutto essa ci permette di scrivere le equazioni di MAXWELL in modo da poter tener conto anche del fenomeno Lussemburgo, risultato che ci sembra di qualche interesse, almeno dal punto di vista concettuale, che non è stato ottenuto, nè sembra facile ottenersi, dalle considerazioni di BAYLEY e MARTIN. Poi essendo teoria nell'indirizzo classico della fisica-matematica, cioè con scarse ipotesi sulla natura del mezzo in cui si propagano i campi elettromagnetici, può adattarsi a qualunque spiegazione di carattere elettronico e perciò può non essere incompatibile con le ipotesi di BAYLEY e MARTIN. Infine la teoria ereditaria prevede (pur non potendo fissarne l'entità) una dipendenza del fenomeno Lussemburgo dalla polarizzazione dei due campi che si influenzano, il quale risultato, sebbene con molta probabilità controllabile soltanto con esperienza di laboratorio, può avere un certo interesse

Riassumiamo ora brevemente il contenuto del presente lavoro. Cominceremo con scrivere le relazioni funzionali fra \bar{n} e \bar{F} adatte per spiegare il fenomeno Lussemburgo, ottenendo così le ricercate equazioni di MAXWELL non lineari. Poi faremo vedere come da esse si possa prevedere il fenomeno Lussemburgo e le sue principali leggi. Passeremo in seguito allo studio dell'influenza della polarizzazione sul fenomeno di cui è oggetto la presente nota. Infine mostreremo che i risultati conseguiti in F. E. sotto le ipotesi dell'ereditarietà lineare restano ancora valide nelle ipotesi più generali di cui si fa uso in questo lavoro.

(7) BAYLEY e MARTIN - Phil. Mag. XVIII, pag. 369 1934.

(8) Il vantaggio consiste nel fatto che BAYLEY e MARTIN introducono nelle loro equazioni termini di diretto controllo sperimentale. Si tratta però di guadagno più apparente che reale per le scarse conoscenze finora acquisite sulla costituzione della ionosfera.

2. - GENERALITÀ SUI FUNZIONALI CHE RAPPRESENTANO LA DENSITÀ DI CORRENTE E IPOTESI SEMPLIFICATRICI. — Abbiamo supposto \bar{u} un funzionale di \bar{F} sviluppabile in serie di TAYLOR nel senso delle funzioni di linea.

Perciò ammettendo $\bar{F}(r)$ nulla per $r \leq 0$ e tenendo conto che i valori di $\bar{F}(r)$ per $r > t$ non hanno alcuna influenza su $\bar{u}(t)$ sarà :

$$(1) \quad \bar{u}(t) = \int_0^t \alpha(t, r) \bar{F}(r) dr + \int_0^t \beta(t, r_1, r_2) \bar{F}(r_1) \bar{F}(r_2) dr_1 dr_2 + \\ + \int_0^t \int_0^t \int_0^t \gamma(t, r_1, r_2, r_3) \bar{F}(r_1) \bar{F}(r_2) \bar{F}(r_3) dr_1 dr_2 dr_3 + \dots$$

dove $\alpha(t, r)$ è una omografia funzione di t e r ; $\beta(t, r_1, r_2)$ una iperomografia del secondo ordine funzione di t, r_1, r_2 ; $\gamma(t, r_1, r_2, r_3)$ una iperomografia del terzo ordine funzione di t, r_1, r_2, r_3 ecc. ⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ Si noti che di solito nei fenomeni ereditari si aggiunge a secondo membro di (1) una funzione di $\bar{F}(t)$, $f(\bar{F}(t))$. Noi abbiamo supposto queste funzione nulla perchè a questo risultato siamo sempre giunti in E. F.. Si può giustificare l'ipotesi in discorso col seguente ragionamento valido però per gas molto rarefatto e supponendo le componenti di $f(\bar{F}(t))$ funzioni lineari delle componenti di $\bar{F}(t)$.

Ammettendo per semplicità che nel gas jonizzato vi sia una sola specie di joni avremo per cose note :

$$(a) \quad \bar{u} = \Sigma e \bar{v}$$

essendo e la carica degli joni \bar{v} la loro velocità e la sommatoria estesa a tutti gli joni contenuti nell'unità di volume.

Ora per $t = 0$ (essendo $\bar{F}(t) = 0$ per $t \leq 0$) le velocità saranno distribuite in modo caotico, per cui $\bar{u} = 0$ per $t = 0$.

