

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BASILIO MANIÀ

**Sopra una classe di problemi di Mayer considerati
come limiti di ordinari problemi di minimo**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 5 (1934), p. 99-121

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1934__5__99_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOPRA UNA CLASSE DI PROBLEMI DI MAYER
CONSIDERATI COME LIMITI
DI ORDINARI PROBLEMI DI MINIMO ⁽¹⁾

di BASILIO MANIÀ a Pisa

In un lavoro precedente ⁽²⁾ ho dimostrato, sotto opportune ipotesi, l'esistenza di una *curva di massima velocità finale* nella classe delle curve continue e rettificabili congiungenti due punti fissi di uno spazio occupato da un mezzo resistente, ed ho dimostrato inoltre che, detto π il piano verticale passante per i due punti fissi e scelto in questo piano un sistema di assi cartesiani ortogonali con l'asse delle x orizzontale, la curva di massima velocità finale è rappresentabile nella forma

$$y = y(x),$$

con $y(x)$ finita e continua insieme con le sue derivate dei primi due ordini e soddisfacente, con la funzione $u = u(x)$ che dà il quadrato della velocità di un punto materiale che descrive la curva sotto l'azione della gravità e della resistenza del mezzo, a un sistema di due equazioni differenziali, di cui una è l'equazione del problema di MAYER proposto, mentre l'altra è l'analoga dell'equazione di EULERO per il caso dell'*estremo libero* degli integrali in forma ordinaria del calcolo delle variazioni. A questo scopo mi sono servito, con qualche necessaria modificazione, di

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽²⁾ *Sulla curva di massima velocità finale*. In corso di pubblicazione negli « Annali della R. Scuola Normale ».

un metodo già usato da H. LEWY nel caso dell'estremo libero degli integrali regolari.

Qui mi propongo di applicare lo stesso metodo a tutta una classe di problemi di MAYER, per i quali risulterà l'esistenza del minimo assoluto, e, di più, che tale minimo è dato da una curva soddisfacente all'equazione del problema e a un'equazione analoga all'equazione di EULERO per l'estremo libero. Particolarizzando il teorema che qui dimostreremo si ottiene un'estensione dei risultati del LEWY al caso degli integrali *quasi-regolari normali*.

Per questo occorre premettere alcune definizioni.

1. Essendo x, y le coordinate e u una funzione di un punto P mobile sopra una curva continua e rettificabile \mathcal{C} del piano (x, y) , indicheremo con $\dot{x}, \dot{y}, \dot{u}$, le derivate di x, y, u rispetto alla lunghezza s dell'arco iniziale di \mathcal{C} avente in P il secondo estremo.

Diremo *campo* A un insieme limitato o illimitato di punti del piano (x, y) contenente tutti i suoi punti di accumulazione a distanza finita.

Con $f(x, y, y', u)$ indicheremo una funzione finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini per (x, y) appartenente a un dato campo A e y' e u numeri finiti qualunque.

Per semplicità di ragionamento, imporremo ancora alla funzione $f(x, y, y', u)$ la seguente *condizione* α), che poi sostituiremo con altre condizioni le quali estenderanno il campo di applicabilità del nostro teorema :

α) se $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ è una successione di infinite curve del campo A rappresentabili nella forma ordinaria

$$C_n: y = y_n(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

con $y_n(x)$ e $y'_n(x)$ finite e continue in (a, b) , aventi tutte gli stessi punti terminali e convergenti uniformemente a una curva continua e rettificabile di classe 1

$$\mathcal{C}: x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq L);$$

se, per ciascuna curva C_n l'equazione differenziale

$$(1) \quad u' = f(x, y, y', u)$$

ad essa corrispondente ammette una soluzione $u = u_n(x)$ in tutto l'intervallo (a, b) con $u_n(a) = u_0$, essendo u_0 un numero fissato;

se la successione $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ delle lunghezze delle curve $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ converge alla lunghezza L di \mathcal{C} ;

allora la successione $u_1(b), u_2(b), \dots, u_n(b), \dots$ converge a un limite finito o infinito ⁽³⁾.

È evidente che questo limite, di cui si è ammessa l'esistenza, non dipende dalla particolare successione di curve C_n convergente uniformemente alla curva \mathcal{C} , ma soltanto da questa curva.

