LUIGI CAMPEDELLI

Intorno alle superficie ellittiche con un fascio di curve di genere due

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 6 (1935), p. 57-110
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__57_0>

INTORNO ALLE SUPERFICIE ELLITTICHE CON UN FASCIO DI CURVE DI GENERE DUE

di Luigi Campedelli *a Roma.*

1. - Introduzione. È noto che sulle superficie (irregolari) F di *genere geometrico nullo* ($p_g = 0$) e di *genere numerico* $p_a = -1$, non riferibili a rigate, esiste un *fascio ellittico* (K) *di curve di genere* $\pi \geq 1$, ed un *fascio lineare* $|C|$ *di curve ellittiche* (1). *Le F posseggono un gruppo ellittico semplicemente infinito,* Γ*, di trasformazioni birazionali in sè (avente come traiettorie le curve del fascio lineare* $|C|$*)* (2); pertanto le F rientrano nella famiglia delle cosiddette *superficie ellittiche*, di cui Painlevé (3) ha indicato una rappresentazione analitica caratteristica mediante funzioni ellittiche di un parametro ed algebriche di un altro: rappresentazione che per $p_g = 0$ è stata sviluppata dall' Enriques (4).

Una curva C ed una K si segano in un gruppo G_n di un certo numero n di punti, e i gruppi G_n formano sulla F una *involuzione* I_n, che è *generata da un gruppo finito* Γ_n *(ciclico o abeliano a base due) di trasformazioni della superficie in sè,*

(1) Cfr. F. Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* [« Rend. Circolo Mat. di Palermo », tomo XX (1905), pp. 1-33].

(2) Per le proprietà delle superficie F, che qui ed in seguito si richiamano, e per le relative indicazioni bibliografiche, cfr. F. Enriques, *Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero,* lezioni raccolte da L. Campedelli [Rend. del Seminario Matematico della R. Università di Roma, serie III, vol. I, parte II (1934–XII), pp. 7–190].

(3) Cfr. P. Painvelé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles* [Paris, Hermann, 1897].

(4) Cfr. F. Enriques, loco cit. (1).

il quale è contenuto nel gruppo semplicemente infinito Γ ([5]). Il numero n dicesi *determinante* della superficie F.

La costruzione delle superficie F di determinante primo (caso ciclico) è stata indicata da F. Enriques, sia con metodo algebrico, sia - come si è accennato - per mezzo delle funzioni ellittiche ([6]). L'effettiva esistenza di superficie ellittiche ($p_g = 0$, $p_a = -1$), corrispondenti ad un gruppo Γ_n abeliano non ciclico, è stata messa in luce da alcuni esempi notevoli incontrati da G. Bagnera e M. De Franchis nello studio delle superficie iperellittiche ([7]). In seguito O. Chisini ha assegnato la costruzione di tutte le superficie ellittiche con gruppo abeliano ([8]).

Il Bagnera e il De Franchis ([9]) hanno dato per primi (mediante rappresentazioni parametriche iperellittiche) la classificazione delle nostre superficie F nel caso in cui anche le curve del fascio ellittico (K) siano di genere $\pi = 1$ (superficie F con curva canonica virtuale d'ordine zero). Allo stesso risultato, ma in modo diverso e del tutto indipendente (sempre però partendo dalla rappresentazione parametrica delle F come superficie iperellittiche), sono giunti poco più tardi anche F. Enriques e F. Severi ([10]). Recentemente l'Enriques ha ripreso la questione e l'ha nuovamente trattata per via geometrica ([11]).

([5]) Cfr. Enriques, loco cit. ([2]), cap. III, § 14, n, 1.

([6]) Cfr. F. Enriques, loco cit. ([1]).

([7]) Cfr. G. Bagnera e M. De Franchis, *Sopra le superficie algebriche che hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meroforme quadruplamente periodiche di due parametri* [« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, vol. 16 (1907_1), pp. 492–498, 596–603].

([8]) Cfr. O. Chisini, *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto* [« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, vol. 30 (1912_2), pp. 172–175, 251–255, 305-308].

([9]) Cfr. G. Bagnera e M. De Franchis, loco cit. ([7]).

([10]) Cfr. F. Enriques e F. Severi, *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari* [« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, vol. 17 (1908_1), pp. 4–9]. Vedi anche degli stessi AA., *Intorno alle superficie iperellittiche* [ibid., vol. 16 (1907_1), pp. 443-453], e *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* [« Acta Math. », tomes 32 (1909), pp. 283–392, et 33 (1910), pp. 321–403].

([11]) Cr. F. Enriques, *Sulle superficie ellittiche di genere zero* [« Rend. R. Accad. Lincei », serie VI, vol. 19 (1934_1), pp. 195–199]. Vedi anche F. Enriques, loco cit. ([2]), cap. III, § 14, n. 2 e seguenti.

Dal suggestivo studio di questo problema siamo stati portati alla *ricerca delle superficie F, con i generi*

$$p_g = 0\,, \quad p_a = -1\,,$$

possedenti un fascio ellittico (K) *di curve di genere due,* delle quali si dà qui la completa classificazione, pervenendo a distribuirle in dieci famiglie rappresentabili con equazioni dei tipi (A), (B), (C), (D), (E), (F_1), (F_2), (G), (H), (I) del § 5.

Per giungere a tali risultati si presentano diverse vie che si completano e si controllano a vicenda. La prima di queste (§ 2) è fondata sulla discussione di una facile equazione di analisi indeterminata - la (1) del § 2 - che lega fra loro i caratteri numerici delle superficie F, e alla quale si perviene subito considerando il gruppo jacobiano della serie lineare che il fascio $|C|$ sega sopra una curva K. In tal modo si viene a determinare un certo numero di famiglie *aritmeticamente possibili* per le nostre superficie F, ma non si può dire nulla circa la loro esistenza: ed anzi nel seguito si proverà che degli undici casi che s' incontrano, solo dieci conducono ad effettive superficie del tipo richiesto.

Questa discriminazione è consentita da un altro metodo di ricerca, che procede indipendentemente dal primo, e che porta anzi a ritrovare anche i caratteri numerici forniti da quello. I criteri che lo informano sono i seguenti.

Si consideri il gruppo Γ_n delle trasformazioni di una curva K in sè: esso lascia invariato il gruppo dei sei punti doppi della g^1_2 canonica di K. Pertanto quando la K si rappresenti sopra una retta doppia mediante quella g^1_2, i sei punti di diramazione saranno trasformati in sè da un gruppo ciclico o abeliano a base due di proiettività. I gruppi di sei punti sopra una retta che soddisfano a questa condizione, sono ben noti (Bolza), e risultano in numero di otto (§ 3). Però, viceversa, non è detto che ognuno di questi riporti ad una curva K sulla quale Γ_n sia ciclico o abeliano (a base due): in effetto si verifica (§ 4) che ciò accade solo per sette di quei gruppi, e precisamente per quelli ciclici. Poichè, d' altra parte, tre di questi dànno luogo a due distinte curve K, si perviene a costruire dieci diversi tipi di curve K del genere due, dalle quali si risale ad altrettante famiglie di superficie F, di cui si scriveranno le equazioni ricorrendo alla loro rappresentazione sopra un conveniente cilindro ellittico multiplo (§ 5).

Nella seconda parte della nostra ricerca ci intratteremo sopra una ricostruzione dei vari tipi di superficie F, che in qualche modo appare più diretta, e che riesce assai suggestiva ed interessante: essa si fonda sullo studio della rigata ellittica doppia Φ le cui generatrici sono immagini delle curve K di genere due. Sulla Φ la curva di diramazione risulta ellittica, o, se riducibile, composta di parti ellittiche (§ 6). Conviene assumere per la Φ un particolare modello proiettivo, costituito da una certa rigata ellittica del quarto ordine, Φ_4, nello spazio ordinario, della quale indicheremo la costruzione (§ 7). Un'ulteriore analisi di talune particolarità della rappresentazione della F sulla Φ_4 (§ 8), ci porterà al nostro scopo (§ 9).

PARTE PRIMA

2. – I tipi aritmeticamente possibili di superficie ellittiche di genere zero con un fascio di curve di genere due.

Ogni superficie ellittica F, con i caratteri

$$p_g = 0, \quad p_a = -1,$$

che possegga un fascio ellittico (K) di curve di genere $\pi \geq 1$, ed un fascio lineare $|C|$ di curve ellittiche, n-secanti le K, si può rappresentare sopra un cilindro ellittico n-plo, f, le cui generatrici k rispondono, con corrispondenza $[1, n]$, alle curve del fascio ellittico (K); e le C abbiano invece per omologhe le sezioni c segate sul cilindro f dal fascio dei piani normali alle generatrici. Allora la curva di diramazione sul cilindro f risulta costituita soltanto da (almeno tre) particolari sezioni c, ognuna delle quali rappresenta una curva del fascio $|C|$ ridotta ad una componente multipla. Se queste C sono in numero di $t\,(\geq 3)$, e se risultano costituite ciascuna da una curva contata s_i volte $(i = 1, 2, \ldots, t)$, si ha:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{n}{s_i}(s_i - 1) = 2n + 2\pi - 2, \tag{1}$$

altrettanti essendo i punti doppi doppi della serie lineare g_n^1 segata dal fascio $|C|$ sulla curva K di genere π.

Inoltre, poichè sulla generatrice multipla k non si hanno diramazioni all'infinito, e il gruppo Γ_n delle sostituzioni relative ai punti di diramazione, cioè il gruppo delle trasformazioni generatrici della g_n^1 suddetta, è un gruppo (ciclico o) abeliano, si ha che *ciascuno dei numeri* s_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ *è un divisore del minimo comune multiplo dei rimanenti* ([12]).

Nel caso in cui le curve K siano di genere $\pi = 2$, la (1) diviene:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{n}{s_i}(s_i - 1) = 2n + 2,$$

che è opportuno scrivere sotto la forma:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{1}{s_i} = t - 2 - \frac{2}{n}. \tag{2}$$

Ricerchiamo allora i sistemi di valori per n, t e per le s_i con i quali si può soddisfare alla (2): ad essi corrisponderanno altrettanti *tipi aritmeticamente possibili* di superficie ellittiche F con $p_g = 0, p_a = -1$, possedenti un fascio ellittico di curve di genere due. Per decidere circa l'effettiva esistenza di codesti tipi, occorrerà rivolgersi ad altri criteri, il che faremo in un secondo tempo: questa analisi preventiva servirà in ogni modo di utile controllo alle conclusioni ulteriori.

Cominciamo con l'osservare che dalla (2) segue:

$$t \leq 6.$$

([12]) Cfr. F. Enriques loco cit. ([2]), § 14, n. 1.

Infatti, essendo in ogni caso, $s_i \geq 2$ e $n \geq 2$, la (2) dà:

$$\frac{t}{2} \geq \sum_{i=1}^{i=t} \frac{1}{s_i} = t - 2 - \frac{2}{n} \geq t - 3.$$

Prendendo in questa relazione i segni di uguaglianza, si ha un primo sistema di valori che soddisfano alla (2):

(I) *determinante* $n = 2$; $t = 6$; $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 2$.

Se nella (2) si pone $t = 5$, essa diviene:

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{1}{s_i} = 3 - \frac{2}{n}. \tag{3}$$

Il primo membro di questa uguaglianza ha al massimo il valore

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{1}{s_i} = \frac{5}{2},$$

che si ottiene quando tutte le s_i sono uguali a due: invece il secondo membro è

$$3 - \frac{2}{n} \geq \frac{5}{2}$$

per $n \geq 4$. Quindi la (3) potrà avere soluzioni solo per $n \geq 4$. Per $n = 4$ si ha:

(II) *determinante* $n = 4$; $t = 5$; $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 2$.

Per $n = 3$ o $n = 2$ si hanno soluzioni non accettabili perchè non soddisfano alla condizione che ciascuna delle s_i divida il minimo comune multiplo delle rimanenti, oppure all'altra: $s_i \leq n$.

Passiamo al caso $t = 4$. La (2) dà:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{s_i} = 2 - \frac{2}{n}, \tag{4}$$

e, per fissare le idee, si supponga:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4 .$$

Non si può avere $s_i = 2$ per tutte le s_i, poichè il primo membro della (4) risulterebbe uguale a due, mentre il secondo è sempre più piccolo. E siccome, d'altra parte, ogni s_i deve dividere il minimo comune multiplo delle rimanenti, avremo che due almeno delle s_i saranno maggiori di due unità. Pertanto il massimo valore che potrà assumere il primo membro della (4) sarà:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

e quindi

$$3 \leq n \leq 6 .$$

Per $n = 6$ si ha:

(III) *determinante* $n = 6$; $t = 4$; $s_1 = s_2 = 2$, $s_3 = s_4 = 3$.

Per $n = 5$ la (4) non è soddisfatta da nessun valore delle s_i.
Per $n = 4$ la sola soluzione accettabile è:

(IV) *determinante* $n = 4$; $t = 4$; $s_1 = s_2 = 2$, $s_3 = s_4 = 4$.

Per $n = 3$ si ha:

(V) *determinante* $n = 3$; $t = 4$; $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 3$.

Infine si ponga $t = 3$: la (2) diviene

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{s_i} = 1 - \frac{2}{n},$$

e supporremo, al solito:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 .$$

Dalla (5), essendo $s_i \leq n$, segue intanto $n \geq 5$.

Inoltre si avverta che può aversi solo $s_1 = 2$, essendo necessariamente $s_2 > 2$ e $s_3 > 2$. Si ponga allora $s_1 = 2$, $s_2 = h$: sarà $s_3 = h$ o $s_3 = 2h$ secondo che h è un numero pari o dispari.

