

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

## **Sui metodi generali di rappresentazione lineare della geometria descrittiva**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 6 (1935), p. 132-140

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1935\\_\\_6\\_\\_132\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__132_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SUI METODI GENERALI DI RAPPRESENTAZIONE LINEARE DELLA GEOMETRIA DESCRITTIVA

di UGO MORIN a Padova

Il BORDIGA <sup>(1)</sup>, nelle sue vedute unitarie sulla geometria descrittiva, introduce il metodo generale di rappresentazione dello spazio punteggiato mediante coppie ordinate di punti di un piano. Questo metodo, ritrovato da MÜLLER <sup>(2)</sup>, è stato da questi chiamato il metodo più generale (allgemeinstes Zweibilderprinzip).

Ora, analogamente a quanto ha fatto A. DEL RE <sup>(3)</sup> per un caso particolare, e più in generale MÜLLER e COMESSATTI <sup>(4)</sup>, ho voluto indagare quali sono i possibili metodi di rappresentazione mediante coppie ordinate di punti, ove si pongano unicamente le condizioni che la rappresentazione sia algebrica e che le coppie rappresentatrici dei punti di una retta generica si distribuiscano

<sup>(1)</sup> C. BORDIGA, *I metodi della Geometria descrittiva* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXI (1901-2)] pp. 389-403 e 609-618.

<sup>(2)</sup> MÜLLER, *Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie* [Jhrsb. d. Deutsch. Math. Ver. 14 (1905)] pp. 569-574.

<sup>(3)</sup> A. DEL RE, *Il più generale metodo di rappresentazione che serve di base alla Geometria descrittiva ordinaria* [Rend. Acc. Lincei (5) 17 (1908)] pp. 639-643.

<sup>(4)</sup> A. COMESSATTI, *Considerazioni intorno ai metodi generali di rappresentazione della Geometria descrittiva, ed al teorema di POHLKE* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXXXVII (2), (1927-28)] pp. 579-614.

sopra due rette; rappresentazioni che chiamerò in seguito *lineari*. Pervengo alla conclusione che i metodi di rappresentazione lineari possibili sono unicamente il metodo generale del BORDIGA ed un metodo che ho chiamato *metodo generalizzato di proiezioni quotate* (con tutti i loro casi particolari).

Dopo aver accennato ad un'applicazione di quest'ultimo metodo alla fotogrammetria, generalizzo gli argomenti svolti agli iperspazi: pervenendo a classificare proiettivamente tutti i possibili metodi di rappresentazione lineare di uno spazio lineare  $S_n$  dentro ad uno spazio lineare  $S_m$  ( $n \geq m$ ,  $2m \geq n$ ).

1. La rappresentazione del BORDIGA dello spazio punteggiato  $\Sigma$  mediante coppie ordinate di punti di un piano (quadro)  $\pi$  si ottiene nel seguente modo: Fissati in  $\Sigma$  due punti  $S'$  ed  $S''$  (centri fondamentali) e due omografie non degeneri  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  fra le stelle  $S'$ ,  $S''$  ed il quadro  $\pi$ , un punto generico  $A$  di  $\Sigma$  viene rappresentato su  $\pi$  dalla coppia dei punti  $(A_1, A_2)$  che, secondo  $\Omega'$  ed  $\Omega''$ , corrispondono rispettivamente ai raggi  $S'A$  ed  $S''A$ .

2. La più generale rappresentazione *algebraica* dei punti di  $\Sigma$  mediante coppie ordinate di punti del quadro  $\pi$ , si ottiene evidentemente fissando entro alla varietà  $V_4$  di quelle coppie una  $V_3$  *razionale*, e riferendola birazionalmente a  $\Sigma$ . In questa corrispondenza birazionale tra la  $V_3$  e  $\Sigma$  vi potranno essere in  $\Sigma$  dei punti fondamentali, cioè punti tali che ad essi corrispondono nella  $V_3$  curve o superficie (eccezionali).

