Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Angelo Tonolo

**Sulle funzioni complesse di più variabili olomorfe di ordine *n***

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 6 (1935), p. 9-20

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__9_0>

# SULLE FUNZIONI COMPLESSE DI PIÙ VARIABILI OLOMORFE DI ORDINE $n$.

*di* ANGELO TONOLO

Si deve a BURGATTI (1) il concetto di funzione complessa dei punti di un' area piana analitica di ordine $n$. Per queste funzioni Egli ha dato alcune formule interessanti, ed ha mostrato anche il loro impiego in un problema di elastica piana, ricavando in agile modo la formula di KOLOSOFF. Lo scopo di questa Nota è di dare la definizione in discorso per le funzioni complesse dei punti di più aree piane, e di ricavare alcune formule che sono estensioni di quelle stabilite da BURGATTI.

Avverto che in questa Nota mi sono limitato ai soli sviluppi formali, mettendo di proposito in disparte alcuni punti, che ho accennati nel corso della medesima, e che sono essenziali e ad essa intimamente legati. Lasciando ad un' altra eventuale ricerca l'accurato esame di questi punti, mi sono deciso intanto a render nota la parte formale.

**1.** Siano

$$x = x_1 + i x_2, \quad y = y_1 + i y_2$$

due variabili complesse indipendenti che penseremo rappresentate

(1) P. BURGATTI, *Sulle funzioni analitiche di ordine n*, [Bollettino dell'Unione matematica italiana, Anno I°, (1922) fasc. 1, e Anno II° (1923), fasc. 3].

al solito modo con i punti $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2)$ di due piani complessi $\pi$ e $\pi'$ [2]. Introduciamo i due operatori

$$(1) \qquad D_x = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Se poniamo

$$D^2_{x^2} = D_x D_x, \quad D^2_{yx} = D_y D_x,$$

$$D^2_{xy} = D_x D_y, \quad D^2_{y^2} = D_y D_y,$$

e facile riconoscere che si ha

$$D^2_{xy} = D^2_{yx},$$

purchè, beninteso, la funzione alla quale vengono applicati questi operatori soddisfi a quelle condizioni per cui è lecito invertire l' ordine delle derivazioni parziali rispetto alle quattro variabili reali $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$. Ne segue che l' ordine secondo il quale vengono successivamente eseguiti gli operatori $D_x$, $D_y$ non ha nessuna influenza sul risultato finale, onde, applicando $n$ volte di seguito le operazioni in discorso, si otterrano soltanto le iterate

$$(2) \qquad D^{(n)}_{x^n}, \quad D^{(n)}_{x^{n-1}y}, \quad D^{(n)}_{x^{n-2}y^2}, \ldots \quad D^{(n)}_{xy^{n-1}}, \quad D^{(n)}_{y^n}.$$

**2.** Per ciò che diremo al n. 4 conviene trasformare gli operatori ora definiti in altri equivalenti. A questo scopo, accanto alle variabili complesse $x$, $y$, consideriamo anche le loro coniugate

$$\overline{x} = x_1 - i x_2, \quad \overline{y} = y_1 - i y_2.$$

[2] Le considerazioni che andiamo svolgendo si riferiscono alle funzioni complesse dei punti di due aree piane; è ovvia l' estensione al caso generale.

Si deduce

$$x_1 = \frac{x + \overline{x}}{2}, \quad x_2 = \frac{x - \overline{x}}{2i}, \quad y_1 = \frac{y + \overline{y}}{2}, \quad y_2 = \frac{y - \overline{y}}{2i},$$

e quindi ogni funzione [3] delle quattro variabili reali $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ può trasformarsi in una funzione delle quattro variabili complesse $x$, $\overline{x}$, $y$, $\overline{y}$. Avendosi

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \overline{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = i\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \overline{x}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \overline{y}}, \quad \frac{\partial}{\partial y_2} = i\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \overline{y}}\right),$$

si ricava

$$D_x = 2\frac{\partial}{\partial \overline{x}}, \quad D_y = 2\frac{\partial}{\partial \overline{y}}, \tag{3}$$

donde

$$\begin{aligned} D^2_{x^2} &= D_x\left(2\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\right) = 2^2\frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^2}, \\ D^2_{xy} &= D_x\left(2\frac{\partial}{\partial \overline{y}}\right) = 2^2\frac{\partial^2}{\partial \overline{x}\,\partial \overline{y}}, \\ D^2_{y^2} &= D_y\left(2\frac{\partial}{\partial \overline{y}}\right) = 2^2\frac{\partial^2}{\partial \overline{y}^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