Ricordiamo ora che fra un urto ed un altro la velocità \bar{v} degli joni segue la legge :

$$(b) \quad m \frac{d\bar{v}}{dt} = e \bar{F} + \bar{H} e \wedge \bar{v}$$

dove m è la massa dei jone, \bar{H} il campo magnetico che agisce sul gas jonizzato. Tenendo conto che, per l'ipotesi della rarefazione del gas, il numero

Ora supponendo \bar{u} un funzionale isotropo di $\bar{F}(r)$, nel senso definito in un altro nostro lavoro ⁽¹⁰⁾, ne conseguirebbe subito l'annullarsi in (1) di tutti i termini di ordine pari e in particolare di β . Però i gas jonizzati dell'alta atmosfera non si possono considerare isotropi per l'azione nel campo magnetico terrestre. Comunque anche in questo caso è molto probabile $\beta = 0$. Ciò si può giustificare ammettendo che un gas jonizzato, con numero di joni praticamente invariabile, non presenti, anche soggetto ad un campo magnetico, alcun effetto raddrizzatore; per cui se $\bar{F}(t)$ in ogni istante cambia di segno, lo stesso accade di \bar{u} . Allora con considerazioni esposte nella nostra nota ora citata è facile provare che sarebbe valida la relazione:

$$\beta \bar{F}(r_1) \bar{F}(r_2) = -\beta \bar{F}(r_1) \bar{F}(r_2),$$

dalla quale per l'arbitrarietà di $\bar{F}(r_1)$, $\bar{F}(r_2)$ scende $\beta = 0$.

totale degli joni è molto grande rispetto al numero di quelli che in un certo istante sono soggetti ad un urto (e per i quali non vale la β) si può derivare la (α) e sostituirvi con buona approssimazione la (β); si ha così:

$$(\gamma) \quad \frac{d\bar{u}}{dt} = \Sigma \frac{e^2}{m} \bar{F} + \Sigma \frac{e^2}{m} \bar{H} \wedge \bar{v},$$

che per $t = 0$ è pure nulla. Ciò mostra che se al secondo membro di (1) vi fosse $f(\bar{F}(t))$ sarebbe $\frac{df}{d\bar{F}} \bar{F}'(0) = 0$ e siccome $\bar{F}'(0)$ si può prendere in modo arbitrario, anche l'omografia $\frac{df}{d\bar{F}}$ sarebbe nulla cioè nulle tutte le derivate prime delle componenti di $f(\bar{F})$ fatte rispetto alle componenti di \bar{F} . Quindi poichè si suppone $f(\bar{F}(t))$ lineare e $f(0) = 0$, la f deve risultare nulla. Si noti che l'ipotesi della linearità per $f(\bar{F}(t))$ è quella fatta di solito dagli studiosi dei fenomeni ereditari.

Queste considerazioni ci fanno anche vedere che per rappresentare la relazione fra \bar{u} e \bar{F} non sembra facile non ricorrere ai funzionali. Ciò del resto risulta necessario anche per tener conto dell'influenza della frequenza sull'effetto Lussemburgo.

⁽¹⁰⁾ *Sulle relazioni fra iperomografie e tensori isotropi o emisotropi e la loro relazione con alcuni funzionali.* Rendiconti Istituto Lombardo 1933.

Comunque o ammettendo l'isotropia o l'ipotesi ora citata, il primo termine in (1) non lineare diverso dallo zero è il termine in γ ; perciò trascurando i termini di ordine superiore si ha:

$$(2) \quad \bar{u}(t) = \int_0^t \alpha(t, r) \bar{F}(r) dr + \\ + \int_0^t \int_0^t \int_0^t \gamma(t, r_1, r_2, r_3) \bar{F}(r_1) \bar{F}(r_2) \bar{F}(r_3) dr_1 dr_2 dr_3.$$

Supponiamo poi l'ereditarietà invariabile, il che è lecito fino a che le proprietà del gas ionizzato non vengano a cambiare. Allora $\alpha(t, r)$ risulta funzione di $t-r$, e $\gamma(t, r_1, r_2, r_3)$ di $t-r_1, t-r_2, t-r_3$ e ciò per noti risultati del VOLTERRA.

Notiamo a questo punto che nè α , nè γ sono note e neppure ci sembra facile indicare un metodo sperimentale per conoscerle. Si potrebbe tutto al più ricavarle per via teorica in base alla teoria elettronica ed a considerazioni di meccanica statistica il che forse faremo in altro lavoro. Per lo scopo di questa nota potremo lasciare, salvo certe ipotesi qualitative, α e γ arbitrarie.

Introducendo le (2) nelle equazioni di MAXWELL esse assumono forma non lineare e perciò è sperabile che dalle equazioni così ottenute sorga una spiegazione del fenomeno di cui è oggetto la presente nota. Però dette equazioni sarebbero di difficile studio per cui sarà opportuno introdurre in esse alcune semplificazioni.

A questo scopo mettiamoci anzitutto in un caso concreto; cioè consideriamo il campo generato da due antenne radio. Potremo studiare l'influenza nel campo dovuto ad un'antenna su quello dovuto all'altra, influenza che dà luogo come vedremo all'effetto Lusseburgo.

