

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

SALVATORE CHERUBINO

Sulle matrici permutabili con una data

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 7 (1936), p. 128-156

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1936__7__128_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE MATRICI PERMUTABILI CON UNA DATA

di SALVATORE CHERUBINO a Pisa

Sunto: Si costruisce la più generale matrice permutabile con una assegnata, basandosi sulla riduzione a forma canonica, come ottenuta in un precedente lavoro dell' A., senza far uso dei divisori elementari. Si aggiungono osservazioni relative a matrici particolari (simmetriche, emi-simmetriche, etc.) alle funzioni razionali intere ed alle serie scalari di potenze, ridimostrando un importante teorema del FROBENIUS.

Il problema di cui al titolo non è nuovo ⁽¹⁾, ma qui mi propongo di risolverlo in modo affatto indipendente dalla teoria dei divisori elementari, che nella ordinaria trattazione giuoca un ruolo importante. Mi servirò invece della riduzione a forma canonica come ottenuta in un mio recente lavoro ⁽²⁾ e della conseguente nozione di *segnatura complessiva* di una matrice ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Il primo a trattarlo credo sia stato il VOSS: *Ueber die mit einer bilinearen Form vertauschbaren bilinearen Formen* [Sitz. der math. - phys. Classe der K. bayer. Ak., Bd. XIX (1889)]. È notevole, per la diversa impostazione, la soluzione del CECIONI F.: *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici* [Annali Sc. Norm. di Pisa, vol. XI (1909)], cap. II, pag. 46-48. Per la bibliografia v. C. C. MAC DUFFEE: *The theory of Matrices* [Berlin, Springer, 1933], p. 93. Fra i lavori italiani più recenti vedi TURRI T., *L'ordine massimo dei gruppi abeliani di omografie...* [Rend. Ist. Lomb., vol. 67 (1930)].

⁽²⁾ *Sulla forma canonica di una matrice* [Rend. Lincei, vol. XXIII (1936-XIV)] Note I e II.

⁽³⁾ La nozione di segnatura (che coincide *a posteriori*, con la *caratteristica* del FREDELLA) è stata introdotta dallo SCORZA nell' Appendice al suo libro: *Corpi numerici ed algebre* [Messina, Principato, 1921]. Nel mio lavoro sopra citato tal nozione viene stabilita, in modo elementare e diretto, con la riduzione a forma canonica.

La riduzione a forma canonica cui alludo si consegue con considerazioni di natura del tutto elementari, e cioè mercè le più immediate proprietà delle matrici e con uso discreto del simbolismo di queste. Essa associa esplicitamente ad ogni radice caratteristica α di una matrice A , di ordine n , un certo gruppo di interi positivi non decrescenti, detto *segnatura* relativa a quella radice :

$$(h_0, h_1, \dots, h_i)$$

(eventualmente costituito da un sol numero) la cui somma è la molteplicità della radice stessa (*). Se A possiede m radici caratteristiche distinte, siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, si hanno m gruppi di tali interi; riunendoli in una sola parentesi quadra

$$[(h_0^{(1)}, h_1^{(1)}, \dots, h_{i_1}^{(1)}), \dots, (h_0^{(m)}, h_1^{(m)}, \dots, h_{i_m}^{(m)})]$$

ove la s^{ma} parentesi semplice dà la segnatura relativa alla radice α_s , si ha quella che chiamerò *segnatura complessiva* di A .

Diro subito che gl'interi costituenti questa segnatura, diminuiti ciascuno di un'unità, non sono altro (salvo l'inversione dell'ordine in ciascuna parentesi tonda), che gl'interi caratteristici introdotti dal PEDRELLA nella teoria delle omografie di un iperspazio in sè. Però, nel mio lavoro sopra richiamato, questi interi si presentano in modo del tutto naturale e senza alcun ricorso alle considerazioni iperspaziali del PEDRELLA (*). Le loro proprietà possono tutte dedursi, *a posteriori*, dalla forma canonica di A , che vien costruita contemporaneamente alla loro formazione.

Alla determinazione, *in forma esplicita*, della più generale matrice permutabile con una di forma canonica assegnata, aggiungo (oltre agli esempi di $n=2, 3, 4$) alcune osservazioni sulle matrici simmetriche od emisimmetriche, antisimmetriche od

(*) Il numero $i+1$ di questi interi si dice *indice* di A relativo ad α , ovvero indice di $A - \alpha I$, ove I è la matrice identica di ordine n .

(*) Essi riescono anche indipendenti dalla teoria delle algebre che interviene in modo essenziale nella trattazione dello SCORZA (loco cit.).

antiemisimmetriche (e, più in generale, su quelle *diagonalizzabili*), ed un cenno alle funzioni razionali intere ed alle serie di potenze (a coefficienti scalari) di una matrice, riottenendo così due interessanti risultati uno del CECIONI, l'altro del VOLTERRA.

Chiudo con una semplice dimostrazione del celebre teorema del FROBENIUS che esprime le radici caratteristiche di una matrice funzione razionale intera di più altre a due a due permutabili mediante quelle di queste matrici ⁽⁶⁾. Tale dimostrazione, che dà anche ragione, in modo assai espressivo, della indipendenza dalla funzione che si considera dell'ordinamento delle radici caratteristiche delle matrici date, si presenta come immediata applicazione del risultato fondamentale ⁽⁷⁾ raggiunto nel § 1.

§ 1. - La più generale matrice permutabile con una data.

1. Sia A una matrice assegnata, di ordine n , C la sua forma canonica, P ed X due altre matrici, la prima fissa e non degenera, la seconda variabile, per le quali si ha

$$(1) \quad P^{-1}AP = C; \quad XA = CX.$$

Da queste relazioni segue che

$$XA = P^{-1}APX, \quad PX \cdot A = A \cdot PX$$

ossia che PX è una matrice permutabile con A .

Viceversa, se B è una matrice permutabile con A , cioè se si ha

$$B \cdot A = A \cdot B,$$

⁽⁶⁾ Questo importante teorema è stato da me recentemente esteso al caso di una matrice *funzione olomorfa* di un'altra in un'algebra commutativa. Vedi la Nota dal titolo: *Sulle radici caratteristiche delle funzioni olomorfe di matrici* [Rend. Lincei vol. XXIII (1936-VIV)].