Nel primo caso, da

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{s_i} < 1 \,,$$

segue $h \geq 6$, nel secondo $h \geq 5$. Quindi il massimo valore che può assumere il primo membro della (5) risulta :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

da cui $n \leq 12$. Si trovano così facilmente le seguenti soluzioni della (5) :

(VI) *determinante* $n = 5$; $t = 3$; $s_1 = s_2 = s_3 = 5$.

(VII) *determinante* $n = 6$; $t = 3$; $s_1 = 3$, $s_2 = s_3 = 6$.

(VIII) *determinante* $n = 8$; $t = 3$; $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 8$.

(VIII bis) *determinante* $n = 8$; $t = 3$; $s_1 = s_2 = s_3 = 4$.

(IX) *determinante* $n = 10$; $t = 3$; $s_1 = 2$, $s_2 = 5$, $s_3 = 10$.

(X) *determinante* $n = 12$; $t = 3$; $s_1 = 2$; $s_2 = s_3 = 6$.

Pertanto da questa analisi di carattere aritmetico, risultano *a priori* possibili undici casi. Vedremo poi, passando alla loro effettiva costruzione, che soltanto dieci di essi sono realizzabili, il tipo (VIII bis) dovendo essere escluso.

3. - Le sestiche binarie con un gruppo ciclico o abeliano di trasformazioni proiettive.

Per giungere a costruire i vari tipi di superficie F con $p_g = 0$, $p_a = -1$, dotate di un fascio ellittico (K) di curve di genere due, e di un fascio lineare $|C|$ di curve ellittiche, occorre premettere alcune considerazioni relative alle curve del fascio (K).

Abbiamo già ricordato che il fascio $|C|$ sega sopra una K una serie lineare g_n^1, che è generata da un gruppo finito Γ_n di trasformazioni della K in sè, essendo Γ_n subordinato al gruppo ∞^1 di trasformazioni della F in sè. Ora il gruppo Γ_n è abeliano, e – come ha osservato O. Chisini [13] – è, tutt'al più, *a base due:* pertanto le K posseggono un gruppo finito, Γ_n, ciclico o abeliano a base due, di trasformazioni in sè. Converrà allora cominciare col determinare i vari tipi di curve K di genere due, che godono di siffatta proprietà.

Per questo consideriamo sopra una K la g_2^1 canonica: essa è trasformata in sè dal gruppo Γ_n, il quale, in particolare, lascia invariato il gruppo dei sei punti doppi della g_2^1. Quindi se mediante la g_2^1, si rappresenta la K sopra una retta doppia con i sei punti di diramazione A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, questi saranno trasformati in sè da un gruppo finito di proiettività, il quale sarà in isomorfismo (oloedrico o diedrico) con Γ_n, e quindi sarà anch'esso un gruppo ciclico o abeliano a base due. Ne segue che per giungere alla determinazione delle nostre K, dovremo passare attraverso l'analisi dei gruppi di sei punti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, sopra una retta, che posseggono un gruppo di trasformazioni proiettive in se stessi.

Tale studio è stato fatto in modo completo dal Bolza [14], e consiste nel ricercare i gruppi di sei punti mutati in sè dai ben noti gruppi finiti di trasformazioni proiettive sulla retta *(gruppi dei poliedri regolari)*. La cosa è per noi facile in quanto possiamo limitarci ad elencare i casi in cui il gruppo è ciclico o abeliano (a base due), che sono i soli che interessano al nostro scopo.

Tenendo presente la costituzione dei gruppi dei poliedri regolari [15], si avverta subito che non esiste alcuna sestina di punti invariante rispetto al gruppo dell'icosaedro; invece per i gruppi dell'ottaedro e del tetraedo esiste una siffatta sestina, ma si tratta in ambedue i casi di gruppi non abeliani. Rimangono quindi

(13) Cfr. O. Chisini, loco cit. (8) oppure F. Enriques, loco cit. (2), § 14, n. 1.

(14) Cfr. O. Bolza, *On Binary Sextics with Linear Transformations into Themselves.* [« American Journal of Mathematics », vol. X (1888), pp. 47–70].

(15) Cfr., p. es., L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* (Pisa 1899), cap. IV, oppure F. Enriques e O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. I, libro II, cap. I, § 10 (Bologna, 1915).

soltanto i gruppi della piramide (gruppi ciclici) e quelli diedrali: ed anzi, per questi ultimi, il solo caso abeliano (a base due) che è quello del quarto ordine (gruppo trirettangolo).

Per comodità di esposizione è opportuno elencare per primo il caso della

1) *identità:* i sei punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, sono affatto generici, e quindi il gruppo che li trasforma in sè è costituito soltanto dall' identità.

Dal tipo ciclico si deducono per il nostro gruppo dei sei punti A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, i casi seguenti:

2) *gruppo ciclico del secondo ordine:* le tre coppie (A_1, A_2), (A_3, A_4) e (A_5, A_6), sono costituite da punti coniugati in una stessa involuzione;

oppure:

3) le coppie (A_3, A_4) e (A_5, A_6) sono coniugate nell' involuzione che ha come punti doppi A_1 e A_2;

4) *gruppo ciclico del terzo ordine:* le terne (A_1, A_2, A_3) e (A_4, A_5, A_6) sono due cicli di una stessa proiettività ciclica del terzo ordine;

5) *gruppo ciclico del quarto ordine:* i punti A_3, A_4, A_5, A_6, costituiscono un ciclo della proiettività ciclica del quarto ordine che ha come punti uniti A_1 e A_2;

6) *gruppo ciclico del quinto ordine:* i cinque punti A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, formano un ciclo di una proiettività ciclica del quinto ordine, che ha un punto unito in A_1;

7) *gruppo ciclico del sesto ordine:* i sei punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, costituiscono un ciclo di una proiettività ciclica del sesto ordine.

Infine, come si è detto si ha il

8) *gruppo trirettangolo,* che comprende come sottogruppo il caso 2). Invero se (A_3, A_4) e (A_5, A_6) sono due coppie dell' involuzione π che ha A_1 e A_2 come punti doppi, esistono altre due involuzioni, π_1 e π_2, permutabili fra loro e con la π, le quali cambiano in sè il gruppo delle A_i. Si tratta dell' involuzione individuata dalle coppie (A_1, A_2), (A_3, A_5), e di quella cui appar-

tengono le coppie (A_1, A_2), (A_3, A_6). La π, la π_1 e la π_2, insieme all'identità, costituiscono appunto un gruppo trirettangolo.

4. – Le curve di genere due con un gruppo ciclico o abeliano a base due di trasformazioni in se stesse.

Dai gruppi dei punti A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ dianzi determinati, si risale subito alle curve K, di genere due, rappresentate doppiamente sopra una retta con i sei punti di diramazione A_i, e che quindi hanno l'equazione:

$$y^2 = \prod_{i=1}^{i=6} (x - a_i),$$

designando con a_i l'ascissa di A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Però troveremo delle curve K possidenti un gruppo ciclico o abeliano a base due di trasformazioni, soltanto quando il gruppo dei punti A_i è trasformato in se stesso da un gruppo ciclico di proiettività. Il caso 8), del gruppo trirettangolo, per il nostro scopo dovrà essere scartato.

Passiamo ad analizzare i singoli casi.

1) Se i sei punti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, sono generici, di guisa che non ammettano alcuna trasformazione proiettiva in sè; sulla curva K, che ad essi risponde, il gruppo Γ_n è costituito solo dall'identità e dalla trasformazione involutoria che associa i punti coniugati nella g_2^1 canonica: siamo quindi nel caso (1), in cui $n = 2$, $t = 6$, $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 2$.

2) Se le tre coppie (A_1, A_2), (A_3, A_4), (A_5, A_6), sono costituite da punti coniugati in una stessa involuzione π, sulla K nasce un gruppo del quarto ordine, Γ_4, abeliano a base due, di trasformazioni involutorie della curva in sè, il quale è in isomorfismo diedrico con il gruppo costituito dalla π e dal suo quadrato. Il gruppo Γ_4 genera una serie lineare g_4^1 composta con la g_2^1 che ha cinque gruppi costituiti ciascuno da due punti doppi, in corrispondenza ai due punti uniti dell'involuzione π, e alle tre coppie (A_1, A_2), (A_3, A_4), (A_5, A_6). Si ritrova così il caso (II): $n = 4$, $t = 5$, $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 2$.

3) Se invece l'involuzione π ha i punti $A_1 . A_2$ come doppi mentre in essa si corrispondono A_3, A_4 e A_5, A_6 sulla K nasce un gruppo ciclico del quarto ordine Γ_4. Se diamo all'equazione di π la forma:

$$x' = -x ,$$

e designamo con $+1$, -1, k, $-k$, le ascisse dei punti A_3, A_4, A_5, A_6, l'equazione di K si scrive:

$$y^2 = x(x^2 - 1)(x^2 - k^2),$$

e le trasformazioni che costituiscono il gruppo Γ_4 sono rappresentate da:

$$\begin{aligned}
\omega &= [P(x, y), P'(-x, iy)] \\
\omega^2 &= [P(x, y), P'(x, -y)] \\
\omega^3 &= [P(x, y), P'(-x, -iy)] \\
\omega^4 &= 1 .
\end{aligned}$$

Il gruppo Γ_4 genera una serie lineare g_4^1 (composta con la g_2^1) che possiede due punti quadrupli che rispondono ai due punti A_1, A_2, e due gruppi costituiti ciascuno da due punti doppi in relazione alle coppie (A_3, A_4) e (A_5, A_6). Si ha dunque il caso (IV): $n = 4$, $t = 4$, $s_1 = s_2 = 2$, $s_3 = s_4 = 4$.

4) Supponiamo che le terne (A_1, A_2, A_3) e (A_4, A_5, A_6) siano due cicli di una stessa proiettività ciclica del terzo ordine π. Allora sulla K si ha un gruppo ciclico del sesto ordine, Γ_6, di trasformazioni della curva in sè, il quale è in isomorfismo diedrico col gruppo costituito da π e dalle sue potenze. Il gruppo Γ_6 genera una g_6^1 (composta con la g_2^1), dotata di due gruppi costituiti da tre punti doppi che rispondono alle due terne (A_1, A_2, A_3), (A_4, A_5, A_6), e di due gruppi formati ciascuno da due punti tripli relativi ai due punti uniti della π. Si ha così il caso (III): $n = 6$, $t = 4$, $s_1 = s_2 = 2$, $s_3 = s_4 = 3$.

Il gruppo Γ_6 possiede un sottogruppo Γ_3, ciclico del terzo ordine in isomorfismo oloedrico con $(\pi, \pi^2, \pi^3 = 1)$, il quale genera sulla K una g_3^1, con quattro punti tripli, che nascono dai due punti doppi della π. Ciò porta al caso (V): $n = 3$, $t = 4$, $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 3$.

5) I punti A_1 e A_2 siano uniti in una proiettività ciclica del quarto ordine, π, della quale A_3, A_4, A_5 e A_6 costituiscano un ciclo. Sulla K esiste allora un gruppo ciclico dell'ottavo ordine Γ_8, in isomorfismo diedrico col gruppo costituito dalla π e dalle sue potenze. I cicli di Γ_8 costituiscono una serie lineare g_8^1 (composta con la g_2^1), dotata di due pnnti di molteplicità otto (che rispondono ad A_1 e A_2), e di un gruppo costituito da quattro punti doppi (che proviene dal ciclo A_3, A_4, A_5, A_6, di π). Si ha pertanto il caso (VIII): $n = 8$, $t = 3$, $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 8$.

Il gruppo Γ_8 possiede un sottogruppo ciclico del quarto ordine, che riporta al caso (IV) già incontrato in 3).

6) Sia π una proiettività ciclica del quinto ordine, che abbia in A_1 un punto unito, e della quale i punti A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 costituiscano un ciclo. Ad essa corrisponde una curva K che ammette un gruppo ciclico del decimo ordine, Γ_{10}, di trasformazioni in sè, che è in isomorfismo diedrico col gruppo delle potenze di π. Il gruppo Γ_{10} genera sulla K una serie lineare g_{10}^1 (composta con la g_2^1), dotata di un punto di molteplicità dieci (rispondente ad A_1), di un gruppo costituito da due punti quintupli (che nasce in corrispondenza al secondo punto unito della π), e di un gruppo formato di cinque punti doppi (proveniente dal ciclo A_2, A_3, A_4, A_5, A_6). Si realizza in tal modo il caso (IX): $n = 10$, $t = 3$, $s_1 = 2$, $s_2 = 5$, $s_3 = 10$.

Il gruppo Γ_{10} ammette un sottogruppo Γ_5, ciclico del quinto ordine, che è in isomorfismo oloedrico col gruppo delle potenze della π, e che genera una g_5^1, la quale possiede tre punti quintupli (uno in corrispondenza al punto A_1, e gli altri due in corrispondenza al rimanente punto unito della proiettività π). Si ha cioè il caso (VI): $n = 5$, $t = 3$, $s_1 = s_2 = s_3 = 5$.