Si ha un caso in cui la condizione α) è verificata se:

1°) in tutto il campo di definizione della funzione $f(x, y, y', u)$ è

$$f(x, y, y', u) \geq -M + Ny',$$

con M, N numeri non negativi;

2°) posto

$$\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}, u) = f\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, u\right) \dot{x},$$

la funzione $\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}, u)$ risulta finita e continua insieme con la sua derivata prima rispetto ad u , per (x, y) appartenente al campo A , \dot{x}, \dot{y} numeri finiti qualunque non entrambi nulli, e u numero finito qualunque ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ Cfr. H. LEWY - *Über die Methode der Differenzgleichungen...* [Math. Ann. 98 (1928)] pag. 118.

⁽⁴⁾ Ciò si verifica per esempio se è

$$f(x, y, y', u) = a(x, y) + b(x, y) y' + c(x, y, u) \sqrt{1 + y'^2},$$

con $a(x, y), b(x, y), c(x, y, u), c_n(x, y, u)$ funzioni finite e continue per (x, y) appartenente al campo A e u finito qualunque, e tali che sia sempre $b(x, y) \geq 0, c(x, y, u) \geq 0$.

Infatti sulla curva \mathcal{C} che compare nell'enunciato della condizione α) è sempre $\dot{x} \geq 0$, e quindi

$$\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}, u) \geq -M\dot{x} + N\dot{y}$$

per ogni u ; e di qua segue che se indichiamo con $u[s]$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$(2) \quad \dot{u} = \varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}, u)$$

corrispondente alla curva \mathcal{C} , tale che $u(0) = u_0$, questa soluzione, nel suo intervallo di esistenza, risulta limitata inferiormente.

Se la soluzione $u = u[s]$ esiste finita in tutto l'intervallo $(0, L)$, e si indica con $u_n[s]$ la soluzione $u_n(x)$ dell'equazione

$$u' = f(x, y_n, y_n', u)$$

considerata in funzione della lunghezza dell'arco di C_n , la funzione $u_n[s]$ è una soluzione dell'equazione

$$\dot{u} = \varphi(x_n, y_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, u),$$

avendo indicato con

$$x = x_n(s), \quad y = y_n(s), \quad 0 \leq s \leq L_n,$$

la rappresentazione parametrica in funzione dell'arco della curva C_n , e la successione $u_1[s], u_2[s], \dots, u_n[s], \dots$ converge uniformemente a $u[s]$ ⁽⁵⁾: quindi la successione $u_1(b), u_2(b), \dots, u_n(b)$ converge a $u[L]$.

Se invece l'equazione (2) corrispondente alla curva \mathcal{C} non ammette in tutto l'intervallo $(0, L)$ una soluzione $u = u[s]$ con $u[0] = u_0$ e $u[s]$ ovunque finita, considerato il massimo intervallo parziale $(0, l)$ di $(0, L)$ nel cui interno esiste una tale soluzione, la funzione $u = u[s]$ non può rimanere limitata in un intorno di $s = l$, e quindi, essendo sempre limitata inferior-

(5) Vedi loc. cit. (*).

mente, in ogni tale intorno assume valori maggiori di un numero positivo Λ arbitrario.

Ma, allora, da un certo indice n in poi, su ciascuna C_n esiste qualche punto nel quale $u_n > \Lambda$, e perciò

$$u_n(b) > \Lambda - M(b - a) - N\Delta_n,$$

essendo Δ_n la massima differenza fra le ordinate di due punti di C_n .

Da questa disuguaglianza segue subito che $u_n(b)$ tende a $+\infty$ per n tendente a $+\infty$.

2. Per i problemi di MAYER con un'equazione della forma (1) si può dare una classificazione analoga a quella dei problemi dell'estremo libero.

Diremo che il problema di MAYER è *definito positivo* [*negativo*] se è sempre $f(x, y, y', u) > 0$ [$f(x, y, y', u) < 0$]; e invece *semidefinito positivo* [*negativo*] se è sempre $f(x, y, y', u) \geq 0$ [$f(x, y, y', u) \leq 0$].