⁽⁷⁾ Il VOSS, nell'ultimo paragrafo del lavoro citato, dimostra il teorema del FROBENIUS, pel caso del prodotto $AB = BA$.

moltiplicando a sinistra per P^{-1} , si ottiene

$$P^{-1} B \cdot A = P^{-1} A P \cdot P^{-1} B = C \cdot P^{-1} B$$

onde, paragonando con la seconda delle (1), risulta

$$B = P X .$$

Dunque :

le matrici permutabili con A son tutte e sole i prodotti PX, ove P è una matrice fissa soddisfacente alla prima delle (1) ed X è una qualunque matrice soluzione della seconda delle (1)

2. Per fissare le idee, supponiamo che A possenga due sole radici caratteristiche distinte, siano α e β , con le segnature

$$(h_0, h_1, h_2), (k_0, k_1) .$$

Posto allora

$$X = \begin{vmatrix} \frac{x^{(h_0)}}{x^{(h_1)}} \\ \frac{x^{(h_2)}}{y^{(k_0)}} \\ \frac{y^{(k_1)}}{y^{(k_1)}} \end{vmatrix}$$

ove $x^{(h_i)}$, $y^{(k_j)}$ indicano matrici ad n colonne e, rispettivamente, h_i e k_j righe ($i = 0, 1, 2$), ($j = 0, 1$), si ha ⁽⁸⁾ che queste matrici sono soggette alle condizioni ⁽⁹⁾

$$(2) \quad \begin{cases} x^{(h_0)}(A - \alpha I)^3 = 0, & x^{(h_1)}(A - \alpha I)^2 = 0, & x^{(h_2)}(A - \alpha I) = 0, \\ y^{(k_0)}(A - \beta I)^2 = 0, & y^{(k_1)}(A - \beta I) = 0. \end{cases}$$

⁽⁸⁾ CHERUBINO S., *Le matrici canonizzanti* [Boll. U. M. I. (1936)].

⁽⁹⁾ Ma non queste soltanto. Vedi la nota or citata.

Analogamente, posto

$$P = (x^{(h_0)} \mid x^{(h_1)} \mid x^{(h_2)} \parallel u^{(k_0)} \mid u^{(k_1)})$$

ove $x^{(h_i)}$, $u^{(k_j)}$ indicano matrici ad n righe, e rispettivamente, ad h_i e k_j colonne ($i = 0, 1, 2$), ($j = 0, 1$) si trova che queste sono soggette alle condizioni

$$(3) \quad \begin{cases} (A - \alpha I)x^{(h_0)} = 0, & (A - \alpha I)^2 x^{(h_1)} = 0, & (A - \alpha I)^3 x^{(h_2)} = 0 \\ (A - \beta I)u^{(k_0)} = 0, & (A - \beta I)^2 u^{(k_1)} = 0 \end{cases}$$

alle quali vanno aggiunte quelle esprimenti che P è non degenera ⁽¹⁰⁾.

Abbiamo quindi che le matrici B permutabili con A sono necessariamente del tipo

$$(4) \quad \begin{aligned} PX = & x^{(h_0)} x^{(h_0)} + x^{(h_1)} x^{(h_1)} + x^{(h_2)} x^{(h_2)} + \\ & + u^{(k_0)} y^{(h_0)} + u^{(k_1)} y^{(k_1)} \end{aligned}$$

i cui primi fattori dei singoli termini del secondo membro son matrici fisse, soddisfacenti alle (3) ed alle condizioni supplementari occorrenti perchè P sia non degenera, mentre i secondi fattori costituiscono una qualunque soluzione del sistema (1), ossia delle (2). Salvo le ulteriori condizioni di cui alla nota ⁽¹⁰⁾.

3. In generale, supponendo che A possenga m radici caratteristiche distinte, siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, diciamo

$$(h_0^{(s)}, h_1^{(s)}, \dots, h_{i_s}^{(s)})$$

⁽¹⁰⁾ Che possono sempre soddisfarsi: Vedi la Nota ora citata. Alle (2)-(3) vanno aggiunte alcune condizioni supplementari, di cui qui non facciamo uso.

la segnatura di A relativa alla radice α_s . Indicando con $x^{(h_r^{(s)})}$, ($r = 1, 2, \dots, i_s$) ($s = 1, 2, \dots, m$) matrici variabili, ad $h_r^{(s)}$ righe ed n colonne, soddisfacenti alle relazioni

$$(I) \quad x^{(h_r^{(s)})} \cdot (A - \alpha_s I)^{i_s + 1 - r} = 0$$

ed alle altre supplementari che qui non occorre specificare, la matrice X ha per righe quelle di queste $x^{(h_r^{(s)})}$.

Indicando poi con

$$y^{(h_r^{(s)})} \quad (r = 1, 2, \dots, i_s) \quad (s = 1, 2, \dots, m)$$

matrici fisse ad n righe ed $h_r^{(s)}$ colonne soddisfacenti alle relazioni

$$(I)^* \quad (A - \alpha_s I)^{r+1} y^{(h_r^{(s)})} = 0,$$

nonchè alle solite, non specificate, ed aggiungendo le condizioni esprimenti che queste m matrici ne costituiscono, con le loro colonne, una non degenera di ordine n , si può assumere questa per matrice P .

Quelle permutabili con A sono allora tutte e sole le matrici comprese nell'espressione

$$(II) \quad \sum_{s=1}^m \left[y^{(h_0^{(s)})} \cdot x^{(h_0^{(s)})} + y^{(h_1^{(s)})} \cdot x^{(h_1^{(s)})} + \dots + y^{(h_{i_s}^{(s)})} \cdot x^{(h_{i_s}^{(s)})} \right].$$

4. Le matrici PX son tutte simili alle corrispondenti matrici XP , e queste son permutabili con C , anzichè con A . Orbene, un teorema altrove dimostrato ⁽¹⁾, ci assicura che se x , y son due matrici qualsiasi, la prima ad n colonne, la seconda ad n

⁽¹⁾ CHERUBINO S., *Estensione, mediante il calcolo di matrici,...* [Scritti matematici in onore di L. Berzolari, Pavia (1936-XIV)].

righe, soddisfacenti alle relazioni

$$(5) \quad x(A - \alpha_s I)^r = 0, \quad (A - \alpha_t I)^q y = 0$$

con r e q due interi positivi fissati a piacere, ma con $\alpha_s \neq \alpha_t$, ossia $s \neq t$, si ha sempre

$$(6) \quad xy = 0;$$

perciò, il prodotto XP riesce del tipo ⁽¹²⁾

$$P^{-1}BP = XP = \left| \begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & \dots & B_m \end{array} \right| = B^*.$$

Ciò esprimeremo dicendo che $B^* = XP$ è *composta* mediante le matrici ⁽¹³⁾

$$(III) \quad B_s = \left| \begin{array}{c} \frac{x^{(h_0^{(s)})}}{x^{(h_1^{(s)})}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{x^{(h_s^{(s)})}}{x^{(h_s^{(s)})}} \end{array} \right| \cdot \left(y^{(h_0^{(s)})} \mid y^{(h_1^{(s)})} \mid \dots \mid y^{(h_s^{(s)})} \right).$$

5. Determinate le matrici B^* permutabili con C , forma canonica di A , cioè trovate tutte le B^* per le quali è

⁽¹²⁾ Lo stesso risultato può conseguirsi anche, ma più laboriosamente, a mezzo della relazione (7) di cui appresso.