In generale si hanno le relazioni

[3] Perchè le considerazioni fondate sull' impiego delle variabili complesse coniugate abbiamo senso, occorre che le funzioni $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ su cui si opera siano analitiche nei quattro argomenti, cioè sviluppabili in serie di Taylor nell' intorno di ogni punto: $(x_1, x_2)$ in $\sigma$, $(y_1, y_2)$ in $\sigma'$, $\sigma$ e $\sigma'$ essendo due aree finite situate nei piani $\pi$, $\pi'$ ove le funzioni s' intendono definite, sicchè $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ si prolunghi in tutto un intorno ad otto dimensioni del punto considerato.

$$D^{(n)}_{x^n} = 2^n \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}^n}, \quad D^{(n)}_{x^{n-1}y} = 2^n \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}^{n-1}\, \partial \bar{y}}, \quad D^{(n)}_{x^{n-2}y^2} = 2^n \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}^{n-2}\, \partial \bar{y}^2},$$

(5)

$$\ldots\ldots D^{(n)}_{xy^{n-1}} = 2^n \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}\, \partial \bar{y}^{n-1}}, \quad D^{(n)}_{y^n} = 2^n \frac{\partial^n}{\partial \bar{y}^n}.$$

**3.** Sia $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = u(x_1, x_2, y_1, y_2) + i\,v(x_1, x_2, y_1, y_2)$ una funzione dei punti $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2)$ di due aree finite $\sigma$ e $\sigma'$ situate nei piani $\pi$ e $\pi'$ ove, come abbiamo detto, pensiamo distese le variabili complesse $x$, $y$. È ben noto che le condizioni

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1},$$

(6)

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_2} = -\frac{\partial v}{\partial y_1},$$

che supponiamo verificate nei punti di $\sigma$ e $\sigma'$, sono necessarie e sufficienti perchè la $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ sia ivi funzione olomorfa delle variabili complesse $x$, $y$. L' introduzione dei due operatori $D_x$, $D_y$ permette di condensare nelle due equazioni

$$D_x f = 0, \quad D_y f = 0 \tag{7}$$

le quattro equazioni (6)

Sia ora $f$ funzione non olomorfa di $x$, $y$ nelle aree $\sigma$, $\sigma'$: allora, una almeno delle due funzioni $D_x f$, $D_y f$ non è ivi identicamente nulla. Per fissare le idee, si supponga che entrambe non si annullino in $\sigma$, $\sigma'$. Potrebbe accadere allora che tutte e due siano ivi olomorfe, per la qual cosa è necessario e basta che ivi siano verificate le tre relazioni

$$D^2_{x^2} f = 0, \quad D^2_{xy} f = 0, \quad D^2_{y^2} f = 0. \tag{8}$$

In tal caso diremo che $f$ *è funzione olomorfa di ordine* 2 *nelle aree* $\sigma$, $\sigma'$, convenendo di chiamare $f$ *funzione olomorfa di ordine uno* nelle aree in discorso, quando ivi si ha

$$D_x f = 0\,, \quad D_y f = 0\,.$$

In generale, se nelle aree $\sigma$, $\sigma'$ sussistono le $n+1$ relazioni

$$(9) \qquad D^{(n)}_{x^n} f = 0\,, \quad D^{(n)}_{x^{n-1}y} f = 0, \; \dots \; D^{(n)}_{xy^{n-1}} f = 0\,, \quad D^{(n)}_{y^n} f = 0\,,$$

cioè, se ivi sono olomorfe le $n$ funzioni

$$D^{(n-1)}_{x^{n-1}} f, \quad D^{(n-1)}_{x^{n-2}y} f, \; \dots \; D^{(n-1)}_{xy^{n-2}} f, \quad D^{(n-1)}_{y^{n-1}} f,$$

allora diremo che $f$ *è funzione olomorfa di ordine* $n$ *nelle aree* $\sigma$, $\sigma'$.