Il problema di MAYER si dirà *regolare positivo* [*negativo*] se è sempre $f_{y'y'}(x, y, y', u) > 0$ [$f_{y'y'}(x, y, y', u) < 0$]; e invece *quasi-regolare positivo* [*negativo*] se è sempre $f_{y'y'}(x, y, y', u) \geq 0$ [$f_{y'y'}(x, y, y', u) \leq 0$].

Un problema di MAYER quasi-regolare si dirà *normale* se, per ogni punto (x, y, u) fissato, i valori di y' che annullano $f_{y'y'}(x, y, y', u)$ non riempiono alcun intervallo.

Come nel caso dell'estremo libero, se un problema di MAYER del tipo considerato è quasi-regolare e semidefinito, deve essere

$$f(x, y, y', u) \geq 0 \quad \text{e} \quad f_{y'y'}(x, y, y', u) \geq 0,$$

oppure

$$f(x, y, y', u) \leq 0 \quad \text{e} \quad f_{y'y'}(x, y, y', u) \leq 0.$$

3. Prima di enunciare il teorema che ci proponiamo di dimostrare, precisiamo la classe delle curve che prenderemo in considerazione.

Fissati nel campo A due punti P_0, P_1 , e supposto, per semplicità di scrittura, che sia $P_0 \equiv (0, 0)$, $P_1 \equiv (1, c)$, chiameremo *curve ammissibili*:

1°) le curve del campo A congiungenti P_0 e P_1 e rappresentabili nella forma ordinaria

$$(3) \quad y = y(x), \quad (0 \leq x \leq 1),$$

formate da un numero finito di archi di classe 1, e per le quali l'equazione (1) ammette una soluzione $u = u(x)$ continua in tutto l'intervallo $(0, 1)$ con $u(0) = u_0$;

2°) le curve del campo A congiungenti P_0 e P_1 e rappresentabili nella forma parametrica

$$(4) \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

con \dot{x}, \dot{y} finite e continue in $(0, L)$ e $\dot{x} \geq 0$, per le quali esista almeno una successione di curve ammissibili della forma (3) uniformemente convergente a \mathcal{C} e le cui lunghezze convergano alla lunghezza L di \mathcal{C} .

Come valore analogo dei valori $u(1)$ relativi alle curve ammissibili della forma (3), considereremo, per le curve della forma (4), il limite dei valori $u_n(1)$ calcolati sulle curve di una successione del tipo ora indicato. Tale valore, *ammessa la condizione α* , è indipendente dalla particolare successione fissata.

4. Teorema I - *Il campo A sia costituito da tutto il piano (x, y) o da una striscia parallela all'asse delle y ; il problema di MAYER relativo all'equazione*

$$(1) \quad u' = f(x, y, y', u)$$

sia quasi-regolare normale semidefinito positivo;

sia soddisfatta la condizione α ;

ogni curva $y = y(x)$ formata da un numero finito di archi di classe 1, e congiungente i punti fissi P_0 e P_1 , sia ammissibile;

i valori $u(1)$ relativi alle curve ammissibili della forma

(3) tendano a $+\infty$ al tendere a $+\infty$ dalla massima distanza dei punti di queste curve dall'origine delle coordinate.

Allora

1°) nella classe K di tutte le curve ammissibili esiste il minimo assoluto di u (1) dato da una curva continua e rettificabile \mathcal{C}_0 di classe 1.

2°) su ogni arco γ di \mathcal{C}_0 rappresentabile nella forma ordinaria

$$\gamma: y = y(x), \quad (x' \leq x \leq x''),$$

con $y'(x)$ finita e continua nell'intervallo (x', x'') , risulta definita una funzione finita e continua $u(x)$ come limite delle soluzioni $u_n(x)$ della (1) relative a una successione di curve ammissibili C_n convergenti a \mathcal{C}_0 e le cui lunghezze convergono alla lunghezza di \mathcal{C}_0 , e tale funzione insieme con $y(x)$ soddisfa in tutto l'intervallo (x', x'') al sistema differenziale

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = f \\ f_y + f_{y'} f_{y''} = \frac{d}{dx} f_{y'}. \end{array} \right.$$

Fissato un numero positivo n e un numero positivo H , e diviso l'intervallo $(0, 1)$ in n parti uguali, sia \mathcal{D} la classe di tutte le poligonali di n lati aventi in P_0 e P_1 i punti terminali, i cui vertici si proiettano ortogonalmente sull'asse delle x nei punti di divisione dell'intervallo $(0, 1)$ (intendendo che il vertice r -esimo si proietti sul punto $\frac{r}{n}$), e i cui lati hanno coefficienti angolari in valore assoluto non maggiori di H .