⁽¹³⁾ Qualche Autore americano (ad es. il MAC DUFFEK, op. cit.) usa, in questo caso, dire che B^* è *somma diretta* delle matrici B_s . La notazione mi sembra impropria, onde ho creduto opportuno sostituirla con quella del testo.

$$(7) \quad C B^* = B^* C,$$

per avere tutte quelle permutabili con A basta trasformare le B^* con una stessa matrice P la cui inversa porti A nella forma canonica C . Perchè invero dalle (7) si ha

$$P C P^{-1} \cdot P B^* P^{-1} = P B^* P^{-1} \cdot P C P^{-1},$$

ossia

$$(8) \quad A \cdot P B^* P^{-1} = P B^* P^{-1} \cdot A$$

e viceversa da questa si torna alla (7).

Orbene, la forma canonica C di A , può scriversi ⁽¹⁴⁾

$$C = \left| \begin{array}{c|c|c|c} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & \dots & C_m \end{array} \right|$$

ove C_s indica la matrice

$$C_s = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \alpha_s I_0^{(s)} & I_0^{(s)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \alpha_s I_1^{(s)} & I_1^{(s)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_s I_2^{(s)} & I_2^{(s)} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & & \dots & & \alpha_s I_{i_s}^{(s)} \end{array} \right|$$

⁽¹⁴⁾ CHERUBINO S., Nota cit. (2).

il cui ordine, eguale a quello di B_s , è la molteplicità μ_s di α_s , cioè,

$$h_0^{(s)} + h_1^{(s)} + \dots + h_{i_s}^{(s)} = \mu_s$$

ed ove $I_r^{(s)}$ indica la matrice identica di ordine $h_r^{(s)}$.

Segue che la relazione (7) si traduce nelle m condizioni

$$(7)^* \quad C_s B_s = B_s C_s, \quad (s = 1, 2, \dots, m),$$

e che:

se C_s si riduce ad $\alpha_s I_0^{(s)}$, cioè se l'indice di A rispetto ad α_s è uno, la matrice B_s è arbitraria.

Quindi :

se la forma canonica di A è diagonale tutte le matrici B_s , (che risultano di ordine $\mu_s = h_0^{(s)}$) possono scegliersi ad arbitrio.

6. Se l'indice $i_s + 1$ di $A - \alpha_s I$ non è uno, cioè se la segnatura di A rispetto ad α_s non consta di un sol intero, C_s non coincide con $\alpha_s I_0^{(s)}$ e una relazione come (7)* non può verificarsi con una B_s arbitraria.

È però facile, anche in tal caso, trovare l'espressione generale di B_s .

Ponendo

$$(9) \quad B_s = ((B_{lj}^{(s)})), \quad l, j = 0, 1, \dots, i_s$$

ove con $B_{lj}^{(s)}$ indichiamo una matrice ad $h_l^{(s)}$ righe ed $h_j^{(s)}$ colonne, si ha

$$C_s B_s =$$

$\alpha_s B_{00}^{(s)} + (I_0 0) B_{11}^{(s)}$	$\alpha_s B_{01}^{(s)} + (I_0 0) B_{11}^{(s)}$	\dots	$\alpha_s B_{0s}^{(s)} + (I_0 0) B_{1s}^{(s)}$
$\alpha_s B_{10}^{(s)} + (I_1 0) B_{11}^{(s)}$	$\alpha_s B_{11}^{(s)} + (I_1 0) B_{11}^{(s)}$	\dots	$\alpha_s B_{1s}^{(s)} + (I_1 0) B_{1s}^{(s)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\alpha_s B_{s-1,0}^{(s)} + (I_{s-1} 0) B_{1s}^{(s)}$	$\alpha_s B_{s-1,1}^{(s)} + (I_{s-1} 0) B_{1s}^{(s)}$	\dots	$\alpha_s B_{s-1,s}^{(s)} + (I_{s-1} 0) B_{1s}^{(s)}$
$\alpha_s B_{s,0}^{(s)}$	$\alpha_s B_{s,1}^{(s)}$	\dots	$\alpha_s B_{s,s}^{(s)}$

$$B_s C_s =$$

$\alpha_s B_{00}^{(s)}$	$B_{00}^{(s)}(I_0 0) + \alpha_s B_{01}^{(s)}$	\dots	$B_{0s}^{(s)}(I_{s-1} 0) + \alpha_s B_{0s}^{(s)}$
$\alpha_s B_{10}^{(s)}$	$B_{10}^{(s)}(I_0 0) + \alpha_s B_{11}^{(s)}$	\dots	$B_{1s}^{(s)}(I_{s-1} 0) + \alpha_s B_{1s}^{(s)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\alpha_s B_{s-1,0}^{(s)}$	$B_{s-1,0}^{(s)}(I_0 0) + \alpha_s B_{s-1,1}^{(s)}$	\dots	$B_{s-1,s}^{(s)}(I_{s-1} 0) + \alpha_s B_{s-1,s}^{(s)}$
$\alpha_s B_{s,0}^{(s)}$	$B_{s,0}^{(s)}(I_0 0) + \alpha_s B_{s,1}^{(s)}$	\dots	$B_{s,s}^{(s)}(I_{s-1} 0) + \alpha_s B_{s,s}^{(s)}$

Dall'uguaglianza di questi due prodotti seguono le relazioni

$$(IV) \quad B_{rq}^{(s)} = 0, \quad r > q, \quad (r, q = 0, 1, 2, \dots, i_s)$$

$$(10) \quad (I_{l-1} | 0) B_{l,t}^{(s)} = B_{l-1,t-1}^{(s)} (I_{t-1} | 0) \quad (l, t = 1, 2, \dots, i_s), \quad l \leq t.$$

Queste ultime si traducono nelle seguenti

$$(V) \quad B_{l,t}^{(s)} = \left(\begin{array}{c|c} B_{l-1,t-1}^{(s)} & 0 \\ \hline d_{l,t-1}^{(s)} & b_{l,t}^{(s)} \end{array} \right), \quad (l, t = 1, 2, \dots, i_s), \quad l \leq t,$$

dove $b_{l,t}^{(s)}$ è una matrice ad $h_l^{(s)} - h_{l-1}^{(s)}$ righe ed $h_t^{(s)} - h_{t-1}^{(s)}$ colonne e $d_{l,t-1}^{(s)}$ è una matrice ad $h_l^{(s)} - h_{l-1}^{(s)}$ righe ed $h_{t-1}^{(s)}$ colonne, entrambe arbitrarie.