Indichiamo con \bar{F}_1 e \bar{H}_1 il campo generato dalla prima antenna eccitata da sola supponendo $\gamma = 0$, con \bar{F}_2 e \bar{H}_2 il campo generato dall'altra nella stessa ipotesi. Ora se fosse $\gamma = 0$ le equazioni di MAXWELL sarebbero lineari e il campo totale dovuto alle due antenne avrebbe per valore $\bar{F}_1 + \bar{F}_2, \bar{H}_1 + \bar{H}_2$.

Ma per la presenza del termine in γ nella (2) il campo totale \bar{F} e \bar{H} generato dalle due antenne non coincide, in generale, con $\bar{F}_1 + \bar{F}_2, \bar{H}_1 + \bar{H}_2$. Però il termine in γ della (2) deve essere molto piccolo, altrimenti le equazioni di MAXWELL sarebbero molto diverse dalla forma lineare e l'esperimento avrebbe messo in evidenza gran numero di fenomeni di carattere non lineare. Allora siccome il campo totale generato dalle due antenne non vale $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$ e $\bar{H}_1 + \bar{H}_2$, solo per la presenza del piccolo termine in γ diventa plausibile l'ipotesi che questo campo differisca da $\bar{F}_1 + \bar{F}_2, \bar{H}_1 + \bar{H}_2$ di quantità molto piccole. Essendo poi come si è già detto, il termine in γ molto piccolo e piccola in modulo la differenza fra \bar{F} e $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$, l'errore che si commetterà mettendo in quest'ultimo termine in luogo di $\bar{F}, \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ si potrà supporre trascurabile⁽¹⁾; perciò faremo senz'altro questa sostituzione. Avanziamo ora un'altra ipotesi. Se identifichiamo la prima antenna con quella della stazione che nel nostro lavoro dell'Alta Frequenza abbiamo chiamato disturbatrice, la seconda con quella della stazione ricercata, possiamo ammettere, perchè così accade spesso in pratica, che sia \bar{F}_1 molto più grande di \bar{F}_2 in modo da poter trascurare i termini che contengono due o tre volte \bar{F}_2 . Allora indicato d'ora innanzi con \bar{v} quel termine in γ di cui finora si è parlato, esso avrà l'espressione:

$$(3) \quad \bar{v} = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \gamma(t, r_1, r_2, r_3) (\bar{F}_1(r_1) \bar{F}_1(r_2) \bar{F}_1(r_3) + \\ + \bar{F}_1(r_1) \bar{F}_1(r_2) \bar{F}_2(r_3)) dr_1 dr_2 dr_3 + \\ + \int_0^t \int_0^t \int_0^t \gamma(t, r_1, r_2, r_3) [\bar{F}_1(r_1) \bar{F}_2(r_2) \bar{F}_1(r_3) + \\ + \bar{F}_2(r_1) \bar{F}_1(r_2) \bar{F}_1(r_3)] dr_1 dr_2 dr_3.$$

(1) Si osservi che qui si applica il ben noto metodo delle approssimazioni successive.

Ora siccome la $\gamma(t, r_1, r_2, r_3)$ ⁽¹²⁾ si può sempre scegliere in modo che la (3) non vari scambiando fra loro le r_1, r_2, r_3 e l'ordine dei vettori a cui essa è applicata, con opportune permutazioni negli ultimi termini la \bar{v} si riduce alla seguente espressione:

$$(4) \quad \bar{v} = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \gamma(t, r_1, r_2, r_3) \bar{F}_1(r_1) \bar{F}_1(r_2) \bar{F}_1(r_3) dr_1 dr_2 dr_3 + \\ + 3 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \gamma(t, r_1, r_2, r_3) \bar{F}_1(r_1) \bar{F}_1(r_2) \bar{F}_2(r_3) dr_1 dr_2 dr_3;$$

sostituendo la (4) nelle equazioni di MAXWELL e supponendo note \bar{F}_1 e \bar{F}_2 non sarebbe difficile indicare un metodo di soluzione delle equazioni che così si otterrebbero. Non faremo però questa ricerca perchè non è necessaria per lo scopo del presente lavoro.

3. - INTERPRETAZIONE DEL FENOMENO LUSSEMBURGO. — Per interpretare il fenomeno Lussemburgo dobbiamo considerare più da vicino il campo generato dalle due antenne radio nell'ipotesi $\gamma = 0$. Supponiamo dunque che l'antenna disturbatrice sia percorsa da corrente di frequenza $\frac{\omega_1}{2\pi}$ modulata su frequenza $\frac{\omega_0}{2\pi}$, mentre la corrente nell'altra antenna sia di frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$ e non modulata ⁽¹³⁾.

Ammettiamo poi per semplificare i calcoli che \bar{F}_1 e \bar{F}_2 siano polarizzati linearmente; del resto il caso in cui questi vettori

⁽¹²⁾ Anche questo asserto è dimostrato nella nostra nota del 1933 all'Istituto Lombardo.

⁽¹³⁾ In pratica (escluso il caso di certe esperienze di VAN der POL e VAN der MARK) anche la corrente della seconda antenna è modulata. Per non complicare i calcoli e poichè non si devia dalle linee essenziali del fenomeno abbiamo supposto questa corrente non modulata.

fossero polarizzati in modo qualunque non offrirebbe, dal punto di vista concettuale, alcuna difficoltà.