Nella classe \mathcal{D} esiste almeno una poligonale minimante relativa al problema proposto e si può fissare una legge per determinare una tale poligonale che indicheremo con π_n .

Se i vertici di π_n sono i punti

$$(x_i, y_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

e si indica con $u(x)$ la soluzione della (1) corrispondente alla poligonale π_n , ragionando come si è fatto nel lavoro citato *sulla curva di massima velocità finale* si ottiene

$$u(1) = u_0 +$$

(5)

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f[x, y_{i-1} + n(y_i - y_{i-1})(x - x_{i-1}), n(y_i - y_{i-1}), u] dx;$$

$$\begin{aligned} (6) \quad & n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y [x, y_{i-1} + n(y_i - y_{i-1})(x - x_{i-1}), n(y_i - y_{i-1}), u] (x - x_{i-1}) dx + \\ & + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_y [x, y_i + n(y_{i+1} - y_i)(x - x_i), n(y_{i+1} - y_i), u] [1 - n(x - x_i)] dx + \\ & + n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y [x, y_{i-1} + n(y_i - y_{i-1})(x - x_{i-1}), n(y_{i+1} - y_i), u] dx - \\ & - n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_y [x, y_i + n(y_{i+1} - y_i)(x - x_i), n(y_{i+1} - y_i), u] dx + \\ & + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_u [x, y_{i-1} + n(y_i - y_{i-1})(x - x_{i-1}), n(y_i - y_{i-1}), u] \frac{\partial u}{\partial y_i} dx + \\ & + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_u [x, y_i + n(y_{i+1} - y_i)(x - x_i), n(y_{i+1} - y_i), u] \frac{\partial u}{\partial y_i} dx = 0, \end{aligned}$$

e ciò per tutti i vertici (x_i, y_i) di π_n per i quali i due lati

adiacenti hanno un coefficiente angolare in valore assoluto minore di H (*).

Le derivate $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ che compaiono nei due ultimi integrali della (6) sono rispettivamente le soluzioni delle due equazioni integrali

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial y_i} = n \int_{x_{i-1}}^x f_y [x, y_{i-1} + n(y_i - y_{i-1})(x - x_{i-1}), \\ n(y_i - y_{i-1}), u] (x - x_{i-1}) dx + \\ + n \int_{x_{i-1}}^x f_{y'} [x, y_{i-1} + n(y_i - y_{i-1})(x - x_{i-1}), n(y_i - y_{i-1}), u] dx + \\ + \int_{x_{i-1}}^x f_u [x, y_{i-1} + n(y_i - y_{i-1})(x - x_{i-1}), n(y_i - y_{i-1}), u] \frac{\partial u}{\partial y_i} dx$$

e

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial y_i} = \frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i} + \\ + \int_{x_i}^x f_y [x, y_i + n(y_{i+1} - y_i)(x - x_i), n(y_{i+1} - y_i), u] [1 - n(x - x_i)] dx - \\ - n \int_{x_i}^x f_{y'} [x, y_i + n(y_{i+1} - y_i)(x - x_i), n(y_{i+1} - y_i), u] dx + \\ + \int_{x_i}^x f_u [x, y_i + n(y_{i+1} - y_i)(x - x_i), n(y_{i+1} - y_i), u] \frac{\partial u}{\partial y_i} dx.$$

(*) La (6) si ottiene, osservando che nell'ipotesi fatta, ad y_i si possono dare delle variazioni di segno arbitrario, purchè sufficientemente piccole in valore assoluto, senza uscire dalla classe \mathcal{D} . Rispetto a queste variazioni il valore $u(1)$ calcolato sulla poligonale π_n è un minimo, e perciò tale è anche il valore di $u(x)$ calcolato nel vertice (x_{i+1}, y_{i+1}) di π_n . Basta scrivere che la derivata di questo valore rispetto ad y_i è nulla per ottenere la (6).