Segue senz'altro la forma esplicita della più generale B_s permutabile con C_s , che qui appresso scriviamo pel caso $i_s = 3$, cioè dell'indice 4 :

$$(11) \quad B_s = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & B_{00}^{(s)} & & B_{01}^{(s)} & & B_{02}^{(s)} & & B_{03}^{(s)} & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ \hline 0 & & & & & & & & & \\ \hline & B_{00}^{(s)} & 0 & B_{01}^{(s)} & 0 & B_{02}^{(s)} & 0 & & & \\ \hline & d_{10}^{(s)} & b_{11}^{(s)} & d_{11}^{(s)} & b_{12}^{(s)} & d_{12}^{(s)} & b_{13}^{(s)} & & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ \hline 0 & & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & B_{00}^{(s)} & 0 & 0 & B_{01}^{(s)} & 0 & & 0 \\ \hline & & & d_{10}^{(s)} & b_{11}^{(s)} & & d_{11}^{(s)} & b_{12}^{(s)} & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ \hline & & & d_{21}^{(s)} & & b_{22}^{(s)} & & d_{22}^{(s)} & & b_{23}^{(s)} \\ \hline & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ \hline 0 & & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & B_{00}^{(s)} & 0 & & \\ \hline & & & & & & & d_{10}^{(s)} & b_{11}^{(s)} & & 0 \\ \hline & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & d_{21}^{(s)} & & b_{22}^{(s)} & \\ \hline & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & d_{32}^{(s)} & b_{33}^{(s)} \\ \hline \end{array}$$

Non vi son altre condizioni, fuori delle (IV) - (V), sicchè le matrici

$$(12) \quad B_0^{(j)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, i_s)$$

ciascuna con $h_0^{(j)}$ righe ed $h_j^{(j)}$ colonne sono arbitrarie insieme alle altre

$$(12)^* \quad (d_{l,t}^{(s)} | b_{l,t}^{(s)}) \quad (l, t = 1, 2, \dots, i_s; l \leq t)$$

ciascuna ad $h_l^{(s)} - h_{l-1}^{(s)}$ righe ed $h_t^{(s)}$ colonne.

Il numero dei parametri, linearmente indipendenti, dai quali dipende B^* è dunque

$$\begin{aligned} N &= \sum_s^{1, 2, \dots, m} \left\{ h_0^{(s)} (h_0^{(s)} + h_1^{(s)} + \dots + h_{i_s}^{(s)}) + \sum_{l \leq t}^{1, 2, \dots, i_s} (h_l^{(s)} - h_{l-1}^{(s)}) h_t^{(s)} \right\} \\ &= \sum_s^{1, 2, \dots, m} (h_0^{(s)^2} + h_1^{(s)^2} + \dots + h_{i_s}^{(s)^2}) = \sum h^2. \end{aligned}$$

Questo numero coincide con quello delle matrici che portano A nella sua forma canonica C , il che era ovvio *a priori*.

E poichè, se due matrici sono permutabili con A , anche il loro prodotto ed ogni combinazione lineare riesce permutabile con A , il risultato conseguito può enunciarsi dicendo che:

le matrici permutabili con A , costituiscono un'algebra complessa di ordine $N = \sum h^2$.

§ 2. - Le matrici permutabili degli ordini $n = 2, 3, 4$.

7. Le matrici canoniche di ogni ordine assegnato si costruiscono in modo ovvio. Corrispondentemente, i risultati del § prec. permettono di scrivere tutte quelle permutabili con esse (degeneri o non degeneri).

Esemplifichiamo i casi delle matrici di ordine 2, 3 o 4.

Per uniformità e chiarezza, indicheremo sempre con le lettere $a, b, \dots; \alpha, \beta, \dots; \alpha', \beta', \dots$ numeri complessi arbitrari (anche nulli) riservando le lettere greche per indicare le radici caratteristiche delle nostre matrici. Con I_s indicheremo la matrice identica di ordine s e con $a^{(s)}, b^{(s)}, \dots$ matrici arbitrarie d'ordine s . Distingueremo con I), II), ... i tipi di matrici canoniche degli ordini considerati e con I)', II)', ... i tipi più generali di matrici permutabili con quelle canoniche distinte dallo stesso numero d'ordine romano ⁽¹⁵⁾.

Cominciamo dal caso $n = 2$. I tipi canonici sono soltanto tre e cioè

$$\text{I): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right|, \quad \text{II): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \\ \hline 0 & \alpha \end{array} \right|, \quad \text{III): } \alpha I_2,$$

con le segnature rispettive [(1) (1)], [(1, 1)], [(2)].

Quelle ordinatamente permutabili con queste sono

$$\text{I)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & 0 \\ \hline 0 & \beta' \end{array} \right|, \quad \text{II)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & a \\ \hline 0 & \alpha' \end{array} \right|, \quad \text{III)'}: \alpha'^{(2)}.$$

8. Per l'ordine $n = 3$ si hanno sei tipi, di cui i primi tre sono matrici diagonali:

$$\text{I): } \left| \begin{array}{c|c|c} \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & \gamma \end{array} \right|; \quad \text{II): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha I_2 & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right|; \quad \text{III): } \alpha I_3;$$

con le segnature rispettive [(1) (1) (1)], [(2) (1)], [(3)];

$$\text{IV): } \left| \begin{array}{c|c|c} \alpha & 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & \beta \end{array} \right|; \quad \text{V): } \left| \begin{array}{c|c|c} \alpha & 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha \end{array} \right|; \quad \text{VI): } \left| \begin{array}{c|c|c} \alpha & 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 1 \\ \hline 0 & 0 & \alpha \end{array} \right|,$$

le cui rispettive segnature sono [(1, 1) (1)], [(1, 2)], [(1, 1, 1)].

Le matrici con queste permutabili si scrivono:

⁽¹⁵⁾ In ciascuno dei tipi esemplificati si verifica immediatamente la relazione $N = \Sigma h^2$.

$$\begin{aligned}
 \text{I)'} &: \left| \begin{array}{c|c|c} \alpha' & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta' & 0 \\ \hline 0 & 0 & \beta' \end{array} \right|; & \text{II)'} &: \left| \begin{array}{c|c} \alpha^{(2)} & 0 \\ \hline 0 & \beta' \end{array} \right|; & \text{III)'} &: \alpha^{(3)}; \\
 \text{IV)'} &: \left| \begin{array}{c|c|c} \alpha' & a & 0 \\ \hline 0 & \alpha' & \\ \hline 0 & 0 & \beta' \end{array} \right|, & \text{V)'} &: \left| \begin{array}{c|c|c} \alpha' & a & b \\ \hline 0 & \alpha' & 0 \\ \hline 0 & c & \beta' \end{array} \right|; & \text{VI)'} &: \left| \begin{array}{c|c|c} \alpha' & a & b \\ \hline 0 & \alpha' & a \\ \hline 0 & 0 & \alpha' \end{array} \right|.
 \end{aligned}$$

9. Passiamo ora al caso $n=4$. Si hanno 5 tipi diagonali e 9 non diagonali. Eccoli, con le rispettive segnature e le più generali matrici permutabili con esse.

a) tipi diagonali:

$$\begin{aligned}
 \text{I)'} &: \left| \begin{array}{c|c|c|c} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \gamma & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \delta \end{array} \right|; & \text{II)'} &: \left| \begin{array}{c|c} \alpha I_2 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} \beta & 0 \\ \hline 0 & \gamma \end{array} \end{array} \right|; & \text{III)'} &: \left| \begin{array}{c|c} \alpha I_2 & 0 \\ \hline 0 & \beta I_2 \end{array} \right| \\
 & & \text{IV)'} &: \left| \begin{array}{c|c} \alpha I_3 & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right|; & \text{V)'} &: \alpha I_4.
 \end{aligned}$$