Queste conclusioni si verificano subito per via analitica. Se l'equazione della proiettività π si scrive:

$$x' = \varepsilon x \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right),$$

e si prendono $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, rispettivamente, nei punti di ascissa ∞, 1, ε, ε^2, ε^3, ε^4, la curva K è data da:

$$y^2 = x^5 - 1,$$

e il gruppo Γ_{10} è costituito dalla trasformazione ciclica del decimo ordine:

$$\omega = [P(x, y), \; P'(\varepsilon x, -y)],$$

e dalle sue potenze; mentre Γ_5 è formato da:

$$\omega^2, \omega^4, \omega^6, \omega^8, \omega^{10} = 1.$$

7) I sei punti A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) costituiscano un ciclo di una proiettività ciclica del sesto ordine, π:

$$x' = \varepsilon x \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{6}}\right).$$

L' equazione della curva K si può allora scrivere:

$$y^2 = x^6 - 1,$$

e sopra la K si ha un gruppo di trasformazioni Γ_{12}, del dodicesimo ordine, che è in isomorfismo diedrico col gruppo delle potenze di π. Precisamente Γ_{12} è rappresentato da:

$$\omega = [P(x, y), \; P'(\varepsilon x, y)],$$

$$\omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6 = 1;$$

$$\omega_0 = [P(x, y), \; P'(x, -y)],$$

$$\omega_0 \omega = \omega \omega_0, \quad \omega_0 \omega^2 = \omega^2 \omega_0, \quad \omega_0 \omega^3 = \omega^3 \omega_0,$$

$$\omega_0 \omega^4 = \omega^4 \omega_0, \quad \omega_0 \omega^5 = \omega^5 \omega_0.$$

Si tratta dunque di un *gruppo abeliano a base due*; siamo cioè ancora nelle condizioni richieste dal nostro problema. Il gruppo Γ_{12} genera una serie lineare g^1_{12}, del dodicesimo ordine (composta con la g^1_2), che possiede due gruppi costituiti ciascuno da due punti sestupli (rispondenti ai punti doppi della π), e un gruppo costituito da sei punti doppi (in relazione al ciclo A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 della π). Si perviene così al caso (X) : $n = 12$, $t = 3$, $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 6$.

Il gruppo Γ_{12} contiene un sottogruppo ciclico del sesto ordine (costituito dalle potenze di $\omega^2 \omega_0$), in isomorfismo diedrico col gruppo

$$\pi^2,\ \pi^4,\ \pi^6 = 1,$$

per il quale si ripetono le circostanze incontrate in 4).

A un caso nuovo portano invece i sottogruppi di Γ_{12}, ciclici del sesto ordine, in isomorfismo oloedrico col gruppo delle potenze di π. Essi sono due: l' uno costituito dalla potenze di ω, e l' altro dalle potenze di $\omega\omega_0$. Poichè, per il nostro scopo, essi presentano le stesse circostanze, limitiamoci ad analizzarne uno: per esempio, il primo. Esso genera una serie lineare g_6^1, che possiede due punti sestupli in corrispondenza al punto unito $x = 0$ della π, mentre il punto unito $x = \infty$ dà luogo ad un gruppo della g_6^1 costituito da due punti tripli. Per rendersi conto di quest' ultimo fatto, conviene assoggettare la K alla trasformazione birazionale:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{X} \\ y = \dfrac{Y}{X^3} \end{cases}$$

che cambia la K nella curva K^* di equazione:

$$Y^2 = 1 - X^6,$$

mentre la trasformazione ω della K in sè, si muta sulla K^* nella trasformazione

$$\omega^* = [P^*(X,\ Y),\quad P_1^*(-\varepsilon^2 X,\ -Y)],$$

la quale, con le sue potenze, genera sulla K^* una serie lineare del sesto ordine che in corrispondenza al punto $X = 0$ (trasformato di $x = \infty$) possiede effettivamente un gruppo dotato di due punti tripli.

Si conclude che il gruppo delle potenze di ω, porta al caso (VII): $n = 6$, $t = 3$, $s_1 = 3$, $s_2 = s_3 = 6$.

8) Consideriamo infine il caso in cui il gruppo dei sei punti A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) sia trasformato in sè da un gruppo trirettangolo di proiettività involutorie: verificheremo che, come si è accennato, ad esso non corrisponde un gruppo abeliano di trasformazioni sulla curva K, e quindi non interessa per la nostra ricerca.

Il gruppo trirettangolo suddetto, è costituito dall'identità e dalle tre involuzioni:

$$\pi = (A_1, A_1)(A_2, A_3)(A_3, A_4) A_5, A_6),$$

$$\pi_1 = (A_1, A_2)(A_3, A_5)(A_4, A_6),$$

$$\pi_2 = (A_1, A_2)(A_3, A_6)(A_4, A_5),$$

le quali si rappresentano, rispettivamente, con le equazioni:

$$x' = -x, \quad x' = \frac{h}{x}, \quad x' = -\frac{h}{x},$$

prendendo i punti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, ordinatamente nei punti di ascissa $0, \infty, 1, -1, h, -h$.

In tal modo l'equazione della curva K rappresentata doppiamente sull'asse delle ascisse con i sei punti di diramazione A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), si può scrivere:

$$y^2 = x\,[x^4 - (1 + h^2)\,x^2 + h^2].$$

Sulla K si ha un gruppo Γ_8, dell'ottavo ordine, di trasformazioni birazionali della curva in sè, il quale è in isomorfismo diedrico col gruppo (π, π_1, π_2, 1), ed è costituito dalle trasformazioni:

$$
\begin{aligned}
\omega &= [P(x,\ y),\ P'(-x,\ i\,y)]\,, \\
\omega^2 &= [P(x,\ y),\ P'(x,\ -y)]\,, \\
\omega^3 &= [P(x,\ y),\ P'(-x,\ -i\,y)]\,, \\
\omega_4 &= 1\,, \\
\omega_0 &= \left[P(x,\ y),\ P'\left(\frac{h}{x},\ h\sqrt{h}\,\frac{y}{x^3}\right)\right], \\
\omega\,\omega_0 = \omega_0\,\omega^3 &= \left[P(x,\ x),\ P'\left(-\frac{h}{x},\ i\,h\sqrt{h}\,\frac{y}{x^3}\right)\right], \\
\omega^2\,\omega_0 = \omega_0\,\omega^2 &= \left[P(x,\ y),\ P'\left(\frac{h}{x},\ -h\sqrt{h}\,\frac{y}{x^3}\right)\right], \\
\omega^3\,\omega_0 = \omega_0\,\omega &= \left[P(x,\ y),\ P'\left(-\frac{h}{x},\ -i\,h\sqrt{h}\,\frac{y}{x^3}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Si tratta quindi di un gruppo *non abeliano* ([16]).

Il sottogruppo di Γ_8 :

$$\omega\,,\ \omega^2\,,\ \omega^3\,,\ \omega^4 = 1\,,$$

riporta alle circostanze già studiate in 2).

Riepiloghiamo i risultati a cui siamo pervenuti. Sia data una curva K, di genere due, che possegga un gruppo finito, ciclico o abeliano a base due, di trasformazioni in sè; se si rappresenta la K sopra una retta doppia, si ha un gruppo di sei punti di diramazione, che è trasformato in sè da un gruppo finito, ciclico o abeliano (a base due), di proiettività. Ma se, viceversa, si parte da un gruppo di sei punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, sopra una retta, il quale sia trasformato in sè da un gruppo finito di proiettività, ciclico o abeliano (a base due), non sempre si giunge ad una K sulla quale esista un gruppo di trasformazioni ciclico o abeliano a base due. Precisamente degli otto casi che possono presentarsi per i punti A_i, e che

([16]) Anche codesto Γ_8 genera sulla K relativa una serie lineare, g^1_8, chè però possiede un gruppo costituito da due punti quadrupli e tre gruppi formati ciascuno da quattro punti doppi.

abbiano elencato nel § 3, solo quelli che rispondono a gruppi ciclici portano a curve K soddisfacenti ai requisiti suddetti: il caso 8) del gruppo trirettangolo si deve escludere.

Se poi confrontiamo queste conclusioni con quelle a cui siamo giunti nel § 2, si ha che degli undici casi che allora apparivano come aritmeticamente possibili per le superficie F, soltanto dieci si ritrovano dal nuovo punto di vista in cui ora ci siamo posti, e quindi solo questi corrispondono a superficie F che hanno una effettiva esistenza. Il caso ($\mathrm{VIII}^{\mathrm{bis}}$), nel quale è $n=8$, $t=3$, $s_1=s_2=s_3=4$, non trova rispondenza in una superficie F realmente esistente. Invero una curva K di una tale F, dovrebbe possedere un gruppo Γ_8, dell'ottavo ordine di trasformazioni in sè, e quindi, rappresentata sulla retta doppia, darebbe luogo ad un gruppo di sei punti di diramazione, trasformato in sè da un gruppo del quarto ordine di proiettività (in isomorfismo diedrico con Γ_8): cioè si dovrebbe cadere in 5) o in 8), mentre dall'analisi diretta di questi casi si è visto che nessuno dei due porta al tipo ($\mathrm{VIII}^{\mathrm{bis}}$).

5. - I DIECI TIPI DI SUPERFICIE ELLITTICHE ($p_a=-1$, $p_g=0$) CON UN FASCIO DI CURVE DI GENERE DUE, E UN FASCIO LINEARE DI CURVE ELLITTICHE.

Abbiamo ormai gli elementi necessari per giungere alla effettiva determinazione dei dieci tipi - di cui si è provata l'esistenza - di superficie ellittiche, F, con i caratteri

$$p_a=-1, \quad p_g=0,$$

dotate di un fascio ellittico di curve di genere due. Già si è ricordato come una siffatta superficie F si possa rappresentare sopra un cilindro ellittico multiplo: sarà ricorrendo a tale rappresentazione che perverremo a scrivere le equazioni dei diversi tipi di superficie F.

a) *Determinante* $n=2$. La superficie F [che presenta i caratteri aritmetici (1)] si rappresenta doppiamente sopra il cilindro cubico ellittico

$$f(x, y)=0,$$

con curva di diramazione costituita da sei sezioni:

$$z = a_1,\ z = a_2,\ z = a_3,\ z = a_4,\ z = a_5,\ z = a_6,$$

che rispondono ai punti doppi delle g_2^1 segate dal fascio lineare delle C - omologhe delle $z = \text{cost.}$ - sopra le curve K, di genere due, corrispondenti alle generatrici k del cilindro doppio.

Se prendiamo per la F un modello appartenente ad uno spazio a quattro dimensioni, e designamo con (x, y, z, u) le coordinate di un suo punto, si può riguardare il cilindro doppio $f(x, y) = 0$ come proiezione della F dal punto improprio dell'asse delle u, nello spazio ordinario. Allora, poichè i due punti di F che rispondono ad uno stesso punto (x, y, z) del cilindro f costituiscono una coppia coniugata in una trasformazione ciclica del secondo ordine, le loro coordinate u si potranno assumere eguali a:

$$\text{(A)} \quad u = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)(z-a_5)(z-a_6)\cdot\varphi(x, y)}$$

$$[f(x, y) = 0],$$

essendo

$$\varphi(x, y) = 0$$

un cilindro, per esempio del secondo ordine (non degenere in un piano contato due volte), tangente lungo tre generatrici al cilindro cubico $f(x, y) = 0$ (17).

Viceversa è chiaro che la (A) rappresenta effettivamente una superficie ellittica F, con un fascio ellittico (K) di curve di genere due. Invero per ogni coppia di valori di x, y la (A) dà una curva K, omologa di una generatrice k del cilindro f, tale che ai punti di k corrispondono sulla K le coppie di una g_2^1, dotata di sei punti doppi, corrispondenti a

$$z = a_1,\ z = a_2,\ z = a_3,\ z = a_4,\ z = a_5,\ z = a_6.$$

(17) Cfr. F. Enriques, loco cit. (2), n. 1.

Così si ha intanto sulla F un fascio ellittico di curve K di genere due. Invece se nella (A) riguardiamo la z come costante, si ottiene una curva ellittica C, rappresentata doppiamente senza punti di diramazione sulla sezione $z = \text{cost.}$ del cilindro f [18]. Al variare di z la C descrive un fascio lineare di curve bisecanti le K e che risultano irriducibili per la supposta irriducibilità del cilindro $\varphi(x, y) = 0$.

b) Determinante $n = 3$ (*caso ciclico*). Questo caso [che risponde ai caratteri aritmetici (V)] è del tutto analogo al precedente: la F si rappresenta ciclicamente sopra un cilindro triplo cubico ellittico

$$f(x, y) = 0,$$

con curva di diramazione costituita da quattro sezioni

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad z = a_3, \quad z = a_4,$$

alle quali corrispondono sulla F le quattro curve C (ridotte ciascuna ad una sola componente tripla unisecante le K) che determinano sulla K i punti tripli della g_3^1 ciclica segata dal fascio $|C|$ [19].

Pertanto la F si potrà rappresentare con le equazioni:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} u = \sqrt[3]{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)^2 (z - a_4)^2 \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y) = 0, \end{cases}$$

designando

$$\varphi(x, y) = 0$$

un cilindro, per esempio cubico, che tocchi - con contatto tripunto - il cilindro f lungo tre generatrici non complanari.

[18] Cfr. p. es. F. Enriques e O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Vol. III, libro V, cap. IV, § 38 (Bologna, 1924), e per la bibliografia la « *Notizia* » al termine del § 38 stesso.

[19] Cfr. § 4, 4).