Poichè il problema di MAYER che si considera è supposto semidefinito positivo, su ciascuna curva della classe K rappresentabile nella forma ordinaria (3) la soluzione $u(x)$ della (1) è una funzione monotona non decrescente è quindi $u(1) \geq u_0$; e perciò esiste finito il limite inferiore di $u(1)$ nella classe K .

Inoltre, considerato il valore $u(1)$ corrispondente al segmento $P_0 P_1$ e indicato con L il più grande dei due numeri $|u_0| + 1$ e $|u(1)| + 1$, ci si può limitare a studiare il problema proposto nella sottoclasse \bar{K} formata dalle curve di K rappresentabili nella forma (3) per le quali è sempre $|u(x)| \leq L$ e dalle curve di K rappresentabili nella forma (4) per le quali è $|u(1)| \leq L$.

Ciò posto, indichiamo con A' una parte limitata e chiusa del campo A in modo che su ogni curva di K avente qualche punto esterno ad A' sia $u(1) > L$, e fissiamo un numero $M > 1$ e maggiore anche del massimo valore assoluto di $f(x, y, y', u)$ e delle sue derivate parziali dei primi due ordini per (x, y) appartenente ad A' , $|y'| \leq H$ e $|u| \leq L$.

Allora, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli del lavoro già citato, si trova che se ad y_i si possono dare delle variazioni di segno arbitrario, sufficientemente piccole in valore assoluto, senza uscire dalla classe \mathcal{D} , si ha

$$(9) \quad n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{y'} [x, y_{i-1} + n(y_i - y_{i-1})(x - x_{i-1}), n(y_i - y_{i-1}), u] dx - \\ - n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{y'} [x, y_i + n(y_{i+1} - y_i)(x - x_i), n(y_{i+1} - y_i), u] dx + \\ + \frac{16 \mathfrak{D} M^2 e^{3M}}{n} = 0,$$

con $|\mathfrak{D}| < 1$; e, se a y_i non si possono dare che variazioni di segno positivo, nella (9) il segno di uguaglianza deve essere sostituito dal segno \geq , mentre se non si possono dare a y_i che variazioni di segno negativo, il segno di uguaglianza deve essere sostituito dal segno \leq . Infine se a y_i non si possono dare nè

variazioni positive nè variazioni negative senza uscire dalla classe \mathcal{D} , si deve avere

$$(10) \quad n(y_{i+1} - y_i) = n(y_i - y_{i-1}) = \pm H.$$

Se indichiamo con $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $u^{(i)}$ i valori di x , y , u nel punto di mezzo del lato i -esimo di π_n dalla (9) segue

$$(9') \quad f_{y'}[x^{(i)}, y^{(i)}, n(y_i - y_{i-1}), u^{(i)}] - f_{y'}[x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, n(y_{i+1} - y_i), u^{(i+1)}] + \\ + \frac{16 \mathfrak{D} M^2 e^{3M}}{n} + \frac{4 \mathfrak{D}' M^2 (1 + H)}{n} = 0$$

con $|\mathfrak{D}| < 1$ e $|\mathfrak{D}'| < 1$, e su questa uguaglianza si può ripetere quanto si è detto sulla (9). Si verifica poi facilmente che la (9') è anche soddisfatta se vale la (10).

Posto

$$\Lambda = 4 M^2 (1 + H) + 16 M^2 e^{3M},$$

se vale la (9') si ha

$$(11) \quad |f_{y'}[x^{(i)}, y^{(i)}, n(y_i - y_{i-1}), u^{(i)}] - \\ - f_{y'}[x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, n(y_{i+1} - y_i), u^{(i+1)}]| \leq \frac{\Lambda}{n}.$$