In base alle ipotesi sopra esposte \bar{F}_1 sarà un vettore con direzione costante, individuata dal vettore unitario \bar{a} , con intensità rappresentata da una funzione sinusoidale di frequenza $\frac{\omega_1}{2\pi}$ modulata a frequenza $\frac{\omega_0}{2\pi}$. Cioè si avrà:

$$(5) \quad \bar{F}_1 = (H + K \cos(\omega_0 t + \varphi)) \cos(\omega_1 t + \psi_1) \bar{a}$$

dove H , K , φ , ψ , sono grandezze che possono variare da punto a punto ma non col tempo. Il vettore \bar{F}_2 , generato da una corrente non modulata, avrà la forma:

$$(6) \quad \bar{F}_2 = M \cos(\omega_2 t + \psi_2) \bar{b}$$

dove \bar{M} , ψ_2 , \bar{b} non dipendono dal tempo.

Prima di introdurre le (5) e (6) nella (4) osserviamo che per il postulato della dissipazione dell'azione ereditaria (che non vi è alcuna ragione per non ammettere valido in questo caso) possiamo ritenere che sul valore di \bar{u} all'istante t intervengano in modo sensibile solo i valori di $F(t)$ per t compreso fra t e $t-h$ per cui nei nostri funzionali potremo mettere come limite inferiore in luogo di zero $t-h$.

Allora facendo nella (4) la sostituzione $t-r_1=s_1$, $t-r_2=s_2$, $t-r_3=s_3$ si ha:

$$(7) \quad \int_0^h \int_0^h \int_0^h \gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{F}_1(t-s_1) \bar{F}_1(t-s_2) \bar{F}_1(t-s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \\ + 3 \int_0^h \int_0^h \int_0^h \gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{F}_1(t-s_1) \bar{F}_1(t-s_2) \bar{F}_2(t-s_3) ds_1 ds_2 ds_3$$

e supponendo la h abbastanza piccola in modo che per t non molto grande siano valide le (5) e (6) in tutto l'intervallo

$t, t - h$ (¹⁴):

$$(8) \quad \bar{v} = \int_0^h \int_0^h \int_0^h \gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{a} \bar{a} \bar{a} (H + K \cos[\omega_0(t - s_1) + \varphi_1]) (H + K \cos \omega_0(t - s_2) + \varphi_1) (H + K \cos[\omega_0(t - s_3) + \varphi_1] \cos(\omega_1(t - s_1) + \psi_1) \cos(\omega_1(t - s_2) + \psi_1) \cos(\omega_1(t - s_3) + \psi_1) ds_1 ds_2 ds_3 + 3 \int_0^h \int_0^h \int_0^h \gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{a} \bar{a} \bar{b} (H + K \cos[\omega_0(t - s_1) + \varphi_1]) (H + K \cos(\omega_0(t - s_2) + \varphi_1) \cos[\omega_1(t - s_1) + \psi_1] \cos[\omega_1(t - s_2) + \psi_1] \cos[\omega_2(t - s_3) + \psi_2] ds_1 ds_2 ds_3 .$$

Ora si ha:

$$(9) \quad (H + K \cos(\omega_0(t - s_1) + \varphi_1)) (H + K \cos[\omega_0(t - s_2) + \varphi_1]) = H^2 + HK \cos(\omega_0 t + \varphi_1 - \omega_0 s_1) + HK \cos(\omega_0 t + \varphi_1 - \omega_0 s_2) + K^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_1 - \omega_0 s_1) \cos(\omega_0 t + \varphi_1 - \omega_0 s_2) = H^2 + HK[(\cos \omega_0 s_1 + \cos \omega_0 s_2) \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + (\sin \omega_0 s_1 + \sin \omega_0 s_2) \sin(\omega_0 t + \varphi_1)] + \frac{K_1^2}{2} [\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_1 - \omega_0(s_1 + s_2))] + \frac{K_1^2}{2} \cos \omega_0(s_1 - s_2) = H^2 + \frac{K_1^2}{2} \cos \omega_0(s_1 - s_2) + HK(\cos \omega_0 s_1 + \cos \omega_0 s_2) \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + HK(\sin \omega_0 s_1 + \sin \omega_0 s_2) \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \frac{K_1^2}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_1) \cos \omega_0(s_1 + s_2) + \frac{K_1^2}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\varphi_1) \sin \omega_0(s_1 + s_2) \cos(\omega_1(t - s_1) + \psi_1) \cos(\omega_1(t - s_2) + \psi_1) = \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1 - \omega_1(s_1 + s_2)) + \frac{1}{2} \cos \omega_1(s_1 - s_2) \cos(\omega_2(t - s_3) + \psi_2) = \cos(\omega_2 t + \psi_2) \cos \omega_2 s_3 + \sin(\omega_2 t + \psi_2) \sin \omega_2 s_3$$

(¹⁴) Evidentemente le (5) e (6) valgono dopo un certo periodo transitorio. Se indichiamo con $(0, t_1)$ questo periodo, intendiamo h abbastanza piccolo in modo che $t_1 + h$ non sia troppo grande.