Le segnature complessive sono, ordinatamente, le seguenti

$$\begin{aligned}
 & [(1) (1) (1) (1)]; & [(2) (1) (1)]; & [(2) (2)]; \\
 & [(3) (1)]; & [(4)].
 \end{aligned}$$

I corrispondenti tipi generali di matrici permutabili con queste risultano:

$$\begin{aligned}
 \text{I)'} &: \left| \begin{array}{c|c|c|c} \alpha' & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta' & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \gamma' & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \delta' \end{array} \right|; & \text{II)'} &: \left| \begin{array}{c|c} \alpha^{(2)} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} \beta' & 0 \\ \hline 0 & \gamma' \end{array} \end{array} \right|; & \text{III)'} &: \left| \begin{array}{c|c} \alpha^{(2)} & 0 \\ \hline 0 & b^{(2)} \end{array} \right| \\
 \text{IV)'} &: \left| \begin{array}{c|c} \alpha^{(3)} & 0 \\ \hline 0 & \beta' \end{array} \right|; & \text{V)'} &: \alpha^{(4)}
 \end{aligned}$$

b) tipi non diagonali :

$$\begin{array}{l}
 \text{VI): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \\ \hline 0 & \alpha \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \beta & 0 \\ \hline 0 & \gamma \end{array} ; \text{VII): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \\ \hline 0 & \alpha \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \beta I_2 \end{array} ; \text{VIII): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \\ \hline 0 & \alpha \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \beta & 1 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \\
 \\
 \text{IX): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \ 0 \\ \hline 0 & \alpha I_2 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \beta \end{array} ; \text{X): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \ 0 \\ \hline 0 & \alpha \ 1 \\ \hline 0 & 0 \ \alpha \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \beta \end{array} ; \text{XI): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 & \alpha I_3 \end{array} \right| \\
 \\
 \text{XII): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha I_2 & I_2 \\ \hline 0 & \alpha I_2 \end{array} \right| ; \text{XIII): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 & \alpha \ 1 \ 0 \\ \hline 0 & \alpha I_2 \end{array} \right| ; \text{XIV): } \left| \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 & \alpha \ 1 \ 0 \\ \hline 0 & 0 \ \alpha \ 1 \\ \hline 0 & 0 \ 0 \ \alpha \end{array} \right|
 \end{array}$$

le cui segnature complessive sono, ordinatamente :

$$\begin{array}{l}
 \text{VI): } [(1, 1) (1) (1)]; \quad \text{VII): } [(1, 1) (2)]; \quad \text{VIII): } [(1, 1) (1, 1)]; \\
 \text{IX): } [(1, 2) (1)]; \quad \text{X): } [(1, 1, 1) (1)]; \quad \text{XI): } [(1, 3)]; \\
 \text{XII): } [(2, 2)]; \quad \text{XIII): } [1, 1, 2)]; \quad \text{XIV): } [(1, 1, 1, 1)].
 \end{array}$$

Ecco le più generali matrici con queste permutabili :

$$\begin{array}{l}
 \text{VI)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & a \\ \hline 0 & \alpha' \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \beta' & 0 \\ \hline 0 & \gamma' \end{array} ; \text{VII)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & a \\ \hline 0 & \alpha' \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline b^{(2)} \end{array} ; \text{VIII)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & a \\ \hline 0 & \alpha' \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \beta' & b \\ \hline 0 & \beta' \end{array} \\
 \\
 \text{IX)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & a \ b \\ \hline 0 & \alpha' \ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \beta' \end{array} ; \text{X)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & a \ b \\ \hline 0 & \alpha' \ a \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline \beta' \end{array} ; \text{XI)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & a \ b \ c \\ \hline 0 & \alpha' \ 0 \ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \ c \ a^{(2)} \end{array} \\
 \\
 \text{XII)'}: \left| \begin{array}{c|c} a^{(2)} & b^{(2)} \\ \hline 0 & a^{(2)} \end{array} \right| ; \text{XIII)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & a \ b \ c \\ \hline 0 & \alpha \ a \ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \ d \ \beta' \end{array} ; \text{XIV)'}: \left| \begin{array}{c|c} \alpha' & a \ b \ c \\ \hline 0 & \alpha' \ a \ b \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \ 0 \ \alpha' \ a \end{array}
 \end{array}$$

§ 2. - Osservazioni sulle matrici diagonalizzabili.

10. Diremo che una matrice è *diagonalizzabile* se la sua forma canonica è diagonale.

Abbiamo già visto che se la forma canonica C di A è diagonale, nelle $B^* = XP$ permutabili con C le matrici B_s sono tutte arbitrarie. Inoltre, è ovvio che se $B = PX$ si vuole anch'essa diagonalizzabile, deve esserlo pure $B^* = P^{-1}BP = XP$, e *viceversa*.

Segue che debbono esser tali anche tutte le matrici parziali B_s .

Invero, se Q è diagonalizzabile, dicendo α una sua radice caratteristica qualsiasi e μ la relativa molteplicità, la matrice $Q - \alpha I$ è necessariamente di nullità μ , e *viceversa*. D'altra parte, l'aspetto di B^* ci assicura che le sue radici caratteristiche son tutte e sole quelle delle matrici parziali B_s , e che ciascuna radice ha molteplicità somma di quelle con cui figura nelle B_s . Perciò, se qualche B_s non fosse diagonalizzabile, almeno una sua radice caratteristica, poniamo β , farebbe acquistare a $B_s - \beta I_s$ nullità inferiore alla molteplicità di β , onde ⁽¹⁶⁾ $B^* - \beta I$ avrebbe nullità inferiore alla molteplicità di β come radice caratteristica di B^* , e B^* non sarebbe diagonalizzabile.

11. Sia X_s una matrice che porta B_s alla forma diagonale, cioè si abbia

$$X_s B_s X_s^{-1} = D_s$$

con D_s diagonale. La matrice

⁽¹⁶⁾ Si tenga presente che una matrice come B^* ha nullità somma di quelle delle sue matrici componenti B_s : quindi altrettanto accade per $B^* - \beta I$ rispetto alle $B_s - \beta I_s$.

$$X^* = \begin{vmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & X_m \end{vmatrix}$$

composta mediante le X_i , porterà B^* alla forma diagonale D e trasformerà in sè stessa C , che si è supposta diagonale:

$$X^* B^* X^{*-1} = D, \quad X^* C X^{*-1} = C.$$

Di qui si ottiene che:

Se due matrici diagonalizzabili sono permutabili esse possono portarsi a forma diagonale con la stessa matrice. Viceversa, se due matrici son portate a forma diagonale da una stessa matrice esse sono permutabili.

Infatti, la matrice che porta A e B entrambe a forma diagonale è $X^* P^{-1}$. Viceversa, se si ha

$$Q A Q^{-1} = D, \quad Q B Q^{-1} = D'$$

con D e D' diagonali, è anche

$$D D' = D' D = Q A B Q^{-1} = Q B A Q^{-1},$$

perchè due matrici diagonali son sempre permutabili. Quindi $A B = B A$.