Se a y_i si possono dare soltanto incrementi positivi senza uscire dalla classe \mathcal{D} si ha

$$f_{y'}[x^{(i)}, y^{(i)}, n(y_i - y_{i-1}), u^{(i)}] - \\ - f_{y'}[x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, n(y_{i+1} - y_i), u^{(i+1)}] \geq -\frac{\Lambda}{n};$$

e, poichè nell'ipotesi fatta è

$$n(y_{i+1} - y_i) \geq n(y_i - y_{i-1})$$

ed $f_{y'}(x, y, y', u)$ è una funzione non decrescente di y' , si ha

$$\begin{aligned} & f_{y'}[x^{(i)}, y^{(i)}, n(y_i - y_{i-1}), u^{(i)}] - \\ & - f_{y'}[x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, n(y_{i+1} - y_i), u^{(i+1)}] \leq \\ & \leq f_{y'}[x^{(i)}, y^{(i)}, n(y_{i+1} - y_i), u^{(i)}] - \\ & - f_{y'}[x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, n(y_{i+1} - y_i), u^{(i+1)}] < \frac{2M^2(1+H)}{n} < \frac{\Lambda}{n}. \end{aligned}$$

Dunque anche se a y_i si possono dare soltanto incrementi positivi vale la (11), e analogamente si dimostra questa disuguaglianza se a y_i si possono dare soltanto incrementi negativi.

È importante osservare che il numero Λ , dipendente soltanto da H , si può anche far dipendere soltanto dal massimo dei due valori assoluti $|n(y_i - y_{i-1})|$, $|n(y_{i+1} - y_i)|$.

Dopo di ciò teniamo fisso H e diamo ad n tutti i valori della forma 2^m con m numero intero positivo. Per dimostrare che la corrispondente successione di poligonalità π_n ammette almeno una curva di accumulazione

$$C_H: y = y_H(x), \quad (0 \leq x \leq 1),$$

di classe 1, basta dimostrare che le derivate prime $y'(x)$ calcolate sulle poligonalità π_n sono delle funzioni tali che ad ogni numero ε positivo arbitrario si possono far corrispondere un numero positivo δ e un numero intero positivo \bar{n} , tali che per $n = 2^m$ e $n \geq \bar{n}$ e per ogni coppia di punti x' , x'' dell'intervallo $(0, 1)$ con

$$|x' - x''| \leq \delta$$

la funzione $y'(x)$ calcolata sulla poligonale π_n soddisfi alla disuguaglianza

$$|y'(x') - y'(x'')| < \varepsilon \quad (?).$$

(?) Vedi C. ARZELA - *Sulle funzioni di linee*. [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna, (1899)], pag. 178.

Osserviamo perciò che se (x, y, u) è un punto qualunque con (x, y) appartenente al campo limitato e chiuso A' già fissato e $|u| \leq L$, e se $y'_1 > y'_2$, si ha

$$f_{y'}(x, y, y'_1, u) - f_{y'}(x, y, y'_2, u) > 0,$$

e questa differenza, considerata per tutti i punti (x, y, u) ora indicati e per le coppie y'_1, y'_2 con $y'_1 - y'_2 \geq \varepsilon$ e $|y'_1| \leq H$, $|y'_2| \leq H$, ha un minimo positivo η dipendente da ε .

Osserviamo ancora che se (x', x'') è un qualunque intervallo parziale di $(0, 1)$, in esso, per ogni n , cadono al più $E[(x'' - x')n + 2]$ ⁽⁸⁾ intervalli o parti di intervalli (x_{i-1}, x_i) , e considerate le disuguaglianze (11) relative a intervalli appartenenti completamente o in parte a $(x' x'')$, si ottiene,

$$(12) \quad |f_{y'}[x^{(h)}, y^{(h)}, n(y_h - y_{h-1}), u^{(h)}] - \\ - f_{y'}[x^{(h+1)}, y^{(h+1)}, n(y_{h+1} - y_h), u^{(h+1)}]| \leq \Lambda(x'' - x') + \frac{2\Lambda}{n},$$

essendo x_h e x_k rispettivamente il primo e l'ultimo dei punti x_0, x_1, \dots, x_n , che sono interni all'intervallo (x', x'') .