Sostituendo queste espressioni nell'ultimo integrale di (8) si ottengono termini sinusoidali di frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$ puri o modulati (15) su frequenze $\frac{\omega_0}{2\pi}$, $\frac{\omega_0}{\pi}$ e termini di frequenza $\frac{2\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$, $\frac{2\omega_1 + \omega_2}{2\pi}$ anch'essi (16) puri o modulati con la frequenza $\frac{\omega_0}{2\pi}$ e $\frac{\omega_0}{\pi}$. Invece facendo sviluppi analoghi sui termini che compaiono nel primo integrale a secondo membro di (8) si ottengono termini puri di frequenza $\frac{\omega_1}{2\pi}$, $\frac{3\omega_1}{2\pi}$ e termini della stessa frequenza modulati su $\frac{\omega_0}{2\pi}$, $\frac{\omega_0}{\pi}$, $\frac{3\omega_0}{2\pi}$.

Crediamo opportuno non svolgere per disteso questi calcoli che non sono difficili ma assai lunghi e inutili per il nostro scopo.

Posto ciò riprendiamo le equazioni di MAXWELL nella forma che avevamo dato loro in F. E. tenendo però conto che l'ereditarietà non è lineare, e il termine non lineare è approssimativamente uguale a \bar{v} .

Si ha così:

$$(10) \quad \text{rot } \bar{H} = \varepsilon \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \lambda \bar{F} + \int_{t-h}^t \alpha(t, r) \bar{F}(r) dr + \bar{v} + \bar{u}_0,$$

(15) Con *termine* di frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$ modulato su frequenza $\frac{\omega''}{2\pi}$ intenderemo un termine della forma $A \cos(\omega'' t + \varphi'') \cos(\omega' t + \varphi')$ con A , φ' , φ'' , ω' , ω'' costanti. Usiamo questa locuzione un po' diversa dalla solita per brevità di linguaggio. Quando però parleremo di campo o di corrente modulata ci riferiremo al significato ordinario di queste parole.

(16) I termini di frequenza $\frac{2\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$, $\frac{2\omega_1 + \omega_2}{2\pi}$ si ottengono applicando note formole di trigonometria ai prodotti

$$\cos(2\omega_1 t + 2\phi_1 - \omega_2(s_1 + s_2)) \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

e ai prodotti analoghi.

$$(11) \quad \operatorname{rot} F = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

dove \bar{F} e \bar{H} sono al solito il campo elettrico e magnetico, \bar{u}_0 la corrente nelle antenne, ϵ la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica, $\alpha(b, r)$ e L due coefficienti il cui significato è stabilito nella nota citata. Noi supporremo poi, come è lecito almeno in prima approssimazione, α funzione di $t - r$ e L indipendente dal tempo.

Ora per procedere in modo perfettamente rigoroso bisognerebbe costruire alcuni integrali delle (10) e (11). La cosa non sarebbe difficile ma anch'essa assai lunga. Perciò preferiremo il presente ragionamento di carattere intuitivo. Si osservi infatti che le relazioni (10) e (11) si possono interpretare come le equazioni ordinarie di un campo elettromagnetico generato non solo dalla corrente \bar{u}_0 ma anche da un'altra corrente di densità \bar{v} . O, in parole meno precise, come le equazioni del campo generato oltre che dalle antenne realmente esistenti anche da antenne fittizie percorse da corrente di densità \bar{v} .

Allora i vettori \bar{F} , \bar{H} valgono $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$, $\bar{H}_1 + \bar{H}_2$, sommati coi campi dovuti alle correnti di densità \bar{v} . Queste ultime correnti possono dare origini a campi di varia frequenza e modulazione come accade dei termini che costituiscono \bar{v} ⁽¹⁷⁾. In particolare per quanto si è detto vi potrà essere anche un campo di frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$ modulato sulla frequenza $\frac{\omega_0}{2\pi}$; cioè un ricevitore accordato sulla frequenza dell'antenna ricercata può sentire la modulazione della disturbatrice. Questo risultato teorico è perfettamente conforme a quella constatazione sperimentale chiamata effetto Lussemburgo e di cui si è detto nell'introduzione. L'esistenza dell'effetto in discorso resta così giustificata per via teorica. Naturalmente la presenza degli altri termini che costituiscono \bar{v} dà luogo a una distorsione del fenomeno su cui diremo qualche cosa in seguito.

⁽¹⁷⁾ S' intende dopo un periodo transitorio che l'esperienza ci fa vedere molto breve.