Imponiamo ora alla rappresentazione algebraica generale il *vincolo proiettivo* cioè prescriviamo che le coppie rappresentatrici  $(A_1, A_2)$  dei punti  $A$  di una retta generica  $a$  di  $\Sigma$  si distribuiscono rispettivamente sopra due rette  $a_1$  ed  $a_2$  (generiche o no) del quadro. Queste rappresentazioni chiameremo, come abbiamo detto nell'introduzione, *lineari*.

3. Il punto  $A_1$  si dirà la prima immagine del punto  $A$ , ed  $A_2$  la seconda; ed analogamente per le immagini  $a_1, a_2$  di una retta  $a$ . Si presentano allora, per la rappresentazione suddetta, due diverse possibilità:

I) sia le prime che le seconde immagini dei punti di  $\Sigma$  si distribuiscono su tutto il quadro  $\pi$ ;

II) mentre (ad es.) le prime immagini si distribuiscono ancora su tutto  $\pi$ , le seconde immagini descrivono una curva (algebraica)  $p$ .

Trattiamo dapprima della corrispondenza tra i punti di  $\Sigma$  e le loro prime immagini. Ci riferiremo in seguito a questa corrispondenza dicendo che  $\pi$  è una *immagine lineare* di  $\Sigma$ . Questa corrispondenza risulterà la stessa per i due casi ora segnalati, di cui faremo seguire la trattazione separata.

4. Un punto generico  $A_1$  di  $\pi$  è la prima immagine di  $\infty^1$  punti di  $\Sigma$ , che generano dunque una curva algebraica  $a$ . Variando  $A_1$  su  $\pi$  otteniamo in questo modo un sistema algebrico  $\infty^2$  di curve di  $\Sigma$ , che indicheremo con  $(S')$ , di indice uno; cioè tale che per un punto generico di  $\Sigma$  passa una sola curva del sistema.

I punti di  $\Sigma$  le cui prime immagini sono punti di una retta generica  $l_1$  di  $\pi$ , costituiscono una superficie algebraica  $\lambda$ , che contiene  $\infty^1$  curve del sistema  $(S')$ . Due punti generici,  $A$  e  $B$ , di questa superficie  $\lambda$  hanno come immagini  $A_1$  e  $B_1$  due punti distinti della retta  $l_1$ . Dunque la retta  $(AB)$ , in quanto ha come immagine la retta  $l_1$ , appartiene alla superficie  $\lambda$ : cioè questa superficie è un piano.

Il punto generico  $A_1$  di  $\pi$  è sostegno di un fascio di raggi  $l_1$ , dunque per la curva algebraica  $a$  del sistema  $(S')$  passano  $\infty^1$  piani del tipo  $\lambda$ , cioè quella curva è una retta.

Poichè due punti di  $\pi$  individuano una retta  $l_1$ , due rette generiche del sistema  $(S')$  sono complanari. Il sistema  $(S')$ , poichè le sue rette non possono appartenere ad un piano fisso in quanto per un punto generico di  $\Sigma$  passa una di esse, deve essere una *stella di raggi*; il cui centro  $S'$  sarà detto il *primo centro fondamentale*.

Tra i raggi  $a$  della stella  $(S')$  ed i punti  $A_1$  di  $\pi$  intercede una corrispondenza (algebraica) *biunivoca*,  $\Omega'$ , tale che ad un fascio di raggi corrisponde una retta punteggiata. Cioè la corrispondenza  $\Omega'$  è un'omografia, che diremo la (prima) *omografia rappresentatrice*.

L'immagine lineare di  $\Sigma$  su  $\pi$  (n. 3) può dunque essere ottenuta nel seguente modo. Si fissi in  $\Sigma$  un punto  $S'$  e si stabilisca una omografia  $\Omega'$  tra la stella di raggi ( $S'$ ) ed il piano punteggiato  $\pi$ . Un punto  $A$  di  $\Sigma$  ha come immagine su  $\pi$  il punto  $A_1$  che corrisponde nell'omografia  $\Omega'$  al raggio  $S'A$ . Una corrispondenza di questo tipo, che interviene in molte questioni geometriche, vogliamo chiamare una *proiezione generalizzata*. In conclusione:

*Un'immagine lineare (n. 3) dello spazio  $\Sigma$  su un piano  $\pi$  si ottiene sempre con una proiezione generalizzata di  $\Sigma$  da un suo punto  $S'$  su  $\pi$ .*

5. È ora immediata la discussione completa del *I° caso* (n. 3). Poichè anche le seconde immagini dei punti di  $\Sigma$  invadono tutto il quadro  $\pi$ , si ottiene una seconda immagine lineare di  $\Sigma$  su  $\pi$ ; generata dunque da una proiezione generalizzata, determinata da un (*secondo*) *centro fondamentale*  $S''$  di  $\Sigma$  e da una (*seconda*) *omografia rappresentatrice*  $\Omega''$  (n. 4).

Rileviamo che i due centri  $S'$  ed  $S''$  sono necessariamente distinti, perchè, ove coincidessero, tutti i punti di un raggio generico della stella ( $S'$ )  $\equiv$  ( $S''$ ) avrebbero la medesima coppia rappresentatrice.

Possiamo dunque concludere che *questo metodo più generale di rappresentazione lineare coincide con quello del BORDIGA* (n. 1).

6. Veniamo ora alla discussione del *II° caso* (n. 3). Si vede che la curva algebrica  $p$  su cui, per ipotesi, si distribuiscono le seconde immagini dei punti di  $\Sigma$  è una retta. Infatti la retta che congiunge due punti qualunque,  $A_2$  e  $B_2$ , di  $p$ , interpretata come seconda immagine di una retta di  $\Sigma$  che congiunge due punti le cui seconde immagini sono  $A_2$  e  $B_2$ , fa parte di  $p$ .

Consideriamo la superficie algebrica  $\lambda$  di  $\Sigma$  i cui punti hanno come seconda immagine un punto fisso (generico)  $L_2$  di  $p$  (e le prime immagini variabili su  $\pi$ ). Variando  $L_2$  su  $p$  si ottiene un sistema algebrico  $\infty^1$  di superficie, che indicheremo con ( $s$ ), di *indice uno*. Infatti, per un punto generico  $L$  di  $\Sigma$  passa una sola superficie del sistema ( $s$ ), quella associata alla seconda

immagine  $L_2$  del punto  $L$ . Il sistema di superficie  $(s)$  è dunque un fascio.

Consideriamo una superficie generica  $\lambda$  del fascio  $(s)$ . Questa ha con una retta generica  $l$  della stella  $(S')$  (n. 4) in comune, oltre (eventualmente) il punto  $S'$ , uno ed un sol punto: quello che ha come prima immagine il punto  $L_1$  corrispondente ad  $l$  nella prima omografia rappresentatrice  $\Omega'$  e come seconda immagine il punto  $L_2$  associato a  $\lambda$ . Dunque se l'ordine di una superficie del fascio  $(s)$  è  $n \geq 2$ , il punto  $S'$  sarà per il fascio un punto base di ordine  $n - 1$ . In particolare se  $n = 1$ , cioè il sistema  $(s)$  è un fascio di piani, l'asse  $s$  di questo fascio non passa per  $S'$ .

Tra il fascio  $(s)$  di superficie (in particolare di piani) e la retta punteggiata  $p$  intercede una corrispondenza algebrica biunivoca, quindi proiettiva. Questa sarà detta la seconda proiettività rappresentatrice  $\Omega''$ .

7. Noti il centro  $S'$ , il fascio  $(s)$  e le due proiettività rappresentatrici  $\Omega'$  e  $\Omega''$  (nn. 4, 6), la rappresentazione è individuata. Preso un punto generico  $A$  di  $\Sigma$ , la sua prima immagine  $A_1$  è il punto corrispondente del raggio  $(S' A)$  nella  $\Omega'$ , e la seconda immagine  $A_2$  il punto corrispondente nella  $\Omega''$  della superficie del fascio  $(s)$  che passa per  $A$ .

Le coppie imagini dei punti di una retta generica  $a$  di  $\Sigma$  stabiliscono tra la prima immagine  $a_1$  di questa retta e la seconda immagine  $a_2 \equiv p$  una corrispondenza algebrica di indici  $(n, 1)$ . Questa sarà quindi una proiettività unicamente nel caso che  $(s)$  sia un fascio di piani.