Dalla (12) segue

$$(12') \quad |f_{y'}[x^{(h)}, y^{(h)}, n(y_h - y_{h-1}), u^{(h)}] - \\ - f_{y'}[x^{(h)}, y^{(h)}, n(y_{k+1} - y_k), u^{(h)}]| \leq \\ \leq M\left(x'' - x' + \frac{1}{n}\right)(1 + H + M) + \Lambda(x'' - x') + \frac{2\Lambda}{n},$$

e quindi se fissiamo \bar{n} e δ tali che per $n > \bar{n}$ e $0 \leq x'' - x' \leq \delta$ il secondo membro di questa disuguaglianza sia minore di η , dalla definizione di η segue

$$|n(y_h - y_{h-1}) - n(y_{k+1} - y_k)| < \varepsilon.$$

⁽⁸⁾ Essendo α un numero reale qualunque, indichiamo con $E(\alpha)$ il massimo intero che non supera α .

Risulta così dimostrato che dalla successione delle π_n se ne può estrarre un'altra convergente uniformemente a una curva C_H di classe 1, e di più questa convergenza è tale che anche le derivate delle funzioni che rappresentano le poligonali della nuova successione convergono uniformemente alla derivata della $y_H(x)$.

Le poligonali π_n (con n della forma 2^m) corrispondenti a un valore fissato di H possono avere anche più di una curva di accumulazione C_H , ma si può stabilire una legge la quale faccia corrispondere ad ogni valore di H un'unica curva C_H ⁽⁹⁾, tale che esista una successione di infinite poligonali π_n convergenti uniformemente a C_H e le cui tangenti convergano uniformemente alle tangenti di C_H .

La curva C_H così determinata dà il minimo di $u(1)$ nella sottoclasse delle curve di K sulle quali è sempre $|y'(x)| \leq H$.

Infatti sulle poligonali π_n convergenti a C_H le funzioni $y(x)$, $y'(x)$, $u(x)$ sono tutte ugualmente limitate e quindi le $u(x)$ sono anche ugualmente continue. Di qua segue subito che la soluzione $u(x)$ dell'equazione (1) corrispondente alla curva C_H è il limite delle soluzioni corrispondenti alle poligonali π_n indicate.

Basta ora ricordare la definizione delle poligonali π_n ed osservare che la soluzione $u(x)$ dell'equazione (1) corrispondente a una qualunque curva ammissibile rappresentabile nella forma ordinaria può essere approssimata con le soluzioni corrispondenti alle poligonali inscritte a questa curva, per concludere che C_H fornisce il minimo di $u(1)$ nella sottoclasse delle curve di K sulle quali è sempre $|y'(x)| \leq H$.

Fissata, ora, una successione $H_1, H_2, \dots, H_p, \dots$ di numeri positivi crescenti tendente a $+\infty$ e la corrispondente successione di curve $C_{H_1}, C_{H_2}, \dots, C_{H_p}, \dots$, si dimostra che tale successione ammette almeno una curva di accumulazione

$$C_0: x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad (0 \leq s \leq L)$$

continua e rettificabile, di classe 1; e che si può estrarre dalla

⁽⁹⁾ Vedi L. TONELLI - *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, I, pag. 84.

successione delle C_H una successione parziale uniformemente convergente a C_0 in modo che anche le tangenti alle curve C_H convergano uniformemente alle tangenti a C_0 .

Per questo è necessario assicurarsi prima di tutto che le lunghezze delle curve C_H restano tutte ugualmente limitate, e ciò si vede riprendendo il ragionamento fatto per dimostrare l'esistenza delle curve C_H . Ivi, fissato ε , i numeri δ ed \bar{n} dipendevano soltanto da H , ma più precisamente, indicato con H' un numero positivo minore di H , se ci limitavamo a considerare per ciascuna poligonale π_n soltanto gli intervalli (x', x'') sui quali è sempre $|y'(x)| \leq H'$, i numeri δ ed \bar{n} si potevano far dipendere soltanto da H' . Ne segue che ad ogni coppia di numeri positivi ε, H' , si può far corrispondere un numero positivo $\delta(\varepsilon, H')$ tale che, per ogni curva C_H fissata e per ogni intervallo (x', x'') di $(0, 1)$ con $0 \leq x'' - x' \leq \delta$ nel quale sia sempre $|y'_H(x)| < H' \leq H$, si abbia