A posteriori si verifica subito che la (B) porta effettivamente ad una superficie ellittica dotata di un fascio ellittico di curve di genere due, e di un fascio lineare di curve ellittiche (irriducibili), che segano sopra le prime una g_2^1 ciclica.

c) Determinante $n=4$: *caso ciclico* ([20]). Si perviene ad un cilindro cubico ellittico

$$f(x, y)=0,$$

quadruplo, ciclico, con curva di diramazione costituita ancora da quattro sezioni perpendicolari alle generatrici:

$$z=a_1, \quad z=a_2, \quad z=a_3, \quad z=a_4,$$

delle quali le prime due si debbono riguardare come curve di diramazione di ordine due ($s_1=s_2=2$), e le seconde come curve di diramazione del quarto ordine ($s_3=s_4=4$). Alle prime rispondono sulla F due curve C formate ciascuna da una componente doppia bisecante le K in punti doppi per la g_4^1 segnata sulle K dal fascio $|C|$; mentre le altre due dànno curve C costituite da una componente quadrupla che incontra le K in un punto quadruplo per la g_4^1.

Allora la F si lascia rappresentare con:

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} u=\sqrt[4]{(z-a_1)^2(z-a_2)^2(z-a_3)(z-a_4)^3\cdot\varphi(x, y)} \\ f(x, y)=0. \end{cases}$$

deve il polinomio $\varphi(x, y)$ eguagliato a zero rappresenta un cilindro del quarto ordine che tocca il cilindro f, con contatto quadripunto, lungo tre generatrici non complanari nè appartenenti ad un cilindro conico tangente lungo di esse al cilindro f. La quale condizione si richiede affinchè le sezioni $z=$ cost. del cilindro f non siano immagini di curve spezzate.

d) Determinante $n=4$: *Caso abeliano*. Come si è

([20]) Cfr. § 4, 3).

visto ([21]), sopra la superficie F, il fascio lineare $|C|$ sega sulle curve K una serie lineare g_4^1, generata da un gruppo del quarto ordine, Γ_4, di trasformazioni della F in sè, il quale è abeliano a base due. La g_4^1 possiede cinque gruppi costituiti ciascuno da due punti doppi, cosicchè la F si può rappresentare, con molteplicità quattro, sopra un cilindro cubico ellittico

$$f(x, y) = 0,$$

la cui curva di diramazione è costituita da cinque sezioni piane normali alle generatrici. Poichè queste, come vedremo, non entrano simmetricamente nelle equazioni della F, converrà indicarle in modo opportuno. Nelle ipotesi del caso che stiamo trattando, sopra una K la g_2^1 possiede sei punti doppi che si distribuiscono in tre coppie di punti coniugati

$$(A_1, A_2), \quad (A_3, A_4), \quad (A_5, A_6),$$

in una involuzione π che trasforma in sè la totalità delle coppie della g_2^1 stessa; allora i punti doppi della g_4^1, generata da Γ_4, nascono come segue:

1) In corrispondenza ai due punti doppi della π, il gruppo Γ_4 dà luogo a due gruppi della g_4^1 costituiti da due punti doppi, e quindi segati sulla K da due certe curve C spezzate in una componente doppia bisecante le K. A codeste curve C corrispondono, sul cilindro quadruplo, due componenti

$$z = p, \quad z = q,$$

della curva di diramazione.

2) Le tre coppie (A_1, A_2), (A_3, A_4), (A_5, A_6), portano ciascuna ad un gruppo della g_4^1 pure costituito da due punti doppi. Si hanno così le altre tre componenti

$$z = m_1, \quad z = m_2, \quad z = m_3,$$

della curva di diramazione del cilindro quadruplo.

([21]) Cfr. § 4, 2).

Precisati questi elementi, per giungere a scrivere le equazioni della F, conviene cominciare col determinare quella della curva K rappresentata quadruplamente sopra una generatrice k del cilindro. Sopra una K il gruppo Γ_4 (in isomorfismo diedrico con π e $\pi^2 = 1$) è formato dall' identità e da:

1) la trasformazione involutoria ω, costituita dalla g_2^1, dotata dei sei punti doppi A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, e che nell'isomorfismo diedrico fra Γ_4 e il gruppo $(\pi, \pi^2 = 1)$, proviene dalla π. Le coppie di punti coniugati nella ω' costituiscono sulla K una involuzione ellittica dotata di due punti doppi P, P', coniugati nella g_2^1 e che rispondono ad un punto doppio della π, mentre l' altro punto doppio di questa dà una coppia (Q, Q') coniugata nella ω' (e nella $\omega = g_2^1$). Inoltre nella ω' si corrispondono i punti A_1 e A_2, A_3 e A_4, A_5 e A_6.

3) la trasformazione involutoria prodotto delle due precedenti (fra loro permutabili), la quale genera pure un' involuzione ellittica che ha due punti doppi in Q e Q', e in cui sono coniugati i punti delle coppie (P, P'), (A_1, A_2), (A_3, A_4), $A_5, A_6)$.

Allora la nostra curva K - definita a meno di trasformazioni birazionali - si costruisce prendendo:

$$u = \sqrt{\varphi \cdot (z-p)(z-q)} + \sqrt{\psi \cdot (z-p)(z-m_1)(z-m_2)(z-m_3)}\,,$$

dove φ e ψ designano delle costanti.

Ciò è d' accordo con la teoria generale delle equazioni abeliane che insegna appunto a risolvere mediante radicali non sovrapposti le equazioni con *gruppo* abeliano non ciclico ([22]) : ma si giustifica *a posteriori* direttamente, osservando che la K così costruita è in effetto una curva di genere due, sulla quale si ha un gruppo abeliano Γ_4 generato da due trasformazioni involutorie permutabili. Indicando con u_1 una delle determinazioni del primo radicale che comparisce nella espressione di u, e con u_2 una determinazione del secondo, numeriamo i quattro rami della funzione u come segue:

([22]) Cfr., p. es., L. Bianchi, op. cit. ([15]), cap. IV, § 76.

$$1)\qquad u_1+u_2,$$
$$2)\qquad u_1-u_2,$$
$$3)\qquad -u_1+u_2,$$
$$4)\qquad -u_1-u_2.$$

Così in corrispondenza alla diramazione $z=p$ nasce la sostituzione involutoria:

$$\omega=(1,\ 4)\ (2,\ 3)\ ;$$

invece la diramazione $z=q$ dà:

$$\omega'=(1,\ 3)\ (2,\ 4)\ ;$$

e la $z=m_1$ (o $z=m_2$, o $z=m_3$) porta alla sostituzione:

$$\omega\omega'=\omega'\omega=(1,\ 2)\ (3,\ 4)\ .$$

Si aggiunga che le sostituzioni ora definite sopra i rami di u nell' intorno di un punto di diramazione, si estendono in trasformazioni birazionali, pure cicliche del secondo ordine, fra i punti della curva K: infatti si ha:

$$u_1-u_2=\frac{\varphi\cdot(z-p)\,(z-q)-\psi\cdot(z-p)\,(z-m_1)\,(z-m_2)\,(z-m_3)}{u_1+u_2}$$

$$-u_1+u_2=\frac{\psi\cdot(z-p)\,(z-m_1)\,(z-m_2)\,(z-m_3)-\varphi\cdot(z-p)\,(z-q)}{u_1+u_2}$$

$$-u_1-u_2=-(u_1+u_2)\,.$$

Si aggiunga che la nostra curva K ha il genere due, poichè sopra di essa ai punti della retta quadrupla k corrispondono i gruppi di una serie lineare g_4^1 dotata di dieci punti doppi: e ciò è d'accordo col fatto che l'equazione in u e z, dianzi scritta, rappresenta una quartica piana con un punto doppio in $(p,\ 0)$.

Dall'equazione della curva K rappresentata quadruplamente sulla generatrice del cilindro f, si passa a quella della superficie

F ponendo ([23]):

$$(D)\quad \begin{cases} u = \sqrt{(z-p)(z-q)\cdot\varphi(x,y)} + \\ \qquad + \sqrt{(z-p)(z-m_1)(z-m_2)(z-m_3)\cdot\psi(x,y)} \\ f(x,y) = 0, \end{cases}$$

dove

$$\varphi(x,y) = 0, \qquad \psi(x,y) = 0,$$

sono le equazioni di due cilindri, per esempio, quadrici, toccanti f ciascuno secondo tre generatrici, non complanari (che costituiscano gruppi disequivalenti).

e) Determinante $n = 5$ *(caso ciclico)* ([24]). La F - definita a meno di una trasformazione birazionale - è rappresentata dall'equazione:

$$(E)\quad \begin{cases} u = \sqrt[5]{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)^3\cdot\varphi(x,y)} \\ f(x,y) = 0, \end{cases}$$

dove

$$\varphi(x,y) = 0$$

è l'equazione di un cilindro, per esempio del quinto ordine, che tocca il cilindro f luogo tre generatrici (non complanari), con contatto pentapunto.

Insieme a questa avremo poi la superficie analoga:

$$\begin{cases} u = \sqrt[5]{(z-a_1)^4(z-a_2)^4(z-a_3)^2\cdot\varphi(x,y)} \\ f(x,y) = 0, \end{cases}$$

relativa alle sostituzioni inverse, rispetto alle componenti la curva di diramazione del cilindro quintuplo.

([23]) Cfr. F. Enriques, memoria cit. ([1]), § 6; ed anche O. Chisini, loc. cit. ([8]). Si veda pure Enriques–Chisini, op. cit. ([18]), vol. III, libro V, cap. IV, § 29.

([24]) Cfr. § 4, 6.

Si avranno inoltre le superficie:

$$\begin{cases} u = \sqrt[5]{(z-a_1)^2 (z-a_2)^2 (z-a_3) \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \sqrt[5]{(z-a_1)^3 (z-a_2)^3 (z-a_3)^4 \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y = 0, \end{cases}$$

che corrispondono, rispettivamente, al quadrato e al cubo di quelle sostituzioni.

f) Determinante $n = 6$ *(tipo ciclico)*. Si sono incontrate due diverse famiglie di superficie F con determinante uguale a sei, ambedue di tipo ciclico. Quelle della prima famiglia ([25]) si rappresentano con molteplicità sei, sopra un cilindro cubico ellittico

$$f(x, y) = 0$$

la cui curva di diramazione è composta da quattro sezioni piane perpendicolari alle generatrici:

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad z = a_3, \quad z = a_4,$$

due delle quali hanno la molteplicità di diramazione uguale a due ($s_1 = s_2 = 2$), e le due rimanenti uguale a tre ($s_3 = s_4 = 3$).

Allora la F - definita a meno di trasformazioni birazionali - ha un' equazione della forma:

$$(\mathrm{F}_1) \begin{cases} u = \sqrt[6]{(z-a_1)^3 (z-a_2)^3 (z-a_3)^2 (z-a_4)^4 \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

designando, al solito con

$$\varphi(x, y) = 0$$

un cilindro del sesto ordine che tocca il cilindro f, con contatto

([25]) Cfr. § 4, 4).

sestuplo, lungo tre generatrici, non complanari e non appartenenti ad un cilindro quadrico o cubico tangente lungo di esse a f, rispettivamente con contatto del primo o del secondo ordine.

Supponiamo invece ([26]) che la F sia rappresentabile sopra il cilindro sestuplo f, con curva di diramazione composta da tre sezioni

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad z = a_3,$$

la prima delle quali risponda ad una curva C costituita da una componente tripla bisecante le K $(s_1 = 3)$, e le altre abbiano per omologhe delle curve C spezzate ciascuna in un' unica componente sestupla che incontri le K in un sol punto $(s_2 = s_3 = 6)$.

In tal caso la F ha un' equazione della forma:

$$(\mathrm{F}_2) \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt[6]{(z-a_1)^2 (z-a_2)^5 (z-a_3)^5 \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y) = 0, \end{array} \right.$$

oppure:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt[6]{(z-a_1)^4 (z-a_2) (z-a_3) \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y) = 0, \end{array} \right.$$

dove

$$\varphi(x, y) = 0$$

ha lo stesso significato che in (F_1).

g) *Determinante* $n = 8$ *(caso ciclico)*. Sul cilindro cubico ellittico

$$f(x, y) = 0,$$

multiplo secondo il numero otto, si hanno tre sezioni di diramazione:

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad z = a_3,$$

una delle quali corrisponderà alla quaterna di punti doppi $(s_1 = 2)$

([26]) Cfr. § 4, 7).

della g_6^1 segata dal fascio delle $|C|$ sopra una K; e le altre ai due punti ottupli della g_6^1 stessa $(s_2 = s_6 = 7)$ ([27]).

Si ha così la superficie del tipo richiesto ponendo:

$$(G) \begin{cases} u = \sqrt[8]{(z-a_1)^4 (z-a_2)^3 (z-a_3) \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y) = 0, \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} u = \sqrt[8]{(z-a_1)^4 (z-a_2)^5 (z-a_3)^7 \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y) = 0, \end{cases}$$

essendo

$$\varphi(x, y) = 0$$

l'equazione di un cilindro dell'ottavo ordine, che tocca il cilindro cubico ellittico f lungo tre generatrici con contatto di moltiplicità otto, e con la solita condizione che codeste tre generatrici non appartengano ad un piano nè ad un cilindro d'ordine due o quattro che incontri f solo lungo di esse, con conveniente contatto.

h) Determinante $n = 10$ (caso ciclico). Sul cilindro f si hanno ancora tre sezioni rette di diramazione, una delle quali, $z = a_1$, corrisponderà ai cinque punti doppi della serie lineare g_{10}^1 segata dal fascio $|C|$ sopra una K $(s_1 = 2)$; la seconda, $z = a_2$, alla coppia dei punti quintupli della g_{10}^1 stessa $(s_3 = 10)$ ([28]).