**4.** Per trovare la forma generale d'una tale funzione $f$, si osservi che in forza delle relazioni (5) devono sussistere nelle aree $\sigma$, $\sigma'$ le equazioni

$$\frac{\partial^n f}{\partial \overline{x}^n} = 0\,, \quad \frac{\partial^n f}{\partial \overline{x}^{n-1}\,\partial \overline{y}} = 0\,, \; \dots \; \frac{\partial^n f}{\partial \overline{x}\,\partial \overline{y}^{n-1}} = 0\,, \quad \frac{\partial^n f}{\partial \overline{y}^n} = 0\,,$$

e perciò $f$ dovrà essere un polinomio di grado $n-1$ nelle variabili $\overline{x}$, $\overline{y}$ con coefficienti funzioni soltanto di $x$, $y$, e quindi funzioni olomorfe di ordine uno in $\sigma$, $\sigma'$. Possiamo quindi scrivere

$$(10) \qquad f = \varphi_{n-1}(\overline{x}, \overline{y}) + \varphi_{n-2}(\overline{x}, \overline{y}) + \dots + \varphi_1(\overline{x}, \overline{y}) + \varphi_0(\overline{x}, \overline{y}),$$

dove $\varphi_h(\overline{x}, \overline{y})$ $(h = 0, 1, 2, \dots n-1)$ è un polinomio omogeneo di grado $h$ nelle variabili $\overline{x}$, $\overline{y}$, i cui coefficienti sono funzioni soltanto delle variabili $x$, $y$. Se si vuole esprimere il polinomio $f$ nelle variabili $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$, basta osservare che

$$\overline{x} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x}\,, \quad \overline{y} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{y}\,,$$

e conglobare poi nei coefficienti delle funzioni $\varphi_h(\overline{x}, \overline{y})$ le varie potenze delle variabili $x$, $y$, mettendo in evidenza soltanto le potenze di $x_1^2 + x_2^2$, $y_1^2 + y_2^2$. Si ottiene così

$$(11) \quad f = \psi_{n-1}(x_1^2 + x_2^2,\ y_1^2 + y_2^2) + \psi_{n-2}(x_1^2 + x_2^2,\ y_1^2 + y_2^2) + \dots + \psi_1(x_1^2 + x_2^2,\ y_1^2 + y_2^2) + \psi_0(x_1^2 + x_2^2,\ y_1^2 + y_2^2),$$

dove le $\psi_h$ sono polinomî omogenei di grado $h$ negli argomenti indicati, con coefficienti funzioni olomorfe di ordine uno delle variabili $x$, $y$. Adunque: *ogni funzione olomorfa di ordine $n$ dei punti delle aree $\sigma$, $\sigma'$ è necessariamente della forma* (11). Inversamente è manifesto che: *ogni funzione del tipo* (11) *è olomorfa di ordine $n$ nelle aree $\sigma$, $\sigma'$.*

*Osservazione I.* – È ovvio che il risultato espresso dalla (11) sussiste anche senza l'ipotesi del carattere analitico di $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ nei suoi quattro argomenti. È questo un punto essenziale della quistione che dovrebbe essere chiarito.

Facciamo ancora notare che il risultato in parola potrebbe venire collegato con la teoria delle *funzioni olomorfe* ($\alpha$) di Pompieu. In questa teoria infatti le funzioni olomorfe di Cauchy, tengono il posto delle costanti additive della integrazione ordinaria [4]

**5.** Siano $s$, $s'$ le curve chiuse che limitano le aree $\sigma$, $\sigma'$. Se $f(x, y)$ è funzione olomorfa (di prim'ordine) nelle aree in discorso, contorni inclusi, e se $\xi$, $\eta$ sono due punti interni rispettivamente di $\sigma$ e $\sigma'$, vale la formula

$$(12) \qquad f(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{f(x, y)}{(x-\xi)(y-\eta)}\, dy,$$

ove $s$, $s'$ s'intendono percorsi in senso diretto. Limitandoci, per brevità, alle funzioni olomorfe di ordine 2 nelle aree $\sigma$, $\sigma'$, an-

[4] Cfr. A. Tonolo, *Sulle funzioni olomorfe* ($\alpha$) *di più variabili*, [Atti della R. Accad. di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Vol. LI, (1935)].