9. Le matrici reali simmetriche son tutte diagonalizzabili, anzi lo sono con matrici (reali ed) ortogonali.

Supponendo appunto che A e B sian reali e simmetriche, si può portare A alla forma diagonale mediante una matrice P

(reale ed) ortogonale. Cioè

$$P^{-1} A P = D, \quad P^{-1} = P_{-1}$$

con D diagonale, quindi

$$B^* = P^{-1} B P = P_{-1} B P = (P_{-1} B P)_{-1} = B_{-1}^*$$

cioè B^* è ancora reale e simmetrica, quindi sono tali le matrici componenti B_i . Perciò le matrici X_i che portano la B_i a forma diagonale possono tutte supporre (reali ed) ortogonali, onde sarà reale ed ortogonale anche la matrice X^* composta mediante le X_i , insieme al prodotto $X^* P^{-1} = X^* P_{-1}$.

Si può dunque enunciare:

Affinchè due matrici reali e simmetriche siano permutabili occorre e basta che sian portate a forma diagonale da una stessa matrice (reale ed) ortogonale.

12. Se A è antisimmetrica, essa può portarsi a forma diagonale mercè una matrice unitaria, cioè se ⁽¹⁷⁾

$$A_{-1} = \bar{A}$$

esiste una U soddisfacente alla relazione.

$$U^{-1} = \bar{U}_{-1}$$

tale che

$$U A \bar{U}_{-1} = U A U^{-1} = D$$

con D diagonale. Se B , permutabile con A , si vuole anch'essa antisimmetrica, lo sarà ancora

$$B^* = U B \bar{U}_{-1}$$

⁽¹⁷⁾ Con A_{-1} s'indica la *trasposta* di A ; con \bar{A} la *coniugata* (cioè ad elementi complessi coniugati) di A .

e quindi saranno antisimmetriche altresì le componenti B_s . Perciò potremo supporre $P^{-1} = U$ e che le matrici X_s , portanti le B_s , a forma diagonale sian tutte unitarie. Allora risultano unitarie anche la matrice X^* composta mediante esse ed il prodotto

$$X^* P^{-1} = X^* U,$$

onde si conclude che ⁽¹⁸⁾:

Affinchè due matrici antisimmetriche siano permutabili occorre e basta che siano portate a forma diagonale da una stessa matrice unitaria.

OSSERVAZIONE. - Se A è antiemisimmetrica, cioè se

$$A_{-1} = -\bar{A},$$

il prodotto scalare iA ($i = \sqrt{-1}$) è antisimmetrico, quindi le matrici antiemisimmetriche sono anch'esse diagonalizzabili con una matrice unitaria. Inoltre, se B , permutabile con A , è antiemisimmetrica ed U unitaria,

$$B^* = UB\bar{U}_{-1}$$

è ancora antiemisimmetrica, insieme alle componenti B_s .

Perciò, nell'enunciato precedente si può supporre che una o entrambe le matrici A e B siano antiemisimmetriche, anzichè antisimmetriche.

13. Ancora: se A è reale ed emisimmetrica, cioè se

$$A = \bar{A}, \quad A_{-1} = -A$$

⁽¹⁸⁾ F. PETER und H. WEYL: *Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe* [Math. Ann. 97 (1928)] p. 737. Vedi anche la mia Nota dal titolo: *Sulle matrici permutabili o diagonalizzabili* [Atti Acc. Peloritana, v. 37 (Messina, 1935-XIII p. II)].

A è anche antiemisimmetrica, quindi diagonalizzabile con una matrice unitaria. E se B si vuole pur essa reale ed emisimmetrica, la matrice

$$B^* = UB\bar{U}_{-1},$$

con U unitaria, riesce antiemisimmetrica insieme alle matrici parziali B_s . Segue che:

due matrici reali, entrambe emisimmetriche ovvero una simmetrica l'altra emisimmetrica sono permutabili allora e solo che sono diagonalizzabili con una stessa matrice unitaria.

OSSERVAZIONE. - Le matrici reali e simmetriche sono anche antisimmetriche e le matrici (reali ed) ortogonali sono anche unitarie. Perciò gli enunciati stabiliti in questo § 2 potrebbero riunirsi in uno solo nel quale si parli soltanto di una coppia di matrici entrambe antisimmetriche o antiemisimmetriche, ovvero l'una antisimmetrica - l'altra antiemisimmetrica, e di matrici unitarie che le portano a forma diagonale.

Rileviamo infine che le osservazioni che precedono, insieme a quelle del § precedente, permettono di costruire tutte le matrici antisimmetriche o antiemisimmetriche permutabili con una data anch'essa tale, appena si conosca una matrice unitaria che porti questa a forma diagonale.

14. Se A è reale e simmetrica, può talvolta ⁽¹⁹⁾ interessare di determinare le sole matrici ortogonali permutabili con essa. In tal caso la matrice P che porta A a forma canonica $P^{-1}AP = D$, necessariamente diagonale, può suppersi ortogonale e perchè B , permutabile con A , sia anch'essa ortogonale occorre e basta che lo sia $B^* = P^{-1}BP$.

Ciò equivale a scegliere ortogonali le componenti B_s , che sono arbitrarie. Essendo queste di ordini μ_s , molteplicità delle radici caratteristiche α_s di A , si ha che

⁽¹⁹⁾ Se si considera la forma quadratica xAx_{-1} , $x = (x_1, \dots, x_n)$ si han così tutte le sostituzioni ortogonali che portano questa forma quadratica in se stessa. Analogamente per le forme hermitiane $xA\bar{x}_{-1}$, $A_{-1} = \bar{A}$. di cui si dice appresso.

Le matrici ortogonali permutabili con una A reale e simmetrica possedente m radici caratteristiche distinte di molteplicità rispettive $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ dipendono (algebricamente) da

$$\sum_s^{1, 2, \dots, m} \frac{\mu_s(\mu_s - 1)}{2}$$

parametri.

Si ha subito che se le radici caratteristiche di A son tutte distinte, cioè i μ_s tutti eguali ad uno, A non è permutabile che con un numero finito di matrici ortogonali.

Analogamente, se A è antisimmetrica, può richiedersi di determinare tutte le matrici unitarie permutabili con A . Potendo P scegliersi anch'essa unitaria, ci riduciamo a cercare tutte le $B^* = P B P^{-1}$ unitarie, ossia tutte le B_s unitarie.

Una matrice unitaria di ordine μ soddisfa anch'essa, come lo ortogonali, a $\frac{\mu(\mu + 1)}{2}$ condizioni algebriche. Vale perciò un enunciato del tutto simile al precedente e si ha pure che se le radici caratteristiche di A son tutte distinte non vi è che un numero finito di matrici unitarie permutabili con A .

§ 4. - Funzioni razionali intere e serie scalari di potenze.