La F avrà allora un'equazione del tipo:

$$(H) \begin{cases} u = \sqrt[10]{(z-a_1)^5 (z-a_2)^4 (z-a_3) \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y) = 0, \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} u = \sqrt[10]{(z-a_1)^5 (z-a_2)^6 (z-a_3)^9 \cdot \varphi(x, y)} \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$$

([27]) Cfr. § 4, 5).
([28]) Cfr. § 4, 6).

Od anche:

$$\begin{cases} u = \sqrt[10]{(z-a_1)^5 (z-a_2)^2 (z-a_3)^3 \cdot \varphi(x,y)} \\ f(x,y) = 0, \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} u = \sqrt[10]{(z-a_1)^5 (z-a_2)^2 (z-a_3)^7 \cdot \varphi(x,y)} \\ f(x,y) = 0. \end{cases}$$

In ogni caso

$$\varphi(x,y) = 0$$

rappresenterà, al solito, un cilindro del decimo ordine che tocchi, con contatto 10-plo, il cilindro f lungo tre generatrici, non complanari nè appartenenti ad un cilindro del quinto ordine tangente lungo di esse a f, con contatto 5-plo.

i) Determinante $n = 12$ *(caso abeliano).* Sulla superficie F il fascio $|C|$ sega sopra ogni K una serie lineare g^1_{12} – generata da un gruppo abeliano a base due, Γ_{12} – la quale possiede un gruppo costituito da sei punti doppi, e due gruppi formati ciascuno da due punti sestupli ([29]): pertanto nel fascio $|C|$ si avrà una curva spezzata in una componente doppia che incontra le K in sei punti, e due curve costituite ciascuna da una componente sestupla bisecante le K stesse. Siano

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad z = a_3,$$

le tre sezioni del cilindro f che corrispondono a codeste C spezzate.

Allora la nostra superficie ellittica F si può avere ponendo, per esempio:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} u = \sqrt{(z-a_1)(z-a_3) \cdot \varphi(x,y)} + \sqrt[6]{(z-a_2)(z-a_3)^5 \cdot \psi(x,y)} \\ f(x,y) = 0, \end{cases}$$

([29]) Cfr. § 4, 7).

dove

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

rappresentano due cilindri, rispettivamente del secondo e del sesto ordine, il primo dei quali è tangente al cilindro f lungo tre generatrici, e il secondo tocca invece f ancora secondo tre generatrici, ma con contatto sei-punto (le tre generatrici di contatto non appartenendo ad un cilindro d'ordine divisore di sei, che incontri f soltanto lungo di esse con contatto multiplo).

Come verifica si osservi che la funzione u sopra scritta, in corrispondenza alle diramazioni

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad z = a_3,$$

presenta le sostituzioni:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (1,7)(2,8)(3,9)(4,10)(5,11)(6,12), \\ \omega &= (1,2,3,4,5,6)(7,8,9,10,11,12), \\ \omega_0\omega^5 &= (1,12,5,10,3,8)(2,7,6,11,4,9) \end{aligned}$$

avendo distinti i vari rami della u, con la numerazione seguente:

$$\begin{array}{rl}
1) & u_2 + u_6, \\
2) & u_2 + \varepsilon u_6, \\
3) & u_2 + \varepsilon^2 u_6, \\
4) & u_2 - u_6, \\
5) & u_2 - \varepsilon u_6, \\
6) & u_2 - \varepsilon^2 u_6, \\
7) & -u_2 + u_6, \\
8) & -u_2 + \varepsilon u_6, \\
9) & -u_2 + \varepsilon^2 u_6, \\
10) & -u_2 - u_6, \\
11) & -u_2 - \varepsilon u_6, \\
12) & -u_2 - \varepsilon^2 u_6,
\end{array}$$

dove si è posto:

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{6}},$$

e si è designata con u_2 una determinazione del radicale del secondo ordine che appare nella espressione di u, con u_6 una determinazione di quello del sesto.

La ω_0 e la ω generano fra i rami della u un gruppo di sostituzioni, del dodicesimo ordine, abeliano a base due, il quale si estende in un gruppo di trasformazioni birazionali, Γ_{12}, pure del dodicesimo ordine e abeliano a base due, tra i punti della curva K rappresentata dalla prima delle equazioni (I), quando la x e la y si riguardino come costanti. Per questo basta osservare che se in tale equazione si considera la z come un parametro variabile, l'equazione stessa risolta rispetto alla u ha dodici radici che sono funzioni razionali di una sola tra esse. Infatti per codesta equazione il *gruppo algebrico di* Galois coincide con il *gruppo di monodromia* della funzione $u(z)$ da essa definita ([30]), cioè col gruppo abeliano del dodicesimo ordine costituito dalle sostituzioni che già abbiamo visto prodursi intorno ai dodici rami della u. Ma è noto ([31]) che la condizione necessaria e sufficiente affinchè le radici di una equazione si possano esprimere razionalmente per una sola fra esse, è che il gruppo deldell'equazione sia transitivo ed abbia l'ordine e il grado eguali fra loro: condizioni che nel nostro caso sono soddisfatte.

Si aggiunga che la curva K risulta di genere due, come si può vedere direttamente, oppure dal computo dei punti multipli della g^1_{12} i cui gruppi rispondono ai punti della generatrice del cilindro f, sulla quale la K è rappresentata con la molteplicità dodici.

Al solito si può notare che la (I) che abbiamo scritto per rappresentare la superficie F nel nostro caso, corrisponde ad una scelta particolare delle sostituzioni sui rami della u in rapporto alle curve di diramazione del cilindro multiplo. Cambiando que-

([30]) Cfr., p. es., Bianchi, op. cit. ([15]), cap. VIII, § 107.

([31]) Cfr., p. es., E. Netto, *Teoria delle sostituzioni e sua applicazione all'algebra* (trad. G. Battaglini, Torino, 1885), cap. IX, § 153.

ste sostituzioni si ottengono altre superficie dello stesso titpo, birazionalmente distinte: trascurando quelle che rispondono a semplici scambi dei nomi delle curve di diramazione, scriviamo la

$$\begin{cases} u = \sqrt{(x-a_1)(x-a_3)\cdot\varphi(x,y)} + \sqrt[6]{(x-a_2)^5(x-a_3)\cdot\psi(x,y)} \\ f(x,y) = 0\,. \end{cases}$$

PARTE SECONDA

6. - La rappresentazione delle superficie F sopra una rigata ellittica doppia.

Data una delle nostre superficie ellittiche F, se riguardiamo le coppie della g_2^1 sopra le curve del fascio (K), come punti di una superficie, questa - possedendo un fascio ellittico di curve razionali - risulta birazionalmente identica ad una *rigata ellittica* Φ [32], sulla quale la F viene così a rappresentarsi doppiamente.

Attraverso codesta rappresentazione, basandoci sopra alcuni dei risultati precedenti, *perverremo ad una interessante ricostruzione dei dieci tipi di superficie* F, che abbiamo innanzi determinati.

Cominciamo con l'esaminare la curva J generata sopra la F dal gruppo dei sei punti doppi della g_2^1 canonica di una curva K, quando questa descrive il fascio ellittico (K). L'analisi svolta precedentemente consente di determinare con esattezza la costituzione della J: ma, rimandando a più tardi alcune ulteriori precisazioni, limitiamoci qui a rilevare che *a priori* si può senz'altro dire che *la curva J è ellittica*, e, *se spezzata*, *è composta*

[32] Cfr. Enriques, *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali* [« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, vol. 7 (1898_2), pp. 281–286]; *Sopra le superficie algebriche che posseggono un fascio di curve razionali* (ibid., pp. 344–347); *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali* [« Math. Annalen », Bd. 52 (1899), pp. 449–456)].

di parti ellittiche, prive di punti multipli e di mutue intersezioni.

Sopra la J (o sopra ogni sua parte, se la J è riducibile) il gruppo jacobiano della g_2^1 di K, quando la K varia nel fascio (K), genera una involuzione ellittica: basterà notare che questa è priva di coincidenze per dedurne che la J (o ogni sua componente) è ellittica. Ma sopra la K i sei punti uniti della g_2^1 sono certo tutti distinti: invero, due di questi non possono coincidere in un punto semplice della K, poichè si avrebbe l'assurdo di una coincidenza tripla per la g_2^1. Pertanto se sopra una K particolare coincidono due punti uniti nella g_2^1, nasce un punto doppio della K stessa: ma ciò contraddice al fatto che – come è noto ([33]) – le K sono tutte birazionalmente identiche, e quindi tutte dello stesso genere. Se ne deduce anche – come avevamo asserito – che la J è priva di punti doppi, e, se riducibile, le sue componenti non hanno punti comuni.

Passando a rappresentare la F sulla rigata ellittica Φ, la curva J dà luogo alla *curva di diramazione* D della Φ, la quale sarà pure *ellittica, o, se spezzata, sarà composta di parti ellittiche.*

Però – almeno fino a che non si assuma per la Φ un conveniente modello proiettivo – non si potrà dire che in generale la D sia priva di punti multipli, e che le sue componenti non abbiano connessioni. Invero, consideriamo i sei punti d'incontro della D con una generatrice k di Φ: dai birapporti delle quaterne di tali punti dipendono i *moduli* della K relativa, e quindi quei birapporti si conserveranno costanti al variare della k sulla Φ. Pertanto i sei punti di diramazione sulla k saranno sempre distinti fra loro, salvo, eventualmente, per particolari generatrici, sulle quali quei punti coincidano tutti e sei, o almeno cinque di essi (i predetti birapporti risultando in tal caso indeterminati). Ma la D può incontrare una generatrice k in punti non distinti, solo quando la k passi per un punto multiplo della D, dato che questa è ellittica (o composta di curve ellittiche), e quindi l'involuzione, pure ellittica, segata sopra di essa dalle generatrici è priva di coincidenze.

([33]) Cfr. F. Enriques, loco cit. (2), § 11, n. 8.

Osservazione I. – L'analisi svolta nel § 4, consente di precisare i vari casi di riducibilità che presenta la J sulla F, o la D sulla Φ, in corrispondenza ai diversi tipi di superficie F. Riprendendo la classificazione e le notazioni del § 4, si ha che nel caso 1) la D è evidentemente spezzata in sei unisecanti le generatrici; nel caso 2) invece è composta di tre bisecanti, poichè il gruppo dei sei punti di diramazione $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, sopra una generatrice k, si ordina secondo le tre *coppie di transitività* (A_1, A_2), (A_3, A_4), (A_5, A_6). Per analoghe ragioni nel caso 3) avremo una curva D costituita da due bisecanti e da due unisecanti le generatrici; in 4) due trisecanti; nell'ipotesi 5) una quadrisecante e due unisecanti; in 6) una unisecante e una pentasecante; infine nell'ipotesi 7) la D sarà irriducibile.

Si può aggiungere che *sulla F le componenti J sono tali che ciascuna di esse, contata con conveniente molteplicità, costituisce una curva del fascio lineare* $|C|$.

Infatti, sia I_2 l'involuzione che, sopra la superficie F, determinano le g_2^1 esistenti sulle curve del fascio (K). Se ciascuna C è trasformata in sè dalla I_2, cioè se la serie g_n^1 segata sopra una K dal fascio $|C|$, è composta con la g_2^1, ogni punto doppio di questa dà un punto multiplo della g_n^1. Ma un punto s-plo della g_n^1 è segato sulla K da una curva $C = sC_s$ costituita da una componente C_s contata s volte: quindi la C_s farà parte della J. Anzi dallo stesso studio innanzi fatto della g_n^1 [34], si ha che uno almeno dei punti doppi della g_2^1 è doppio anche per la g_n^1: ma se la g_n^1 possiede un punto doppio ne possiede necessariamente almeno

$$\frac{n}{2},$$

che cadono nei punti d'incontro della K con una curva $C = 2C_2$ costituita da una componente C_2 contata due volte. Cioè: *se le curve C sono unite nella I_2, una almeno delle componenti della J, contata due volte, costituisce una curva C.*

Passiamo al caso in cui le curve C si dispongono in coppie

[34] Cfr. i casi (I), (II), (III), (IV), (VIII), (IX), (X), del § 2.

di curve coniugate nella I_2 ([35]), nel quale la I_2 associa i gruppi della g_n^1 in coppie di una involuzione lineare. Allora un punto unito della g_2^1 è punto (semplice o multiplo) della g_n^1 che appartiene a uno dei due gruppi uniti nella involuzione predetta, quindi per esso passa una curva C o una curva C_s che contata s volte costituisce una C. Si aggiunga che $n (\leq 6)$ dei punti doppi della g_2^1 sono semplici per la g_n^1, e quindi sono segati sulla K da *una C che sarà parte della J.*

Osservazione II. – Possiamo completare con alcune considerazioni relative al caso del determinante $n = 2$, nel quale le C sono certo unite nella involuzione I_2. Sulla F la curva J è costituita da sei componenti unisecanti le K, ciascuna delle quali contata due volte dà luogo ad una curva del fascio $|C|$. Allora sulla rigata ellittica Φ la curva di diramazione risulta composta da sei curve unisecanti le generatrici k e appartenenti ad un medesimo fascio lineare, a cui risponde sulla F appunto il fascio $|C|$. Viceversa, si abbia una rigata ellittica doppia Φ con una curva di diramazione costituita da sei curve di un medesimo fascio lineare, che seghino ciascuna le generatrici in un solo punto: la Φ è immagine di una superficie ellittica F del tipo che è argomento del nostro studio, con determinante $n = 2$, purchè si aggiunga la condizione che alla curva generica del fascio cui appartengono le componenti la curva di diramazione, risponda sulla F una curva irriducibile (unita nella I_2).