In questo ultimo caso, per evitare nella rappresentazione di una retta o di un piano, di segnare volta per volta le seconde imagini di alcuni loro punti, si potrà procedere nel seguente modo. Fissati e numerati due o più piani del fascio  $(s)$ , che si potranno chiamare piani di livello, si segnino e numerino, sopra la prima immagine di una retta, le imagini dei punti comuni alla retta obbiettiva e quei piani. Questa immagine si potrà chiamare proiezione graduata della retta. Così, per rappresentare un piano, si segnino e numerino le prime imagini delle rette (di livello) che il piano ha in comune coi piani di livello prefissati.

È immediato quali ulteriori condizioni grafiche e metriche si dovranno porre, per ridurre questo metodo all'ordinario metodo delle proiezioni quotate; colla sola differenza che la quota, anzichè data numericamente si pensi segnata sulla scala grafica. Chiameremo perciò il metodo generale qui considerato con *metodo generalizzato di proiezioni quotate*.

Si osservi che questo metodo si potrebbe, quando  $n = 1$ , considerare come un caso particolare del metodo generale del BORDIGA, ove si abbandoni la condizione che ambedue le omografie rappresentatrici  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  siano *non* degeneri, ma si ammetta che, in particolare, una delle due possa essere *degenere di prima specie* <sup>(5)</sup>.

**8. Cenno di un'applicazione alla fotogrammetria.** – Nel metodo generale del BORDIGA (n. 1) si passa dalla coppia rappresentatrice  $(A_1, A_2)$  al punto obiettivo  $A$  intersecando due raggi omologhi delle due stelle  $(S')$  ed  $(S'')$ ; mentrecchè nel metodo generalizzato di proiezioni quotate (n. 7) si interseca un raggio della stella  $(S')$  con un piano del fascio  $(s)$ . Ciò suggerisce di riprendere i problemi fondamentali della fotogrammetria teorica da questo ultimo punto di vista.

Siano date due prospettive di una medesima figura  $F$  dello spazio  $\Sigma$  sopra due quadri  $\pi$  e  $\pi'$ , non orientate (cioè di cui si ignori la posizione nello spazio dei piani e centri di proiezione). Sia  $l_1$  una retta di  $\pi$ , congiungente due punti  $M_1$  ed  $N_1$  le cui corrispondenti immagini  $M'$  ed  $N'$  di  $\pi'$  coincidono. La retta  $l_1$  è dunque traccia di un piano proiettante  $\lambda$  nella prima prospettiva il quale per il fatto che contiene la retta obbiettiva  $MN$ , che è un raggio proiettante nella seconda prospettiva, contiene anche il secondo centro di proiezione <sup>(6)</sup>.

<sup>(5)</sup> A. COMESSATTI, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Parte seconda [Cedam, Padova, 1931] pag. 161.

<sup>(6)</sup> Ciò è come dire che la retta  $l_1$  passa per il punto nodale del piano  $\pi$  (retta nodale). Si noti che sia in una costruzione teorica, ma soprattutto in una costruzione per approssimazioni alla quale in pratica spesso si ricorre, la determinazione di una retta nodale è alquanto più semplice che la costruzione del punto nodale stesso.

Le seconde immagini dei punti del piano  $\lambda$  cadranno dunque pure su una medesima retta  $l'$  di  $\pi'$ . Prendiamo sulla  $l'$  un punto generico  $P'$  e riferiamo il fascio  $(P')$  con una proiettività  $\Pi$  ad una retta qualunque  $p$  di  $\pi$ , in modo che al raggio  $l'$  corrisponda il punto,  $L_2$ , comune alle rette  $p$  ed  $l_1$ .