4. - LEGGI DEL FENOMENO LUSSEMBURGO. — l'esperienza ha già fatto conoscere alcune leggi (la maggior parte qualitative) del fenomeno Lussemburgo, leggi che cercheremo di giustificare per via teorica. Perciò prendiamo anzitutto in esame quel termine di \bar{v} a frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$ modulato a frequenza $\frac{\omega_0}{2\pi}$. Esso avrà l'espressione seguente :

$$(12) \quad \frac{3}{2} H K M \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_2 t + \psi_2) \int_0^h \int_0^h \int_0^h (\cos \omega_0 s_1 + \\ + \cos \omega_0 s_2) \cos \omega_1 (s_1 - s_2) \cos \omega_2 s_3 \gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{a} \bar{a} \bar{b} ds_1 ds_2 ds_3$$

sommata con altri termini che si ottengono scambiando opportunamente nella (12) alcune funzioni coseno colle funzioni seno. Noi omettiamo questi termini per evitare di scrivere lunghe pagine di formule tanto più che essi godono le stesse proprietà del termine (12).

Dalla (12) segue subito che \bar{v} a parità di $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ è proporzionale a $H K M$ ossia a $H^2 \frac{K M}{H}$ e lo stesso accade del campo \bar{F}' dovuto a \bar{v} . Ora come è facile convincersi, e del resto è cosa ben nota, $\frac{K}{H}$ è proporzionale alla profondità di modulazione η dell'antenna disturbatrice, H^2 (a parità di η) alla potenza P di tale antenna.

Se però si vuole fare un raffronto fra teoria ed esperienza è bene prendere in esame la profondità di modulazione m della corrente di frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$ modulata a frequenza $\frac{\omega_0}{2\pi}$ che appare nel ricevitore. Per far ciò occorre calcolare il termine di frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$ che compare in \bar{F} . Esso si riduce a

$$\bar{F}_2 = M \cos(\omega_2 t + \psi_2) \bar{b},$$

perchè i termini analoghi dovuti a \bar{v} li possiamo ammettere in prima approssimazione, per la piccolezza di questo vettore, tra-

scurabili rispetto a \bar{F}_2 . Ora la m sarà proporzionale al rapporto fra l'ampiezza della componente di \bar{F}' lungo la direzione dell'antenna ricevente divisa per l'ampiezza dell'analogo componente di \bar{F}_2 , cioè a $H^2 \frac{K}{H}$ ossia a $P\eta$. Arriviamo così alla formula (indicando con ε un coefficiente dipendente dal luogo, dalla posizione dell'antenna ricevente, da ω_0 , ω_1 , ω_2 ma non da \bar{P} , da η , nè dalla potenza dell'antenna ricercata):

$$(12) \quad m = \varepsilon P\eta.$$

Questa formula ci permette di affermare, che la profondità di modulazione della corrente nel ricevitore di frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$ modulata a $\frac{\omega_0}{2\pi}$, è nello stesso luogo e a parità di frequenza di emissione e di modulazione dell'antenna ricercata e disturbatrice, indipendente dalla potenza della ricercata e proporzionale alla potenza e alla profondità di modulazione della disturbatrice.

La proporzionalità alla η è stata verificata da VAN DER POL e VAN DER MARK. Per gli altri risultati mancano ricerche in proposito, sebbene qualitativamente si possano ritenere confermati. Essi sono del resto in accordo con la teoria di BAYLEY e MARTIN.

Per verificare altre leggi del fenomeno in discorso riprendiamo l'espressione (12) e consideriamo la sua componente lungo gli assi, per fissare le idee lungo l'asse x . Essa ha la forma

$$(13) \quad 3 \frac{H K M}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_2 t + \psi_2) \int_0^h \int_0^h \int_0^h (\cos \omega_0 s_1 + \\ + \cos \omega_0 s_2) \cos \omega_1 (s_1 - s_2) \cos \omega_2 s_3 \gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{a} \bar{a} \bar{b} \times \bar{i} ds_1 ds_2 ds_3.$$

Ora sotto ipotesi qualitative molto larghe su $\gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{a} \bar{a} \bar{b}$ la (13) tende allo zero per $\omega_1 \rightarrow \infty$. Perciò esisterà un valore della frequenza nella corrente della disturbatrice tale che al di sopra di essa l'ampiezza delle componenti di \bar{v} sia così piccola che non si manifesti alcun sensibile effetto Lussemburgo.

Questa deduzione è in accordo con l'esperienza, perchè si è osservato il fenomeno in discorso solo con stazioni disturbatrici la cui lunghezza d'onda è maggiore di m. 470.

Osserviamo poi che \bar{v} è diverso dallo zero se H e M sono diverse dallo zero in una stessa regione della ionosfera in cui anche γ non è nulla. In altre parole occorre che in quella regione della ionosfera vi sia contemporaneamente il campo emesso dalle due antenne. In particolare se il campo generato da un'antenna non penetra, o penetra in proporzioni molto ridotte nella ionosfera, non si avrà effetto Lussemburgo. Con ciò si spiega il fatto che esiste oltre a un limite superiore, anche un limite inferiore per la frequenza dell'antenna disturbatrice che può manifestare l'effetto Lussemburgo. Infatti per basse frequenze un'onda radio penetra molto debolmente nella ionosfera e \bar{v} deve essere perciò molto piccolo.