15. Fra le matrici permutabili con A sonvi tutte le funzioni razionali intere e tutte le serie di potenze (a coefficienti numeri complessi) della matrice A (serie scalari di potenze).

Poichè, indicando con $f(x)$ una funzione razionale intera o una serie scalare di potenze di x , si ha

$$P^{-1} f(A) P = f(P^{-1} A P) = f(C)$$

ci riduciamo ancora da A a C .

Orbene, ogni potenza C^r di C è composta con le m potenze C_s^r ($s = 1, 2, \dots, m$), e per queste ultime si ha

$\alpha_r I_0^{(s)}$	$(\overset{r}{1}) \alpha_r^{r-1} I_0^{(s)}$	0	$(\overset{r}{2}) \alpha_r^{r-2} I_0^{(s)}$	0	$(\overset{r}{3}) \alpha_r^{r-3} I_0^{(s)}$	0	...
0	$\alpha_r I_1^{(s)}$		$(\overset{r}{1}) \alpha_r^{r-1} I_1^{(s)}$	0	$(\overset{r}{2}) \alpha_r^{r-2} I_1^{(s)}$	0	...
0	0		$\alpha_r I_2^{(s)}$		$(\overset{r}{1}) \alpha_r^{r-1} I_2^{(s)}$...
⋮	⋮		⋮		⋮		⋮
0	0		0		⋮	⋮	$\alpha_r I_s^{(s)}$

$C_r =$

quindi $f(C)$ riesce composta mediante le $f(C_s)$, come C lo è con le C_s .

Dalla espressione di C_s^r segue ovviamente che

$f(\alpha_s) I_0^{(s)}$	$f'(\alpha_s) \cdot I_0^{(s)}$	$\frac{1}{2!} f''(\alpha_s) \cdot I_0^{(s)}$	$\frac{1}{j_s!} f^{(j_s)}(\alpha_s) \cdot I_0^{(s)}$	0
0	$f(\alpha_s) \cdot I_1^{(s)}$	$f'(\alpha_s) \cdot I_1^{(s)}$	$\frac{1}{(j_s-1)!} f^{(j_s-1)}(\alpha_s) \cdot I_1^{(s)}$	0
0	0	$f(\alpha_s) \cdot I_2^{(s)}$	$\frac{1}{(j_s-2)!} f^{(j_s-2)}(\alpha_s) \cdot I_2^{(s)}$	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
0	0	0	$f(\alpha_s) \cdot I_{j_s}^{(s)}$	$f(\alpha_s) \cdot I_{j_s}^{(s)}$

$f(C_s) =$

Nel caso di $f(x)$ serie di potenze, questa scrittura esige che la serie converga per $x = \alpha_s$ ($s = 1, 2, \dots, m$), condizioni che, per un noto teorema ⁽²⁰⁾ sono anche sufficienti per la esistenza di $f(C)$, quindi di $f(A)$.

Paragonando la $f(C_s)$ ora scritta con l'espressione della più generale B_s [si ponga $i_s = 3$ e si confronti con la (11)] si riconosce che la coincidenza di queste due matrici non può avvenire se non quando gli interi $h_0^{(s)}, h_1^{(s)}, \dots, h_{i_s}^{(s)}$ son tutti eguali ad uno, poichè solo in tal caso le matrici $B_{ii}^{(s)}$ possono, *restando arbitrarie*, coincidere con $f(\alpha_s) \cdot I_0^{(s)}$ ed insieme le $B_{ii}^{(s)}$ coincidere con $f(\alpha_s) \cdot I_i^{(s)}$, eliminandosi le $d_{ii-1}^{(s)}, b_{ii}^{(s)}$. Ma ciò è anche sufficiente. Anzi basta che $f(x)$ sia una funzione razionale intera di grado $\geq n-1$ in x , perchè in tal caso

$$f(\alpha_s), f'(\alpha_s), \dots, \frac{1}{n!} f^{(n-1)}(\alpha_s) \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

possono assumere, con opportuna scelta dei coefficienti di $f(x)$, valori prefissati ad arbitrio ⁽²¹⁾.

Si ottiene così il noto risultato ⁽²²⁾:

Affinchè le funzioni razionali intere di A esauriscano le matrici permutabili con A occorre e basta che la segnatura complessiva di A sia formata di interi tutti eguali ad uno. Ovvero sia che il numero di questi interi sia massimo (eguale ad n) od anche che l'indice relativo a ciascuna radice caratteristica eguagli la corrispondente molteplicità.

⁽²⁰⁾ SPAMPINATO N., *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra ad n unità dotata di modulo* [Rend. Pal., t. 57 (1933-XI)] p. 31. CHERUBINO S., *Sulle funzioni di matrici* [Boll. Accad. Gioenia, vol. 69 (1935-XIII)].

⁽²¹⁾ Si tenga anche conto che essendo tutti i numeri $h_i^{(s)}$ eguali ad uno si ha $i_s + 1 = \mu_s$ e che $\Sigma h^2 = n$, cioè che B^* , quindi B , viene a dipendere linearmente da n parametri arbitrari.

⁽²²⁾ CECIONI F., loco cit., p. 48. Cfr. anche la recentissima Nota di M. TOGNETTI; *Sulle matrici permutabili* [Rend. Lincei, vol. XXI (1935-XIII)] n. 6, fine.

Qui abbiamo detto A invece di C , perchè, come si è già osservato, da $P^{-1}AP = C$ segue che $P^{-1}f(A)P = f(C)$ e viceversa. Nè abbiám fatto menzione del grado di $f(x)$ perchè la scelta di $f(x)$ di grado $< n - 1$ conduce soltanto all'annullamento di parte degli n parametri arbitrari da cui dipende B^* .

Ricordando poi che ogni matrice di ordine n soddisfa almeno ad un'equazione di grado n (ad es. alla propria equazione caratteristica) si riconosce che in questo caso ci si può sempre limitare a considerare soltanto funzioni razionali intere di grado $\leq n - 1$.

Quando gl'interi $h_i^{(s)}$ son tutti eguali ad 1, le (11) diventano

$$B_s = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{i_s} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{i_s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{vmatrix}, \quad (s=1, 2, \dots, m),$$

e due qualunque di queste B_s , quindi anche le due matrici B^* composte mediante esse, nonchè le corrispondenti matrici B , son sempre fra loro permutabili.

Se invece qualche $h_i^{(s)}$ è maggiore di 1, si riconosce subito ⁽²³⁾ che si possono sempre formare due matrici (11) non permutabili. Si conclude quindi col seguente teorema del VOLTERRA ⁽²⁴⁾:

il gruppo di tutte le matrici permutabili con una assegnata A è abeliano allora e solo che gli interi caratteristici della segnatura di A son tutti eguali ad 1.

Quindi anche:

il gruppo di tutte le matrici permutabili con una assegnata A è abeliano allora e solo che è esaurito dalle funzioni razionali intere di A .

⁽²³⁾ Basta riferirsi agli esempi del § 2.