diamo a stabilire una formula analoga alla (12). Sia $f_2$ una tale funzione; le funzioni $D_x f_2$, $D_y f_2$ sono allora olomorfe di primo ordine, e perciò, indicando con $(D_x f_2)_{s,s'}$, $(D_y f_2)_{s,s'}$ i loro valori lungo le curve $s$, $s'$, avremo nei punti $\xi$, $\eta$

$$
(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} D_x f_2 &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{(D_x f_2)_{s,s'}}{(x-\xi)(y-\eta)}\, dy\,, \\ D_y f_2 &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{(D_y f_2)_{s,s'}}{(x-\xi)(y-\eta)}\, dy\,. \end{aligned} \right.
$$

Ma nei punti $M(\xi_1, \xi_2)$, $M'(\eta_1, \eta_2)$ di affissa rispettiva $\xi$, $\eta$ si ha

$$
(14) \qquad f_2 = \frac{\overline{\xi}}{2} D_x f_2 + \frac{\overline{\eta}}{2} D_y f_2 + \phi(\xi, \eta)\,,
$$

dove $\phi$ è funzione olomorfa di $x$, $y$ e $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ sono le coniugate delle affisse $\xi$, $\eta$.

I valori di $\phi$ sui contorni $s$, $s'$ saranno quindi dati dalla formula

$$
(\phi)_{s,s'} = (f_2)_{s,s'} - \frac{1}{2}(\overline{\xi} D_x f_2)_{s,s'} - \frac{1}{2}(\overline{\eta} D_y f_2)_{s,s'}\,,
$$

e perciò nei punti $\xi$, $\eta$ avremo

$$
(15) \qquad \phi(\xi, \eta) = -
$$

$$
-\frac{1}{4\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{(f_2)_{s,s'} - \frac{1}{2}(\overline{\xi} D_x f_2)_{s,s'} - \frac{1}{2}(\overline{\eta} D_y f_2)_{s,s'}}{(x-\xi)(y-\eta)}\, dy.
$$

Ne risulta, sostituendo le (13), (15) nella (14), la formula finale:

$$(16) \qquad f_2(M, M') = -\frac{\bar{\xi}}{8\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{(D_x f_2)_{s,s'}}{(x-\xi)(y-\eta)} dy -$$

$$-\frac{\bar{\eta}}{8\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{(D_y f_2)_{s,s'}}{(x-\xi)(y-\eta)} dy +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{(\bar{\xi} D_x f_2)_{s,s'}}{(x-\xi)(y-\eta)} dy +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{(\bar{\eta} D_y f_2)_{s,s'}}{(x-\xi)(y-\eta)} dy -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{(f_2)_{s,s'}}{(x-\xi)(y-\eta)} dy .$$

**6.** Le funzioni $D_x f_2$, $D_y f_2$ che figurano nella espressione (14) di $f_2$ sono funzioni olomorfe di ordine uno; se quindi conosciamo i loro valori lungo i contorni $s$, $s'$, la formula (12), ove si ponga beninteso al posto di $f$ le funzioni in discorso, ci darà i loro valori nei punti interni di $\sigma$, $\sigma'$. Se è data inoltre sopra $s$ ed $s'$ la funzione $f_2$, la (14) stessa ci farà conoscere la $\psi$ lungo le curve in parola e quindi la (12), ove naturalmente la $f$ venga surrogata dalla $\psi$, determinerà questa funzione nei punti interni delle aree $\sigma$, $\sigma'$. Questo ragionamento si può estendere alle funzioni $f_n$ e conduce al risultato seguente: *una funzione $f_n$ olomorfa di ordine $n$ nelle aree $\sigma$, $\sigma'$ è completamente determinata dai valori che assumono lungo i contorni $s$, $s'$ le funzioni*

$$f_n;\; D_x f_n,\; D_y f_n;\; D^2_{x^2} f_n,\; D^2_{xy} f_n,\; D^2_{y^2} f_n;$$

$$\ldots\ldots\; D^{(n-1)}_{x^{n-1}} f_n,\; D^{(n-1)}_{x^{n-2}y} f_n, \ldots\; D^{(n-1)}_{xy^{n-2}} f_n,\; D^{(n-1)}_{y^{n-1}} f_n .$$