Dalle nostre formule si potrebbe arguire che l'effetto Lussemburgo si manifesti su ogni ricevitore posto in vicinanza alla regione in cui v è diverso dallo zero, cioè anche lontano dalla congiungente la ricercata con la disturbatrice, contrariamente a quanto asseriscono VAN DER POL e VAN DER MARK. Recenti ricerche fatte a Livorno presso il R. I. E. C. confermano la nostra deduzione.

Quanto ai termini di distorsione non vi sono ricerche in proposito se si esclude alcune esperienze con esito negativo di VAN DER POL e VAN DER MARK fatte, per mettere in evidenza le onde di frequenza $\frac{2\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$, onde che verrebbero previste dalle nostre formule perchè appaiono termini di questa frequenza puri o modulati nella espressione di \bar{v} . Ci sembra che questo risultato negativo si possa interpretare nel seguente modo. Siccome non solo i termini modulati delle frequenze ora scritte ma anche i termini puri dipendono da \bar{v} (al contrario dei termini puri di frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$) e la recezione dipende dal prodotto dell'ampiezza dei termini puri e modulati, questo prodotto può risultare così piccolo da non poter essere messo in evidenza dai ricevitori. Però se questa interpretazione fosse vera si potrebbe sentire p. e.

un suono di frequenza $\frac{\omega_0}{2\pi}$ con ricevitore accordato su frequenza $\frac{2\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$ producendo localmente un'onda pura di quest'ultima frequenza. VAN DER POL e VAN DER MARK non specificano se abbiano fatto questa ricerca che perciò potrebbe avere qualche interesse.

A conclusione di questo paragrafo possiamo dire che quasi tutti i risultati finora raggiunti con l'esperienza si possono spiegare con la teoria ereditaria. Non siamo riusciti a interpretare la dipendenza constatata da VAN DER POL e VAN DER MARK del fenomeno Lussemburgo dalla frequenza di modulazione. Per far ciò bisognerebbe conoscere la funzione $\gamma(s_1, s_2, s_3)$ il che, almeno per ora, è molto difficile. Comunque ci sembra che quanto si è detto possa avvalorare la spiegazione ereditaria proposta per il fenomeno Lussemburgo.

5. - DIPENDENZA DEL FENOMENO LUSSEMBURGO DALLA POLARIZZAZIONE. — Nelle nostre formule per \bar{v} interviene il vettore $\gamma \bar{a} \bar{a} \bar{b}$ che varia in generale al cambiare di \bar{a} e \bar{b} . Quindi è logico attendersi una dipendenza dell'effetto Lussemburgo dalla polarizzazione dei campi \bar{F}_1 e \bar{F}_2 . Ora però nelle trasmissioni ordinarie la polarizzazione delle onde radio nella ionosfera assume forma e orientamento così diverso punto per punto che ci sembra difficile, per un effetto di compensazione, poter constatare mediante esperienze di radio trasmissioni qualche influenza della polarizzazione sul fenomeno di cui è oggetto la presente nota.

Se però sarà in seguito possibile constatare in laboratorio tale fenomeno, mandando in un gas jonizzato non soggetto ad un campo magnetico due onde elettro-magnetiche piane, parallele, polarizzate linearmente la prima nella direzione \bar{a} , l'altra nella direzione \bar{b} , è molto probabile si possa trovare la dipendenza della polarizzazione del fenomeno in discorso per le seguenti ragioni.

Siccome il gas jonizzato non è soggetto ad un campo magnetico lo si potrà considerare come un mezzo isotropo, e perciò

per i risultati che abbiamo conseguito in allri lavori ⁽¹⁸⁾ potremo scrivere :

$$(14) \quad \gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{a} \bar{a} \bar{b} = A (\bar{a} \times \bar{a}) \bar{b} + B (\bar{a} \times \bar{b}) \bar{b} + C (\bar{a} \times \bar{b}) \bar{c}$$

dove A, B, C sono numeri dipendenti da $s_1 s_2 s_3$.

Ora è facile vedere che, se le due onde sono polarizzate parallelamente, $\gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{a} \bar{a} \bar{b}$ diventa $(A + B + C) \bar{b}$, mentre se sono polarizzate normalmente l'una rispetto all'altra, $\gamma(s_1, s_2, s_3) \bar{a} \bar{a} \bar{b}$ si riduce a $A \bar{b}$. Perciò è molto probabile che il valore di \bar{v} e quindi del campo di frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$ modulato a frequenza $\frac{\omega_0}{2\pi}$, che dà luogo al fenomeno Lussemburgo, sia diverso nei due casi ora considerati.