⁽²⁴⁾ VOLTERRA V., *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* [Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, s. 3^a, t. XI (1899)] n. 6, p. 11.

**§ 5. - Radici caratteristiche delle funzioni
razionali intere di più matrici permutabili.**

16. Cominciamo dal considerare il prodotto $AB = BA$. Le sue radici caratteristiche coincidono con quelle di

$$(1) \quad P^{-1}ABP = C \cdot P^{-1}BP = CB^*$$

e queste ultime sono quelle degli m prodotti $C_s B_s$, come immediatamente segue dal che C e B^* sono composte mediante le C_s e le B_s , rispettivamente.

Guardando queste matrici componenti si ha

$$C_s B_s = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \alpha_s B_{00}^{(s)} & * & . & * \\ \hline 0 & \alpha_s B_{11}^{(s)} & . & * \\ \hline . & . & . & . \\ \hline . & . & . & . \\ \hline 0 & 0 & . & \alpha_s B_{i_s i_s}^{(s)} \\ \hline \end{array}$$

ove al posto degli asterischi vi son matrici che non interessa tener presenti.

Le radici caratteristiche del prodotto $C_s B_s$ son dunque quelle delle matrici $\alpha_s B_{00}^{(s)}, \dots, \alpha_s B_{i_s i_s}^{(s)}$, mentre le radici caratteristiche di B_s sono date da quelle delle matrici $B_{00}^{(s)}, \dots, B_{i_s i_s}^{(s)}$. Osservando che, come si riconosce immediatamente, le radici caratteristiche del prodotto λB , ove λ è un fattore scalare, son quelle di B moltiplicate per λ , si conclude che le radici caratteristiche di AB sono i prodotti di quelle α_s di A per le radici caratteristiche delle matrici $B_{r_s}^{(s)}$ ossia per quelle di B_s .

Si ha, inoltre, che le radici del prodotto $AB = BA$ risultano convenientemente ordinate in conseguenza della scelta della matrice P , di cui nella relazione (1), cioè in dipendenza dell'ordine col quale le α_s figurano nella forma canonica C .

Indicando con λ_1, λ_2 due quantità scalari (numeri complessi) si ha

$$(2) \quad P^{-1}(\lambda_1 A - \lambda_2 B) P = \lambda_1 C + \lambda_2 B^*$$

e $\lambda_1 C + \lambda_2 B^*$ risulta composta mediante le matrici

$\lambda_1 \alpha_s I_{00}^{(s)} + \lambda_2 B_{00}^{(s)}$	*	$\lambda_1 \alpha_s I_{11}^{(s)} + \lambda_2 B_{11}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{rs}^{(s)} + \lambda_2 B_{rs}^{(s)}$
$\lambda_1 \alpha_s I_{00}^{(s)} + \lambda_2 B_{00}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{11}^{(s)} + \lambda_2 B_{11}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{rs}^{(s)} + \lambda_2 B_{rs}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{rs}^{(s)} + \lambda_2 B_{rs}^{(s)}$
$\lambda_1 \alpha_s I_{00}^{(s)} + \lambda_2 B_{00}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{11}^{(s)} + \lambda_2 B_{11}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{rs}^{(s)} + \lambda_2 B_{rs}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{rs}^{(s)} + \lambda_2 B_{rs}^{(s)}$
$\lambda_1 \alpha_s I_{00}^{(s)} + \lambda_2 B_{00}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{11}^{(s)} + \lambda_2 B_{11}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{rs}^{(s)} + \lambda_2 B_{rs}^{(s)}$	$\lambda_1 \alpha_s I_{rs}^{(s)} + \lambda_2 B_{rs}^{(s)}$

$$\lambda_1 C_s + \lambda_2 B_s =$$

sicchè, osservando che $\lambda I + B$ ha per radici caratteristiche quelle di B aumentate di λ , risulta senz'altro che le radici caratteristiche di $\lambda_1 C_s + \lambda_2 B_s$ si ottengono sostituendo in questa espressione α_s al posto di C_s , e le radici caratteristiche di B_s , cioè delle $B_s^{(s)}$, al posto di B_s .

Quindi anche quelle di $\lambda_1 C + \lambda_2 B^*$ ossia di $\lambda_1 A + \lambda_2 B$, si ottengono sostituendo le due matrici con le proprie radici caratteristiche, convenientemente ordinate, in conseguenza della scelta di P che figura nella (2).

Orbene, ogni funzione razionale intera, a coefficienti scalari, di A e B si compone con una successione di operazioni come AB e $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ ed ogni funzione razionale intera di più di due matrici si compone, mediante procedimento induttivo, con quelle di due sole, quindi si è dimostrato l'importante teorema del FROBENIUS ⁽²⁵⁾:

Se $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ è una funzione razionale intera delle $p > 1$ variabili x_1, x_2, \dots, x_p ed A_1, A_2, \dots, A_p son matrici a due a due permutabili, le radici caratteristiche della matrice $f(A_1, A_2, \dots, A_p)$ si ottengono sostituendo in $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ le variabili x_i con le radici caratteristiche delle corrispondenti A_i , convenientemente ordinate. L'ordine col quale vanno prese queste radici non dipende dalla funzione f , ma soltanto dalle matrici A_1, A_2, \dots, A_p .

Per precisare l'ultima affermazione, si osservi che l'ordinamento relativo delle radici caratteristiche ⁽²⁶⁾ si fissa mediante una qualsiasi matrice P che porti una delle A_i , ad es. A_1 , alla forma canonica $P^{-1} A_1 P = A_1^*$. Infatti, posto

$$A_i^* = P^{-1} A_i^* P$$

le radici caratteristiche di $f(A_1, A_2, \dots, A_p)$ coincidono con quelle di

⁽²⁵⁾ Cfr. la bella, ma non semplice, dimostrazione dello SCHUR riportata a pagg. 175-179 del citato trattato dello SCORZA.

⁽²⁶⁾ Sul concetto di *ordine relativo* delle radici caratteristiche delle matrici A_i , si veggia la mia Nota cit. ⁽⁶⁾.

$$P^{-1}f(A_1, A_2, \dots, A_p)P = f(A_1^*, A_2^*, \dots, A_p^*)$$

e con ciò, giusta il procedimento svolto nel caso AB e nel caso $\lambda_1 A + \lambda_2 B$, l'ordine relativo delle radici caratteristiche delle matrici A_i è pienamente determinato, quale che sia la funzione $f(x_1, \dots, x_p)$.

È poi ovvio che, scelta convenientemente P , si può fare che le radici caratteristiche di una qualsiasi della A_i , ad es. di A_1 , cioè l'ordine degli elementi diagonali della sua forma canonica, sia quello che ci piace. Resta, in conseguenza, fissato l'ordine col quale le radici caratteristiche di ciascuna $A_i^* = P^{-1}A_iP$, dovranno sostituirsi alle variabili x_i , nella funzione $f(x_1, \dots, x_p)$, per dar luogo alle radici caratteristiche di $f(A_1, \dots, A_p)$.