7. – Di un particolare modello proiettivo della rigata ellittica Φ.

Si è visto ([36]) che in ogni caso *il gruppo Γ_n delle trasformazioni della curva K in sè, subordina una proietticità ciclica π entro l'ente razionale semplicemente infinito dei gruppi della g_2^1, la quale trasforma in sè il gruppo dei sei punti doppi della g_2^1 stessa.*

Se la π non è l'identità, la g_2^1 possiede due gruppi *uniti*

([35]) Casi (V), (VI), (VII), del § 2. Cfr. anche § 4, 4), 6), 7).
([36]) Cfr. § 3 e § 4.

nella π i quali, come è facile vedere, risultano separati in modo razionale l'uno dall'altro, e pertanto al variare della K sulla F descrivono due curve distinte A e B. Se uno, o ambedue, i predetti gruppi uniti nella π cadono in punti doppi della g_2^1, le corrispondenti curve A e B fanno parte della curva J dianzi definita.

Alle curve A e B corrisponderanno sulla rigata Φ due *direttrici*, α e β, che apparteranno alla curva di diramazione se lo stesso accade per la A e B rispetto alla J.

Poichè la π è ciclica, *la curva di diramazione D della Φ è suscettibile di una rappresentazione multipla con carattere ciclico, sulla sezione piana generica φ della Φ stessa.*

Precisamente, se della D non fanno parte le direttrici α, β, la D si rappresenta sulla φ con la molteplicità sei. Se invece una delle direttrici α e β appartiene alla D, la curva residua dà luogo ad una rappresentazione quintupla sulla φ; e infine se la D contiene α e la β, la parte restante verrà rappresentata sulla φ con la molteplicità quattro.

Questa osservazione consente di costruire un primo modello proiettivo della rigata Φ.

Consideriamo il cilindro, per esempio cubico ellittico, con le generatrici parallele all'asse delle z, rappresentato dall'equazione:

$$\varphi(x, y) = 0 . \tag{6}$$

E sopra di questo prendiamo la curva

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt[\mu]{\theta(x, y)} \\ \varphi(x, y) = 0 , \end{array} \right. \tag{7}$$

dove $\theta(x,y)$ designa un polinomio che uguagliato a zero rappresenta, sul piano $z = 0$, una curva θ d'ordine μ che tocca in tre punti, *con contatto μ-punto*, la cubica φ d'equazione:

$$\varphi(x, y) = 0 ,$$

ed è inoltre:

$$4 \leq \mu \leq 6 .$$

La (7), per ogni valore di μ, dà una curva rappresentata ciclicamente, con molteplicità μ e senza punti di diramazione, sulla cubica φ: i tre punti di contatto O_1, O_2, O_3, della φ con la θ costituiscono il *gruppo dei punti critici apparenti* della rappresentazione, e, a seconda della serie lineare a cui appartengono codesti tre punti, la (7) definisce curve birazionalmente distinte (Comessatti) ([37]). In particolare per $\mu = 6$, accanto a curve irriducibili seisecanti le generatrici del cilindro (6), la (7) darà curve spezzate in due trisecanti, o in tre bisecanti, od anche in sei unisecanti ([38]). Quest'ultimo caso che per il seguito conviene notare, si ha precisamente quando i tre punti O_1, O_2, O_3, sono in linea retta.

Se $\mu = 5$ la (7) rappresenta una curva irriducibile pentasecante le generatrici del cilindro, salvo il caso di allineamento dei punti O_1, O_2, O_3, che porta ancora ad una curva spezzata in cinque unisecanti le generatrici.

Se $\mu = 4$, avremo i casi della quadrisecante irriducibile e delle due bisecanti, oltre al solito spezzamento in sole unisecanti, che si ha sotto la stessa condizione per i punti di contatto della φ con la θ.

Si osservi, inoltre, che sopra una generatrice del cilindro (6), la proiettività π, ciclica d'ordine μ, che trasforma in sè il gruppo dei μ punti della curva (7), ha un punto unito sulla cubica φ e l'altro nel punto improprio della generatrice: pertanto sulla rigata (6) le direttrici α e β luogo di punti uniti nelle proiettività π relative alle singole generatrici, sono costituite l'una dalla cubica φ e l'altra dall'intorno del vertice (insieme alle tre generatrici che vanno ai punti O_1, O_2, O_3).

Riguardiamo ora la (6) come una superficie doppia, prendendo per curva di diramazione la (7), aumentata di una o di ambedue le direttrici α e β, se $\mu = 5$ o $\mu = 4$: avremo in tal modo una rigata doppia che offre tutte le caratteristiche della Φ immagine di una superficie F. Ma la rigata doppia così costi-

([37]) Cfr. loco cit. (18).

([38]) Cfr. Enriques–Chisini, loco cit. (18), « *Osservazione* » al termine del § 38.

tuita rappresenterà effettivamente una superficie ellittica F del nostro tipo?

Gli sviluppi che seguono ci consentiranno di rispondere in modo esauriente.

È interessante ed opportuno riferirci, invece che al cilindro (6), ad una sua trasformata birazionale costituita da una particolare rigata ellittica Φ_4, del quarto grado, anch'essa immersa nello spazio ordinario. Mostriamo come si ottenga codesta Φ_4.

Sul cilindro (6) consideriamo il sistema lineare di curve ellittiche:

$$|\varphi + k_1 + k_2|, \tag{8}$$

che si ottiene sommando al sistema $|\varphi|$ delle sezioni piane della (6) due generatrici, affatto generiche, k_1 e k_2. Tale sistema è di *grado* sette, e quindi ha la *dimensione* sei, poichè sopra una rigata ellittica la *serie caratteristica* di un sistema lineare presenta una *deficienza* uguale all'unità.

Le curve del sistema (8) che passano per i tre punti O_1, O_2, O_3, di contatto della cubica φ con la curva θ, costituiscono un sistema lineare $|\Gamma_5|$, di quarto grado, irriducibile e triplamente infinito, il quale - come è facile vedere ([39]) - *risulta semplice se i punti* O_1, O_2, O_3, *non sono allineati.*

([39]) Se designamo con k_3 la generatrice del cilindro (6) complanare con k_1 e k_2, il sistema $|\Gamma_5|$ è segato sul cilindro dalle quadriche W che passano per k_3 e per O_1, O_2, O_3. Supponiamo allora che la serie caratteristica g_4^2 del sistema $|\Gamma_5|$ sia composta con una involuzione (necessariamente lineare) g_2^1. Si consideri una generica Γ_5 e sopra di essa si prenda un punto pure generico P: nella nostra ipotesi, le ∞^2 quadriche W passanti per P, contengono un secondo punto Q, e quindi la retta PQ appartiene a tutte le quadriche W di un fascio $|W'|$. Ogni W' incontra il piano $x=0$ lungo una conica che passa per O_1, O_2, O_3, per la traccia della k_3 e per quella della PQ. *A priori* si presentano come possibili i casi seguenti:

1) i punti O_1, O_2, O_3, e le traccie delle due rette k_3 e PQ sul piano $x=0$, sono in posizione tale che per essi passano ∞^1 coniche;

oppure:

2) le quadriche del fascio $|W'|$ passano tutte per una stessa conica w'.

L'ipotesi 2) porta ad un assurdo. Invero nel fascio $|W'|$ esisterebbe una quadrica spezzata nel piano $x=0$, e in un piano per le rette PQ e k_3, Sotto tale ipotesi, il sistema $|\Gamma_5|$ ha per *immagine* una rigata ellittica Φ_4, del quarto grado nello spazio ordinario, sulla quale il sistema stesso è costituito dalle sezioni piane ([40]).

La Φ_4 è birazionalmente identica al cilindro (6), e le sue due rette doppie (che designeremo ancora con α e β) provengono dalle direttrici $\alpha\ (=\varphi)$ o β, dianzi messe in evidenza sopra il cilindro.

La curva (7), dell' ordine 3μ e μ-secante le generatrici, ha per corrispondente sulla Φ_4 una curva di ordine 2μ, ancora μ-secante le generatrici, come subito si vede tenendo presente che la (7) ha un punto μ-plo in ciascuno dei punti O_1, O_2, O_3, base per il sistema trasformante $|\Gamma_5|$ ([41]). Codesta trasformata

le quali pertanto risulterebbero incidenti. Ma allora tutte le ∞^2 quadriche W passanti per P (e quindi anche per Q) contengono la retta PQ, e passano per la w'. Ne segue che se L_1 e L_2 sono i punti d' incontro della Γ_5 col piano $z=0$, diversi da O_1, O_2, O_3, quelle ∞^2 quadriche segano tutte la Γ_5 nei punti P, Q, L_1 ed L_2: e quindi se ne hanno ∞^1 che contengono la Γ_5 stessa (irriducibile perchè generica di $|\Gamma_5|$), il che è assurdo.

Dunque se la g_4^2 è composta con una g_2^1 si verificano le circostanze 1), nelle quali – data la genericità della k_i – i punti O_1, O_2, O_3, risultano allineati fra loro e con la traccia di PQ. Viceversa se i punti O_1, O_2, O_3, sono sopra una stessa retta, le quadriche W passanti per un punto generico P del cilindro, hanno in comune una generatrice uscente da P, e quindi la g_4^2 è composta con una g_2^1.

([40]) Cfr. F. Enriques, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. Campedelli, § 10, (Padova, 1932-X).

([41]) Portiamo il punto O_i $(i=1,2,3)$ nell' origine O delle coordinate, e seghiamo il cilindro (6) e la superficie

$$z=\sqrt[\mu]{\theta(x,y)},$$

con un piano generico per O:

$$z=ax+by.$$

Le due curve sezioni si proiettano sopra il piano $z=0$, parallelamente all' asse z, l' una nella cubica φ, e l' altra nella curva

$$(ax+by)^\mu=\theta(x,y),$$

che ha nell' origine O la stessa *parabola osculatrice* d' ordine $\mu-1$, della curva e quindi anche, per costruzione, della cubica φ. Ciò prova appunto che O è μ—plo per la (7).

della (7), da sola (se $\mu = 6$) oppure unitamente ad una od ambedue le rette doppie α, β (secondo che è $\mu = 5$ o $\mu = 4$), costituirà la *curva di diramazione* D *della* Φ_4. *La* D *è ellittica, o, se riducibile, è composta di parti ellittiche, le quali, essendo la* D *priva di punti multipli, non si intersecano fra loro.*

Gli spezzamenti che, come si è detto sopra, si possono presentare per la (7), portano per la D a tutti i casi di riducibilità che abbiamo previsto per la curva di diramazione della rigata ellittica immagine doppia di una delle nostre superficie F ([42]). L'eccezione che risponde all'allineamento dei punti O_1, O_2, O_3, contrario alla nostra ipotesi - nel quale la curva di diramazione sul cilindro (6) è costituita dalle sezioni con sei piani passanti per la retta $O_1 O_2 O_3$ – verrà analizzata fra breve.

Si designi con D_1 una delle componenti irriducibili della curva di diramazione D (diverse dalle direttrici α e β), e sia $m\,(\geq 2)$ il numero dei suoi punti d'incontro con le generatrici della Φ_4. La D_1 è dell'ordine $2m$, provenendo da una curva d'ordine $3m$ del cilindro (6), passante con la molteplicità m per i punti O_1, O_2, O_3. Ciò del resto, può dedursi anche direttamente dalla ben nota formula del SEGRE che, sopra una rigata ellittica, lega i caratteri di una curva la quale - come la D_1 – sia ellittica e priva di punti multipli ([43]).

La D_1 non si appoggia alle due rette doppie α e β, e quindi appartiene ad un *fascio lineare* $|D_1|$, il quale è costituito dalle ∞^1 curve trasformate dalla D_1 nel sistema delle *omografie biassiali* che hanno come luoghi di punti uniti le rette α e β ([44]). Il fascio $|D_1|$ sega sopra una generatrice k della Φ_4 una g^1_m *ciclica* con due punti m—pli nei punti d'appoggio della k con le direttrici α e β, ciascuna delle quali, presa con la molteplicità m, dà una curva di $|D_1|$.

Allora ogni altra componente D_2 della curva di diramazione D, non avendo intersezioni con la D_1, appartiene necessariamente

([42]) Cfr. § 6, « *Osservazione* I ».

([43]) Cfr. C. SEGRE, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*, II. Surfaces réglées, § 1 [« Math. Annalen » Bd. 34 (1889), pp. 1-25].

([44]) Cfr., anche, per le indicazioni bibliografiche, F. ENRIQUES, loco cit. (2).

al fascio $|D_1|$, ed anzi, se la D_2 è diversa da α e da β, ne costituisce una cnrva semplice. Si conclude che *sulla* Φ_4 *la curva di diramazione* D *é composta di una o più curve (irriducibili) di un medesimo fascio lineare* $|D_1|$, *oltre che, eventualmente, dalle direttrici* α e β.

Passiamo ora al caso prima escluso in cui si presenti l' allineamento dei tre punti base O_1, O_2, O_3, del sistema lineare $|\Gamma_5|$ mediante il quale si è eseguita la trasformazione del cilindro (6) nella rigata Φ_4. Come si è visto ([45]), se i punti O_1, O_2, O_3, appartengono ad una stessa retta, il sistema lineare $|\Gamma_5|$ non è più semplice, la sua serie caratteristica g_4^2 risultando composta con una g_2^1. Allora la Φ_4 degenera in una quadrica contata due volte, e perciò non risponde più al nostro scopo. Ma questo caso si tratta subito direttamente sopra il cilindro (6): invero *la curva di diramazione si riduce ora a sei sezioni piane passanti per* O_1, O_2, O_3, e quindi se la sezione piana generica per O_1, O_2, O_3, assunta come curva doppia senza punti di diramazione, è immagine di una curva irriducibile, *il cilindro ellittico doppio* (6), *rappresenta una superficie* F *di determinante* $n = 2$ ([46]).