Altre deduzioni si potrebbero trarre dalle nostre formule a proposito della dipendenza del fenomeno Lussemburgo dalla polarizzazione. Ci sembra però tale ricerca non opportuna, fino a che la esperienza non avrà fornito qualche prova, per quanto si è detto in questo paragrafo.

6. - ESTENSIONE DI RISULTATI CONSEGUITI IN F. E. — Vogliamo mostrare in questo paragrafo come alcuni risultati, da noi ottenuti in F. E. supponendo l'ereditarietà lineare, restano validi anche nella ipotesi più generale fatta nel presente lavoro.

Noi abbiamo dimostrato nella ipotesi dell'ereditarietà lineare un teorema di univocità e cioè che il campo elettro magnetico generato da un'antenna radio è determinato dalla conoscenza della corrente in antenna, dalla supposizione che tale campo sia nullo per $t \leq 0$ e da condizioni di continuità e di convergenza all'infinito specificate in F. E.

Per estendere questo risultato basta riferirsi alla dimostrazione valida per il caso dell'ereditarietà lineare (esposta nel paragrafo 3 della parte seconda in F. E.) introducendovi le seguenti modificazioni.

(18) Lavoro citato a pag. 40, (40).

Se supponiamo l'ereditarietà non lineare ossia

$$\bar{u} = \sigma \bar{F}(t) + \theta(\bar{F}(r))$$

con θ simbolo di funzionale nella (26) di F. E. in luogo di

$$\int_0^t \alpha(t, r) \bar{F}_1(r) dr$$

compare

$$\theta(\bar{F}(r) \overset{t}{\underset{0}{+}} \bar{F}_1(r)) - \theta(\bar{F}(r));$$

perciò nella (31) in luogo di

$$\int_0^t dr \int_0^r d\xi \int_{S_\infty} \alpha(r, \xi) \bar{F}_1(r) \times \bar{F}_1(\xi) dS_\infty$$

comparirà

$$\int_0^t dr \int_{S_\infty} \theta(\bar{F}(\xi) \overset{r}{\underset{0}{+}} \bar{F}_1(\xi)) - \theta(F(\xi)) \times \bar{F}_1(r) dS_\infty$$

ora in base a deduzioni di altre nostre note la $\theta(F(\xi))$ soddisfa la formula ⁽¹⁹⁾

(19) Difatti siccome le componenti di $\theta(F(\xi))$ sono polinomi nel senso delle funzioni di linea, delle componenti di $F(t)$, dalla formula (8) della nostra nota *Sulle funzioni di varietà vettoriale*. (Rendiconti Accademia dei Lincei, II° semestre 1927) si ha :

$$(a) \quad \theta(\bar{F}(\xi) \overset{r}{\underset{0}{+}} \bar{F}_1(\xi)) - \theta(F(\xi)) \times F(r) = \int_0^r \frac{d\theta(\bar{F}(\xi) + \lambda \bar{F}_1(\xi))}{d(\bar{F}(\xi) + \lambda \bar{F}_1(\xi))} \bar{F}_1(\xi) \times \bar{F}_1(r),$$

dove λ è un numero compreso fra 0 e 1 e $\frac{d\theta(\bar{F}(\xi) \overset{r}{\underset{0}{+}} \lambda \bar{F}_1(\xi))}{d(\bar{F}(\xi) + \lambda \bar{F}_1(\xi))}$ è un'omo-

$$(15) \quad \theta(\bar{F}(\xi_0) + \bar{F}_1(\xi)) - \theta(\bar{F}(\xi_0)) \times \bar{F}_1(r) \leq M \int_0^r F_1(r) F_1(\xi) d\xi$$

e da essa si deduce che anche nel caso non lineare vale la (33) di F. E.; dopo ciò è ovvio che non sono più necessarie altre modificazioni per riportare la dimostrazione del teorema di univocità relativo alla ipotesi lineare al caso più generale considerato in questa nota.

Nella ipotesi di una relazione di ereditarietà lineare fra \bar{u} e \bar{F} abbiamo conseguito alcuni risultati sulla propagazione di superfici di discontinuità in un gas jonizzato. L'estensione della loro validità anche nelle ipotesi più generali in cui ci siamo posti nel presente lavoro è immediata, per cui riteniamo inutile dilungarci ancora sulla questione.

Abbiamo dunque in queste righe abbozzata una teoria matematica del fenomeno Lussemburgo. Ci auguriamo che nuove ricerche sperimentali permettano di saggiarne meglio la sua validità.

grafia dipendente da $\bar{F}(\xi) + \lambda \bar{F}_1(\xi)$ e da ξ ; poichè questa omografia, che indicheremo provvisoriamente con α , si suppone limitata esisterà un numero M tale che per ogni α sia $\alpha F_1(\xi) \times \bar{F}_1(r) \leq M F(\xi) F(r)$; sostituendo questo risultato in (a), si deduce subito la formula (15) del testo.