Questo teorema si può enunciare in un'altro modo. A questo scopo denotiamo con $p$, $p'$ rispettivamente le normali alle curve $s$, $s'$ vôlte verso l'interno delle aree $\sigma$, $\sigma'$. Si ha, come è facile riconoscere,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} & D_x f_n \times \frac{d\bar{x}}{dn} = \frac{df_n}{dp} - i\frac{df_n}{ds}, \\ & D_y f_n \times \frac{d\bar{y}}{dn'} = \frac{df_n}{dp'} - i\frac{df_n}{ds'}; \end{aligned} \right.$$

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} & D^2_{x^2} f_n \times \left(\frac{d\bar{x}}{dp}\right)^2 = \frac{d^2 f_n}{dp^2} - \frac{d^2 f_n}{ds^2} - 2i\frac{d^2 f_n}{ds\, dp}, \\ & D^2_{xy} f_n \times \frac{d\bar{x}}{dp}\frac{d\bar{y}}{dp'} = \frac{d^2 f_n}{dp\, dp'} - \frac{d^2 f_n}{ds\, ds'} - i\frac{d^2 f_n}{ds\, dp'} - i\frac{d^2 f_n}{ds'\, dp}, \\ & D^2_{y^2} f_n \times \left(\frac{d\bar{y}}{dp'}\right)^2 = \frac{d^2 f_n}{dp'^2} - \frac{d^2 f_n}{ds'^2} - 2i\frac{d^2 f_n}{ds'\, dp'}; \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

Le derivate $\frac{df_n}{ds}$, $\frac{df_n}{ds'}$ sono completamente conosciute quando sono dati i valori di $f_n$ lungo le curve $s$, $s'$; ne segue che assegnare le funzioni $D_x f$, $D_y f$ sopra $s$, $s'$ equivale a dare, in forza delle (17), i valori delle derivate normali $\frac{df_n}{dp'}$, $\frac{df_n}{dp'}$. Sono perciò note anche le derivate seconde $\frac{d^2 f_n}{ds\, dp'}$, $\frac{d^2 f_n}{ds'\, dp}$ come pure le $\frac{d^2 f_n}{ds^2}$, $\frac{d^2 f_n}{ds'^2}$. Se quindi conosciamo le funzioni $D^2_{x^2} f_n$, $D^2_{xy} f_n$, $D^2_{y^2} f_n$ lungo le curve in discorso veniamo a determinare completamente dalle (18) le derivate normali seconde $\frac{d^2 f_n}{dp^2}$, $\frac{d^2 f_n}{dp'^2}$, $\frac{d^2 f_n}{dp\, dp'}$. Seguitando questo ragionamento si arriva alla conclusione seguente: *Una funzione $f_n$ olomorfa di ordine $n$ nelle aree $\sigma$, $\sigma'$ è completamente determinata dai valori che assumono lungo le curve $s$, $s'$ la funzione stessa e tutte le derivate normali successive secondo $p$ e $p'$ fino a quelle di ordine $n-1$.*

*Osservazione II.* – Una funzione olomorfa ordinaria in un' area $\sigma$ è completamente determinata quando si dànno sul contorno di $\sigma$ la parte reale ed un valore della parte immaginaria. Quali sono i «dati» strettamenti necessari per individuare una funzione olomorfa di ordine superiore? È questo un' altro punto che dovrebbe essere approfondito, limitando pure lo studio alle funzioni definite in una sola area piana.

7. Terminiamo questi studî con lo stabilire una formula, analoga a quella di Green, la quale permette di determinare i valori d' una funzione $f$ regolare nei punti interni delle aree $\sigma$, $\sigma'$ quando sono conosciuti in queste aree gli operatori $D_x f$, $D_y f$, $D^2_{xy} f$ e lungo i contorni $s$, $s'$ la funzione stessa. Perciò ricordiamo che se $f$ è funzione regolare soltanto dei punti di $\sigma$, si ha [5]

$$f(M) = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{D_x f}{x-\xi} d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f}{x-\xi} dx, \tag{19}$$

dove $M$ è un punto qualsiasi di $\sigma$, purchè interno, di affissa $\xi$, e il contorno $s$ è percorso in senso diretto.