Osservazione. - Per il seguito occorre notare che la rigata Φ_4 a cui siamo pervenuti assoggettando il cilindro (6) ad una certa trasformazione birazionale, non è una rigata ellittica generale del suo grado. Invero, si abbia una rigata del quarto grado Φ_4, con due direttrici doppie α e β, su cui esista una curva ellittica (irriducibile) D_1 dell' ordine $2m$, che seghi in m punti le generatrici, e che sia rappresentata ciclicamente (con molteplicità m) sulla sezione piana generica φ della Φ_4.

L' esistenza della curva D_1 *porta ad una particolarizzazioni proiettiva della* Φ_4.

Infatti sia u l' *integrale ellittico* di prima specie (con i periodi ω e ω') appartenente alla rigata (o, ciò che è lo stesso,

([45]) Cfr. ([39]).

([46]) Cfr. l' *Osservazione II* al termine del § 6, e il comma *a*) del § 5.

alla sua sezione piana generica φ. Allora ([47]), per una conveniente scelta dei periodi della u, le coordinate del punto variabile sulla curva D_1 si potranno sempre assumere come funzioni periodiche della stessa u (che interpretata come integrale ellittico della D_1, si indicherà con U), con i periodi:

$$\Omega = \omega, \quad \Omega' = m\omega',$$

di guisa che nei punti $U_1, U_2, \ldots, U_m$ della D_1 corrispondenti ad un medesimo punto u di φ, si avrà:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_m \equiv mu + \frac{(m-1)\,m}{2}\omega' \qquad (\text{mod. } \omega,\ m\omega'),$$

ossia:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_m \equiv mu + \frac{m-1}{2}\Omega' \qquad (\text{mod. } \Omega,\ \Omega').$$

Indichiamo ora con O_α e O_β i due punti doppi della sezione piana (generica) φ della Φ_4: se u_α e u'_α sono i valori dell'integrale u nei punti di un gruppo della g^1_2 segata sulla φ dalle rette per O_α, si ponga:

$$u_\alpha + u'_\alpha \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega,\ \omega')$$

e analogamente sia

$$u_\beta + u'_\beta \equiv k \qquad (\text{mod. } \omega,\ \omega')$$

designando con u_β e u'_β i valori della u nei punti di un gruppo della g^1_2 segata sulla φ dalle rette per O_β. In corrispondenza ai punti u_α e u'_α si ha sulla D_1 un gruppo di $2m$ punti per i quali:

([47]) Vedi, p. es. F. ENRIQUES – O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. IV. Funzioni ellittiche e abeliane, libro VI, cap. I, § 13. (Bologna, 1934-XII).

$$(10) \qquad U_1 + U_2 + \ldots + U_{2m} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \Omega\,,\ \Omega')\,;$$

mentre i punti u, portano al gruppo:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_{2m} \equiv m\,k \qquad (\text{mod. } \Omega\,,\ \Omega')\,.$$

Ma codesti due gruppi sono equivalenti fra loro poichè il primo è segato sulla D_1 da un piano per la direttrice α, e il secondo da un piano per la β (e la D_1 non incontra nè la α nè la β): dovrà quindi essere ([48])

$$(11) \qquad m\,k \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \Omega\,,\ \Omega')\,.$$

8. – La rigata ellittica Φ_4 come superficie doppia.

È chiaro che ([49]) *se la rigata doppia Φ_4 rappresenta una superficie ellittica del tipo F, sulla Φ_4 le curve del fascio $|D_1|$ a cui appartengono le componenti della curva di diramazione* (diverse dalle rette doppie α e β), *dànno le immagini delle curve del fascio lineare $|C|$ della F.*

Però alla curva D_1^* generica di $|D_1|$ corrisponderà sulla F una curva C solo quando ciascuna C sia trasformata in se stessa dall'involuzione I_2 (costituita sulla F dalle g_2^1 canoniche delle K), mentre nel caso contrario alla D_1^* corrisponderanno due curve C coniugate nella I_2: cioè le curve del fascio $|C|$ si distribuiranno in coppie di una stessa involuzione razionale, ogni coppia essendo composta da due curve C trasformate l'una nell'altra nella I_2, e omologhe di una stessa curva di $|D_1|$.

Allora, viceversa, partiamo dalla rigata ellittica Φ_4, e riguardiamola come una superficie doppia prendendo per curva di diramazione la curva D con le caratteristiche dianzi dette. Ci eravamo già posta la domanda: che superficie rappresenterà codesta Φ_4? Intanto una superficie $\overline{F}$ possedente un fascio (K) el-

([48]) Questa proprietà è già stata osservata dall'Enriques: cfr. loco cit. ([1]), § 9.

([49]) Cfr. § 6, *Osservazione I.*

littico di curve di genere due rispondenti alle generatrici della Φ. Ma consideriamo il fascio lineare $|D_1|$ a cui appartengono le componenti della curva di diramazione (diverse da α e β): la curva D_1^* generica del fascio $|D_1|$, costituirà sulla Φ_4 doppia, una curva doppia priva di diramazioni; pertanto ad essa corrisponderà sulla $\overline{F}$ una curva che potrà essere irriducibile oppure spezzata. Nel primo caso avremo sulla $\overline{F}$ un *fascio lineare* $|C|$ di curve ellittiche, e la $\overline{F}$ sarà una delle nostre superficie ellittiche F (e precisamente una F di determinante pari, su cui il fascio $|C|$ sega le K in una serie lineare composta con la g_2^1 canonica). Se invece alla D_1^* risponde una curva spezzata in due parti, si avrà sulla $\overline{F}$ un fascio lineare riducibile composto con una involuzione razionale dell'ordine due, in un secondo fascio (C) di curve ellittiche: solo se quest'ultimo sarà *lineare* ricadremo in una superficie F. Ciò avverrà quando nella predetta involuzione si abbiano soltanto due coincidenze, ossia – sempre nell'ipotesi dello spezzamento delle curve omologhe di quelle del fascio $|D_1|$ – quando la curva di diramazione D della Φ_4 sia spezzata in più di due parti (in esse comprese eventualmente le direttrici α e β). E il caso in cui la D sia composta di tre parti almeno a che cosa porterà?; a superficie $\overline{F}$, ancora ellittiche, ma non di genere geometrico zero ([50]) (e quindi non del tipo che è oggetto del nostro studio), possedenti oltre ad un fascio ellittico di curve K di genere due, un fascio (C), non lineare, di curve di genere uno; purchè però l'ipotesi che la D sia spezzata in più di due parti risulti compatibile con l'altra che alla D_1^* generica di $|D_1|$ rispondano curve riducibili, il che non sempre accadrà. Riflettiamo sopra alcuni esempi. Si pensi al caso in cui la D è composta di tre bisecanti le generatrici, appartenenti ad un medesimo fascio lineare $|D_1|$: se le curve omologhe di quelle di $|D_1|$ sono riducibili, il fascio (C) sarà certo di genere uno poichè l'involuzione delle coppie di curve che provengono da una stessa curva di $|D_1|$ possiede tre coincidenze in corrispondenza alle tre componenti la D di diramazione, mentre si

([50]) Cfr. F. Enriques, loco cit. ([2]), § 13, n. 3.

capisce agevolmente che una quarta coincidenza si avrà in relazione ad una delle direttrici α o β (a una delle quali risponderà una C costituita da una componente doppia bisecante le K, e all'altra invece due curve C ciascuna formata da una componente quadrupla unisecante le K). Ma se la D è costituita da una quadrisecante le generatrici della Φ_4, e dalle due direttrici α e β, non si vede come possa nascere nell'involuzione nel fascio (C) una quarta coincidenza, oltre quelle che rispondono alle tre componenti della D.

Ciò porta a sospettare che un tal caso non sia realizzabile: ed è quello che effettivamente verificheremo fra breve.

Da queste considerazioni appare l'opportunità di procedere ad analizzare più da vicino la nostra rigata doppia Φ_4.

Determinata la curva di diramazione D, si ottiene la corrispondente superficie $\overline{F}$ con una estrazione di radice quadrata sopra un conveniente polinomio $\psi(x, y, z)$, i cui valori vanno considerati sulla Φ_4. Precisamente: il polinomio $\psi(x, y, z)$ uguagliato a zero dovrà rappresentare una superficie d'ordine

$$6 + 2r + 2s,$$

abbastanza alto, la quale passi una sola volta per la curva di diramazione D (in essa comprese eventualmente le direttrici α e β), passi invece per α e β con le molteplicità rispettive $2r$ e $2s$, ed inoltre *tocchi* la Φ_4 lungo ognuna delle generatrici secondo cui la incontra (*generatrici critiche apparenti*).

Per esempio, nello spazio a quattro dimensioni $S_4(X, Y, Z, U)$, la $\overline{F}$ – determinata a meno di una trasformazione birazionale – si otterrà ponendo:

$$(12) \qquad \begin{cases} X = x, \quad Y = y, \quad Z = z, \\ U = \sqrt{\psi(x, y, z)} \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

designando ora con

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'equazione della rigata quartica Φ_4.

Fissata la D, è noto che esistono quattro superficie (irriducibili) birazionalmente distinte, rappresentate doppiamente sulla Φ_4 con la stessa curva di diramazione D, le quali dipendono dalle serie lineari a cui appartiene il *gruppo delle generatrici critiche apparenti* entro il sistema ∞^1 delle generatrici della Φ_4. Le superficie Ψ d' ordine $6+2r+2s$ passanti nel modo detto per la D e per α e β, segano ulteriormente la Φ_4 in un gruppo di un certo numero $2t$ di generatrici che individua entro la totalità ellittica delle generatrici una serie lineare: ebbene, il suddetto gruppo delle generatrici critiche apparenti appartiene ad una delle serie metà di codesta serie, ed è appunto in corrispondenza alle diverse quattro metà che si hanno le quattro superficie $\overline{F}$ birazionalmente distinte di cui la Φ_4 dà l' immagine doppia. La scelta di una superficie Ψ d' ordine abbastanza alto, assicura poi della effettiva possibilità di ottenere gruppi di generatrici critiche apparenti che appartengano a ciascuna delle predette serie metà.

Supponiamo allora di avere costruito la superficie $\overline{F}$ – per esempio, mediante le equazioni (12) – e si consideri sopra la Φ_4 da cui essa proviene, il fascio lineare $|D_1|$: la curva generica D_1^* di $|D_1|$ si dovrà riguardare come una curva (ellittica) doppia senza punti di diramazione, ma con *un assegnato gruppo di punti critici apparenti*, costituito dalle sue intersezioni col gruppo delle generatrici critiche apparenti della Φ_4. Pertanto alla D_1^* corrisponderà sulla $\overline{F}$ una *determinata* curva, la quale – a seconda della serie lineare cui appartiene il gruppo dei punti critici apparenti della T_1^* – sarà *irriducibile* o *riducibile.*

Proveremo che in corrispondenza alle quattro differenti serie lineari a cui può appartenere il gruppo delle generatrici critiche apparenti sulla Φ_4, si presentano come possibili i tre casi che seguono:

1) Il gruppo dei punti critici apparenti sulla D_1^* può appartenere a quattro diverse serie lineari: a queste rispondono le quattro curve birazionalmente distinte rappresentabili sopra una curva ellittica doppia ([51]), una delle quali è spezzata in due parti;

([51]) Cfr. loco cit. ([18]).

2) il gruppo dei punti critici apparenti della D_1^* può appartenere a due sole serie lineari distinte, una delle quali porta allo spezzamento della curva rappresentata doppiamente sulla D_1^*;

3) il gruppo dei punti critici apparenti sulla D_1^* può appartenere a due sole serie lineari distinte, che portano ambedue a curve irriducibili.

Il caso 1) si presenterà quando le curve del fascio $|D_1|$ segano le generatrici della Φ_4 in un numero dispari di punti, cioè per $m=3$ o $m=5$. Incontreremo invece il caso 2) quando la curva di diramazione D sia costituita da una curva irriducibile seisecante le generatrici, oppure da tre bisecanti. Infine il caso 3) si avrà se della D facciano parte le due direttrici α, β, ed inoltre una quadrisecante o due bisecanti le generatrici della Φ_4.