Ad un punto generico  $A'$  di  $\pi'$  corrisponde così, con proiezione da  $P'$  e con la  $\Pi$ , un determinato punto  $A_2$  di  $p$ . Ad un punto generico  $A$  di  $F$  che abbia come immagine su  $\pi$  un punto  $A_1$  e come immagine su  $\pi'$  il punto  $A'$  corrisponde in questo modo una coppia di punti  $(A_1, A_2)$  di  $\pi$ . La rappresentazione di  $F$  su  $\pi$  così realizzata è, come si rileva direttamente, una proiezione quotata generalizzata (n. 7). Senonché, a partire dalle coppie rappresentatrici  $(A_1, A_2)$  non possiamo ricostruire direttamente la figura obbiettiva perchè non conosciamo la effettiva posizione in  $\Sigma$  degli elementi fondamentali  $S'$  ed  $s$ , nè le due omografie rappresentatrici  $\Omega'$ ,  $\Omega''$ . Ma con una semplice costruzione possiamo determinare una figura  $\bar{F}$  omografica alla figura  $F$ .

Perciò prendiamo un piano generico per la retta  $l_1$  e scegliamo in esso genericamente un punto  $S'$  ed una retta  $s$ .

Facciamo corrispondere ad un punto  $A$  della  $F$  il punto  $\bar{A}$  di  $\Sigma$  che si ottiene intersecando il raggio  $(SA_1)$  col piano  $(sA_2)$ . La corrispondenza  $\Omega$  così generata tra  $F$  ed  $\bar{F}$  è un'omografia di  $\Sigma$ .

Infatti, indicato con  $L$  il punto d'incontro di una retta generica  $a$  di  $\Sigma$  col piano  $\lambda$ , proiettante in ambedue le prospettive, la sua immagine  $L_1$  su  $\pi$  è il punto comune alla retta  $a_1$ , immagine di  $a$ , e la retta  $l_1$ ; ed analogamente l'immagine  $A'$  su  $\pi'$  è il punto comune delle rette  $a'$  ed  $l'$ . Trasformando la retta  $a'$  nella retta  $p$ , mediante proiezione da  $P'$  e la proiettività  $\Pi$ , al punto  $L'$  corrisponde il punto  $L_2$  (comune alle rette  $l_1$  e  $p$ ). Dunque nella proiettività tra le rette  $a_1$  e  $p$ , in cui si corrispondono le coppie  $(A_1, A_2)$  rappresentatrici dei punti della retta  $a$ , la retta  $l_1$  congiunge la coppia di punti corrispondenti  $(L_1, L_2)$ .

Proiettando da  $S'$  i punti  $A_1$  della  $a_1$  e da  $s$  i punti corrispondenti  $A_2$  della  $p$  si ottengono un fascio di raggi ed un fascio di piani in corrispondenza proiettiva. Ma questa proiettività è



una prospettività, perchè il raggio ( $S' L_1$ ) appartiene al piano corrispondente ( $s L_2$ ). Dunque alla retta generica  $a$  di  $F$  corrisponde nella  $\Omega$  proiettivamente una retta  $\bar{a}$  di  $\bar{F}$ , cioè la  $\Omega$  è un' omografia.

### 9. Generalizzazione agli iperspazi.

Se tra uno spazio lineare  $S_n$  ed uno spazio lineare  $S_m$  ( $n > m \geq 2$ ) intercede una corrispondenza algebrica, tale che ad un punto generico dell'  $S_n$  corrisponde un punto generico dell'  $S_m$ , e tale che ad una retta punteggiata dell'  $S_n$  corrisponde una retta punteggiata dell'  $S_m$ , diremo che  $l' S_m$  è un' *immagine lineare* dell'  $S_n$  (n. 3).

La varietà algebrica  $V_{n-m}$  ( $n - m \geq 1$ ) dei punti dell'  $S_n$  che hanno nell'  $S_m$  come immagine un medesimo punto  $P_1$ , descrive, al variare di  $P_1$  nell'  $S_m$ , un sistema algebrico  $\infty^m$  di  $V_{n-m}$  di indice 1, che indicheremo con  $(S_{n-m-1})$ . Facciamo descrivere al punto  $P_1$  una retta generica  $r_1$  dell'  $S_m$ . Il corrispondente sistema algebrico  $\infty^1$  di  $V_{n-m}$  genera una varietà  $V_{n-m+1}$ .