Sia ora $f$ una funzione regolare dei punti delle due aree $\sigma$, $\sigma'$; indichiamo con $M$, $M'$ due punti interni qualunque di esse di affisse rispettive $\xi$, $\eta$, e poniamo

$$I = -\frac{1}{4\pi^2}\int_s dx \int_{s'} \frac{f(P, Q)}{(x-\xi)(y-\eta)} dy. \tag{20}$$

Nell' integrale lungo $s'$ $P$ denota un punto fisso di $s$, mentre $Q$ è un punto variabile lungo $s'$. Alla funzione $f(P, Q_{\sigma'})$ considerata nell' area $\sigma'$ applichiamo la formula (19); si trae

[5] La formola (19) è notissima. Credo si possa attribuirla a Beltrami: *Sulle funzioni complesse*, Rend. Ist. Lombardo, Vol. XX, serie II (1887); oppure: Opere (Vol. IV).

$$\frac{1}{x-\xi}\int_{s'}\frac{f(P,\ Q)}{(y-\eta)}\,dy = \frac{1}{x-\xi}\Bigg[2\pi i f(P,\ M') +$$

$$+ i\int_{\sigma'}\frac{D_y f(P,\ Q_{\sigma'})}{y-\eta}\,dy\Bigg],$$

e perciò

$$I = -\frac{i}{2\pi}\int_s\frac{f(P,\ M')}{x-\xi}\,dx - \tag{21}$$

$$-\frac{i}{4\pi^2}\int_s\frac{dx}{x-\xi}\int_{\sigma'}\frac{D_y f(P,\ Q_{\sigma'})}{y-\eta}\,dy\,.$$

Alla funzione dei punti di $\sigma$ $f(P_\sigma,\ M')$ applichiamo ancora la formula (19); si ottiene

$$\int_s\frac{f(P,\ M')}{x-\xi}\,dx = 2\pi i\,f(M,\ M') + i\int_\sigma\frac{D_x f(P_\sigma,\ M')}{x-\xi}\,d\sigma\,.$$

Sostituendo nella (21) e risolvendo rispetto ad $f M,\ M')$ si ha intanto la relazione

$$f M,\ M') = \frac{i}{4\pi^2}\int_s dx\int_{\sigma'}\frac{D_y f(P,\ Q_{\sigma'})}{(x-\xi)\,(y-\eta)}\,d\sigma' - \tag{22}$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_s dx\int_{s'}\frac{f(P,\ Q)}{(x-\xi)\,(y-\eta)}\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\frac{D_x f(P_\sigma,\ M')}{(x-\xi)}\,d\sigma\,.$$

Ora osserviamo che nel primo termine del secondo membro si possono invertire le integrazioni, ottenendo così

$$\int_s dx \int_{\sigma'} \frac{D_y f(P, Q_{\sigma'})}{(x-\xi)(y-\eta)} d\sigma' = \int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{y-\eta} \int_s \frac{D_y f(P, Q_{\sigma'})}{x-\xi} dx =$$

$$= \int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{y-\eta} D_y \int_s \frac{f(P, Q_{\sigma'})}{x-\xi} dx .$$

Ma si ha, sempre in virtù della (19),

$$\int_s \frac{f(P, Q_{\sigma'})}{x-\xi} dx = 2\pi i\, f(M, Q_{\sigma'}) + i \int_\sigma \frac{D_x f(P_\sigma, Q_{\sigma'})}{x-\xi} d\sigma .$$

Ne risulta che

$$(23) \qquad \int_s dx \int_{\sigma'} \frac{D_y f(P, Q_{\sigma'})}{(x-\xi)(y-\eta)} d\sigma' = 2\pi i \int_{\sigma'} \frac{D_y f(M, Q_{\sigma'})}{y-\eta} d\sigma' +$$

$$+ i \int_{\sigma'} d\sigma' \int_\sigma \frac{D^2_{xy} f(P_\sigma, Q_{\sigma'})}{(x-\xi)(y-\eta)} d\sigma ,$$

e perciò, surrogando la (23) nella (22), si perviene alla formula definitiva

$$f(M, M') = -\frac{1}{4\pi^2} \int_\sigma d\sigma \int_{\sigma'} \frac{D^2_{xy} f(P_\sigma, Q_{\sigma'})}{(x-\xi)(y-\eta)} d\sigma' -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{D_x f(P_\sigma, M')}{x-\xi} d\sigma -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma'} \frac{D_y f(M, Q_{\sigma'})}{y-\eta} d\sigma' -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_s dx \int_{s'} \frac{f(P_s, Q_{s'})}{(x-\xi)(y-\eta)} dy .$$

---