Cominciamo dal supporre che la curva D_1^* sia rappresentata ciclicamente sulla sezione piana della Φ_5, con molteplicità m, essendo m un numero dispari. Sia g_{2t} la serie lineare doppia di quella cui appartiene il gruppo delle generatrici critiche apparenti, e si abbia per la somma dei valori dell' integrale u nei gruppi della g_{2t}:

$$\sum_{i=1}^{i=2t} u_i \equiv \lambda \qquad (\text{mod. } \omega,\ \omega').$$

Allora le quattro serie metà della g_{2t} a cui possono appartenere i gruppi delle generatrici critiche apparenti, sono date da:

$$\sum_{i=1}^{i=t} u_i \equiv \frac{\lambda}{2} \qquad (\text{mod. } \omega,\ \omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=t} u_i \equiv \frac{\lambda}{2} + \frac{\omega}{2} \qquad (\text{mod. } \omega,\ \omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=t} u_i \equiv \frac{\lambda}{2} + \frac{\omega'}{2} \qquad (\text{mod. } \omega,\ \omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=t} u_i \equiv \frac{\lambda}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2} \quad (\text{mod. } \omega,\ \omega').$$

A queste, in base alla (9), corrispondono sulla D_1^* per i gruppi dei punti critici apparenti le quattro serie distinte:

$$\sum_{i=1}^{i=mt} U_i \equiv m \frac{\lambda}{2} \qquad (\mathrm{mod.}\ \Omega\,,\ \Omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=mt} U_i \equiv m \frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2}\Omega \qquad (\mathrm{mod.}\ \Omega\,,\ \Omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=mt} U_i \equiv m \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\Omega' \qquad (\mathrm{mod.}\ \Omega\,,\ \Omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=mt} U_i \equiv m \frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2}\Omega + \frac{1}{2}\Omega' \qquad (\mathrm{mod.}\ \Omega\,,\ \Omega').$$

Siamo cioè nelle circostanze preannunciate in 1).

Passiamo al caso in cui la curva di diramazione D è costituita da una curva ellittica irriducibile del dodicesimo ordine, che incontra in sei punti le generatrici della rigata Φ_4. Consideriamo le superficie Ψ, per esempio del decimo ordine, che passano semplicemente per la D, e doppiamente per le due direttrici α e β della Φ_4. Esse incontrano la Φ_4 in un gruppo di venti generatrici, il quale al variare della Ψ, descrive una serie lineare (completa) g_{20}^{19} entro l'ente ellittico semplicemente infinito delle generatrici di Φ_4. Allora se dimezziamo la g_{20}^{19}, esisteranno delle Ψ che toccano la Φ_4 in gruppi di dieci generatrici per ognuna delle quattro serie metà della g_{20}^{19}.

Dopo ciò, consideriamo sulla sezione piana generica φ della Φ_4, le serie segate dalle rette per i due punti doppî O_α, O_β, e, in accordo con la (11), poniamo per le somme dei valori dell'integrale u nei punti dei gruppi di esse:

$$u_\alpha + u'_\alpha \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ \omega,\ \omega')$$

$$u_\beta + u'_\beta \equiv \frac{\omega}{6} \qquad (\mathrm{mod.}\ \omega,\ \omega').$$

cosicchè per la serie segata sulla φ dalle rette, si avrà:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv \frac{\omega}{6} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

Sia ora D* la curva generica del fascio $|D|$ cui appartiene la curva di diramazione: la D^* è rappresentata ciclicamente con la moltiplicità sei sulla φ, e, come si è detto, le coordinate dei suoi punti si possono esprimere mediante funzioni periodiche dell'integrale U con i periodi

$$\Omega = \omega, \quad \Omega' = 6\,\omega'.$$

La serie g_{20}^{19} determinata sulla Φ_4 dalle superficie Ψ, risulta segata sulla sezione piana φ dalla curve del decimo ordine che hanno un punto doppio nei punti doppi O_α e O_β della φ, e che passano inoltre per il gruppo G_{12} delle dodici intersezioni della φ con la curva di diramazione D. Poichè codesto gruppo G_{12} è equivalente a quello segato sulla φ dalla D^*, nei punti del quale – come dalla (10) – la somma dei valori dell'integrale u risulta congrua a zero (mod. ω, ω'), si ha subito per la g_{20}^{19}:

$$\sum_{i=1}^{i=20} u_i \equiv \frac{\omega}{3} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

Ne segue per le quattro serie metà della g_{20}^{19}:

$$\sum_{i=1}^{i=10} u_i \equiv \frac{\omega}{6} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=10} u_i \equiv \frac{2\,\omega}{3} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=10} u_i \equiv \frac{\omega}{6} + \frac{\omega'}{2} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=10} u_i \equiv \frac{2\,\omega}{3} + \frac{\omega'}{2} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

Alle quali - per la (9) - rispondono sulla D^* due sole serie disequivalenti:

$$\sum_{i=1}^{i=60} U_i \equiv 0 \qquad \text{(mod. } \Omega,\ \Omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=60} U_i \equiv \frac{1}{2}\Omega' \qquad \text{(mod. } \Omega,\ \Omega').$$

E quando sulla D^* il gruppo dei punti critici appartenga alla prima di queste serie (multipla di quella individuata sulla D^* dalle sezioni piane), la D^* presa come doppia, è immagine di una curva riducibile. Siamo cioè nel caso 2). Nel quale pure si ricade quando la curva di diramazione D sia spezzata in tre parti bisecanti le generatrici della Φ_4, come si riconosce con considerazioni analoghe alle precedenti.

A una diversa conclusione si giunge invece quando la D sia costituita dalle due direttrici α, β, e da una curva residua D_1 dell'ottavo ordine quadrisecante le generatrici della Φ_4. In questa ipotesi potremo riferirci alle superficie Ψ del sesto ordine che passano per la D_1 e per α e β: esse segano sulla Φ_4 una serie lineare g_{12}^{11} di gruppi di generatrici.

Sulla curva ellittica D_1^*, generica del fascio $|D_1|$, l'integrale U avrà ora i periodi

$$\Omega = \omega, \quad \Omega' = 4\omega',$$

e nella (11) prenderemo, per esempio:

$$k = \frac{\omega}{4},$$

per modo che sulla sezione piana φ della Φ_4, la somma dei valori dell'integrale u nei punti di un gruppo della serie segata dalle rette sarà:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv \frac{\omega}{4} \qquad \text{(mod. } \omega,\ \omega').$$

Allora sulla φ la serie g_{12}^{11} dianzi detta, che è segata dalle curve del sesto ordine passanti semplicemente per i punti doppi della φ e per gli otto punti d'incontro della Γ stessa con la D_1 (gruppo equivalente a quello segato sulla φ dalla D_1^*), è data da:

$$\sum_{i=1}^{i=12} u_i \equiv \frac{\omega}{4} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega')$$

Pertanto le Ψ che toccano la Φ_4 lungo sei generatrici portano con le loro generatrici di contatto, a gruppi delle seguenti quattro serie metà della g_{12}^{11}:

$$\sum_{i=1}^{i=6} u_i \equiv \frac{\omega}{8} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} u_i \equiv \frac{5\,\omega}{8} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} u_i \equiv \frac{\omega}{8} + \frac{\omega'}{2} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} u_i \equiv \frac{5\,\omega}{8} + \frac{\omega'}{2} \qquad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

E queste - secondo la (9) - dànno luogo sulla D_1^* alle due serie cui può appartenere il gruppo dei punti critici apparenti:

$$\sum_{i=1}^{i=24} U_i \equiv \frac{1}{2}\,\Omega \qquad (\text{mod. } \Omega, \Omega')$$

$$\sum_{i=1}^{i=24} U_i \equiv \frac{1}{2}\,\Omega + \frac{1}{2}\,\Omega' \qquad (\text{mod. } \Omega, \Omega').$$

Poichè nessuna di queste due serie risulta multipla di quella segata sulla D_1^* dai piani (nei cui gruppi la somma dei valori dell' integrale U è congrua allo zero), la D_1^* quando si assuma come curva doppia con un gruppo di punti critici apparenti appartenente all'una o all'altra di tali serie, rappresenta sempre una curva irriducibile.

Si verificano dunque le circostanze dette in 3), alle quali pure si giunge dall'analisi del caso in cui la D di diramazione sia composta, oltre che dalle direttrici α e β, da due curve bisecanti le generatrici della Φ_4.

9. – Ancora i dieci tipi di superficie F.

Terminiamo riepilogando le conclusioni a cui portano i risultati ottenuti.

Nello spazio ordinario sia data la rigata ellittica del quarto ordine Φ_4, con le due rette doppie α, β, e si riguardi come una superficie doppia prendendo per curva di diramazione la curva D, presentante la costituzione e le caratteristiche più volte descritte. La Φ_4 rappresenta una superficie ellittica su cui esiste un fascio ellittico (K) di curve di genere due (omologhe delle generatrici della Φ_4), e un secondo fascio (C) di curve ellittiche, proveniente dal fascio $|D_1|$ cui appartengono le componenti la D di diramazione. *Codesta superficie ellittica è del nostro tipo F, cioè di genere geometrico nullo, quando il fascio (C) è lineare.*

Come si è gia detto, ciò accade certo se alle curve di $|D_1|$ rispondono sulla superficie obiettiva curve irriducibili, unite nella involuzione I_2 costituita dalle g_2^1 canoniche delle K. Invece nel caso contrario si può cadere anche in superficie ellittiche di genere maggiore di zero: invero nel fascio (C) nasce una *involuzione lineare* costituita dalle coppie di curve C coniugate nella I_2, cioè aventi per immagini una stessa curva di $|D_1|$, e il fascio (C) sarà lineare solo se codesta involuzione presenta due coincidenze.

Analiziamo le due ipotesi separatamente.

1) *Alla curva generica del fascio $|D_1|$ corrisponda una curva irriducibile.* Questa circostanza si presenta in corrispondenza a tutte le diverse composizioni della curva D di diramazione, e la Φ_4 porta sempre a una superficie F, di genere geometrico zero, sulla quale il *fascio lineare* $|C|$ sega le K nei

gruppi di una serie lineare composta con la g_2^1 canonica. Tornando alla classificazione del § 5, si ritrovano così i casi seguenti:

curva di diramazione D, irriducibile, seisecante le generatrici: caso i) del § 5 ($n = 12$, $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 6$);

curva di diramazione D spezzata in due componenti trisecanti le generatrici: caso (F_1) di f) del § 5 ($n = 6$, $s_1 = s_2 = 2$, $s_3 = s_4 = 3$;

curva di diramazione D costituita da tre bisecanti le generatrici: caso d) del § 5 ($n = 4$, $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 2$);

curva di diramazione D formata da una componente irriducibile pentasecante le generatrici e da una delle rette doppie della Φ_4: caso h) del § 5 ($n = 10$, $s_1 = 2$, $s_2 = 5$, $s_3 = 10$);

curva di diramazione D costituita da una quadrisecante le generatrici, e dalle due rette doppie della Φ_4: caso g) del § 5 ($n = 8$, $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 8$);

curva di diramazione D composta da due bisecanti le generatrici e dalle rette doppie della Φ_4: caso c) del § 5 ($n = 4$, $s_1 = s_2 = 2$, $s_3 = s_4 = 4$).

Ci limitiamo ad illustrare uno solo dei casi elencati, essendo i rimanenti del tutto analoghi. Si consideri, per esempio, l'ipotesi che porta al determinante $n = 10$ nella quale la curva di diramazione della Φ_4 è costituita da una componente D_1 pentasecante le generatrici, e dalla direttrice α (o β). Al gruppo segato sulla generatrice k della D_1 corrisponde sulla K un gruppo della g_{10}^1 segnata sulla K da $|C|$ (e composta con la g_2^1), il quale è costituito da cinque punti doppi, cosicchè risulta intanto $s_1 = 2$. Alla direttrice β (o α) che non è di diramazione, corrisponde sulla F una curva C spezzata in una componente quintupla bisecante le K, onde $s_2 = 5$. Invece la direttrice di diramazione α (o β) porta ad una C composta da una curva, contata dieci volte, che incontra le K in un solo punto ($s_3 = 10$).

2) *Alla curva generica del fascio* $|D_1|$ *corrisponda una curva spezzata.* Come si è visto ([52]), questa ipotesi non può presentarsi quando la curva di diramazione D sia costituita dalle due rette doppie della Φ_4, e da una curva residua quadrisecante

([52]) Cfr. § 8.

le generatrici, irriducibile o spezzata in due bisecanti. Esclusi questi casi, alle rimanenti conformazioni possibili per la D rispondono superficie ellittiche F di genere geometrico zero, solo quando la D stessa sia spezzata in non più di due parti. Ricadremo così in una superficie F dei tipi seguenti:

la D sia irriducibile, seisecante le generatrici: caso (F_2) di f) del § 5 $(n = 6, s_1 = 3, s_2 = s_3 = 6)$;

la D sia spezzata in due trisecanti le generatrici: caso b) del § 5 $(n = 3, s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 3)$;

la D sia costituita da una pentasecante le generatrici e da una delle rette doppie della Φ_4: caso e) del § 5 $(n = 5, s_1 = s_2 = s_3 = 5)$.

Invero se – per esempio – la D è costituita da una curva (irriducibile) seisecante le generatrici k $(n = 6)$, si ha che nell'involuzione entro il fascio $|C|$ le due coincidenze sono date l'una dalla curva irriducibile C (segante ogni K nei sei punti doppi della g_2^1), che ha per omologa la D; e l'altra da una curva C' costituita da una componente tripla bisecante le K (in due punti coniugati nella g_2^1) la quale risponde ad una delle direttrici della Φ_4, per esempio alla α. La C' dà intanto $s_1 = 3$. Invece alla direttrice β corrispondono sulla F due curve C, spezzate ciascuna in un'unica componente sestupla unisecante le K (i punti d'appoggio di codeste due curve C con una K costituendo una coppia della g_2^1): ciò che dà: $s_2 = s_3 = 6$.

Si completerà la classificazione delle F aggiungendo la rigata ellittica doppia, con una curva di diramazione costituita da sei unisecanti le generatrici, appartenenti ad un medesimo fascio lineare (la cui curva generica sia immagine di una curva irriducibile), che porta al caso del determinante $n = 2$ già innanzi incontrato più volte ([53]).

([53]) Cfr. l' « *Osservazione II* » al termine del § 6, e il § 7.