Due punti generici,  $P$  e  $Q$ , di questa varietà hanno come immagini  $P_1$  e  $Q_1$  due punti distinti della retta  $r_1$ . Dunque la retta  $(P Q)$ , in quanto ha come immagine la retta  $r_1$ , appartiene alla  $V_{n-m+1}$ , cioè questa varietà è uno spazio lineare  $S_{n-m+1}$ .

Poichè per un punto  $P_1$  dell'  $S_m$  passano  $\infty^{m-1}$  ( $m - 1 \geq 1$ ) rette  $r_1$ , per la varietà  $V_{n-m}$  dei punti dell'  $S_n$  che hanno come immagine  $P_1$ , passano  $\infty^{m-1}$  spazi lineari  $S_{n-m+1}$ : cioè questa varietà è pure uno spazio lineare  $S_{n-m}$ . E infine, poichè due punti dell'  $S_m$  individuano una retta  $r_1$ , due generici spazi  $S_{n-m}$  del sistema  $(S_{n-m-1})$  appartengono ad un  $S_{n-m+1}$ . In base a quest' ultima condizione <sup>(6)</sup>, e perchè dobbiamo escludere che gli  $S_{n-m}$  appartengano ad un  $S_{n-m+1}$  fisso in quanto per un punto generico dell'  $S_n$  passa uno di essi, possiamo concludere che questi spazi passano per un medesimo  $S_{n-m-1}$ , cioè formano una  $S_{n-m-1}$  - *stella*.

Tra gli  $S_{n-m}$  della  $S_{n-m-1}$  - stella ed i punti dell'  $S_m$ , intercede una corrispondenza *biunivoca*  $\Omega'$ , nella quale ad un

<sup>(6)</sup> E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [G. Principato, Messina 1923] pag. 16.

fascio di  $S_{n-m}$  corrisponde una retta punteggiata. Dunque la  $\Omega'$  è un'omografia (omografia rappresentatrice). Estendendo l'accezione introdotta al n. 4, possiamo concludere:

*Un'immagine lineare di uno spazio lineare  $S_n$  dentro uno spazio lineare  $S_m$  ( $n > m \geq 2$ ) si ottiene sempre con una proiezione generalizzata dell' $S_n$  da un suo  $S_{n-m-1}$  sopra l' $S_{n-m}$ .*

**10.** Una rappresentazione lineare di uno spazio lineare  $S_n$  in uno spazio lineare  $S_m$  ( $n \geq m \geq 2$ ), tale che, mentre le prime immagini appartengano a tutto l' $S_m$ , le seconde immagini appartengano ad un  $S_l$  dell' $S_m$  ( $m \geq l \geq 2$ ,  $m + l \geq n$ ), (<sup>7</sup>), si compone dunque di due distinte *immagini lineari*. In conclusione:

*La più generale rappresentazione lineare di uno spazio lineare  $S_n$  in uno spazio lineare  $S_m$  ( $n > m \geq l \geq 2$ ) si ottiene nel seguente modo.*

*Presi nell' $S_n$  uno spazio lineare  $S_{n-m-1}$  ed uno spazio lineare  $S_{n-l-1}$ , non incidenti, si stabilisca un'omografia  $\Omega'$  tra la  $S_{n-m-1}$  - stella e lo spazio  $S_m$  ed un'omografia  $\Omega''$  tra  $S_{n-l-1}$  - stella ed uno spazio  $S_l$  dell' $S_m$ . Un punto generico  $A$  dell' $S_n$  si rappresenti nell' $S_m$  dalla coppia dei punti  $(A_1, A_2)$  che secondo  $\Omega'$  ed  $\Omega''$ , corrispondono rispettivamente agli spazi che dall' $S_{n-m-1}$  e dall' $S_{n-l-1}$  proiettano il punto  $A$ .*

Segnalo come interessante lo studio delle diverse proprietà che intervengono in questa rappresentazione e dei diversi casi particolari, soprattutto ove negli spazi lineari  $S_n$  ed  $S_m$  s'introduca (proiettivamente) una metrica.

(<sup>7</sup>) Ometto il caso  $l = 1$  che bisognerebbe di una trattazione separata, del tutto analoga a quella svolta (n. 6) per  $n = 3$ .