$$|y'_H(x') - y'_H(x'')| \leq \varepsilon.$$

Se le lunghezze delle curve C_H non fossero ugualmente limitate, nella classe di queste curve l'integrale $\int \sqrt{1+y'^2} dx$ e quindi anche l'integrale $\int |y'| dx$ sarebbe illimitato. Perciò, fissato ad arbitrio un numero positivo, per esempio $\delta\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, vi sarebbero infinite curve C_H per le quali esisterebbe almeno un intervallo (x', x'') di $(0, 1)$, con $0 < x'' - x' \leq \delta\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ nel quale $\int |y'| dx$ risulterebbe maggiore del massimo diametro di A' . In un tale intervallo (x', x'') y' non potrebbe essere sempre dello stesso segno nè sempre in valore assoluto minore di 1: vi sarebbe dunque un intervallo (\bar{x}', \bar{x}'') tutto contenuto in (x', x'') con $y'(x)$ uguale a 0 in uno dei due punti (\bar{x}', \bar{x}'') e sempre minore di 1 in valore assoluto. Ma allora dovrebbe essere da un lato

$$|y'(\bar{x}') - y'(\bar{x}'')| \leq \frac{1}{2}$$

e dall'altro lato

$$|y'(\bar{x}') - y''(\bar{x}')| = 1,$$

e ciò è assurdo.

Dunque le lunghezze delle curve C_H sono tutte ugualmente limitate.

Per dimostrare completamente quanto abbiamo affermato relativamente alla curva \mathcal{C}_0 , basta far vedere che sulle curve $C_{H_1}, C_{H_2}, \dots, C_{H_n}, \dots$ le derivate \dot{x}, \dot{y} sono tutte ugualmente continue, e ciò risulta da un ragionamento del LEWY ripetuto nella mia Memoria citata *sulla curva di massima velocità finale*.

Se la curva \mathcal{C}_0 ora determinata è rappresentabile nella forma (3) la soluzione $u(x)$ dell'equazione (1) ad essa corrispondente è il limite delle soluzioni corrispondenti alle C_H della successione parziale uniformemente convergente a \mathcal{C}_0 , e quindi tale curva fornisce il minimo assoluto indicato nell'enunciato. Se, invece, \mathcal{C}_0 non è rappresentabile nella forma (3) essa fornisce il minimo per quanto si è detto nel n. 3 e perchè la successione delle C_H è una successione minimizzante.

È da notare che la condizione α) posta per la funzione $f(x, y, y', u)$ viene sfruttata soltanto in questo punto per attribuire a \mathcal{C}_0 il significato di curva minimante nel caso che tale curva non risulti rappresentabile nella forma (3).

Infine, per giungere alla seconda parte del teorema enunciato, basta dimostrare che su ogni arco γ di \mathcal{C}_0 rappresentabile nella forma ordinaria

$$\gamma: y = y(x), \quad (x' \leq x \leq x''),$$

esiste una funzione $u(x)$, limite delle soluzioni dell'equazione (1) relative alle curve C_H convergenti a \mathcal{C}_0 nel modo indicato, tale che in tutto (x', x'') sia

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} u'(x) &= f[x, y(x), y'(x), u(x)] \\ &+ f_y[x, y(x), y'(x), u(x)] + \\ &+ f_{y'}[x, y(x), y'(x), u(x)] f_u[x, y(x), y'(x), u(x)] = \\ &= \frac{d}{dx} f_{y'}[x, y(x), y'(x), u(x)]. \end{aligned} \right.$$

La dimostrazione di questo fatto è del tutto analoga a quella che abbiamo data per il caso della *curva di massima velocità finale* nel lavoro citato.

5. Facciamo ora alcune osservazioni.

Osservazione I. - Se per ogni arco di curva continua

$$\gamma: y = y(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

con $y'(x)$ finita e continua nell'intervallo (a, b) aperto, dal fatto che nel suo interno sieno soddisfatte le equazioni (13) per qualche funzione $u(x)$, finita e continua insieme con la sua derivata prima nell'intervallo aperto (a, b) e ivi in valore assoluto inferiore a un numero fisso, si può dedurre che la derivata $y'(x)$ esiste finita e continua in tutto l'intervallo (a, b) chiuso, nell'enunciato del teorema precedente si può togliere la condizione α).

La curva \mathcal{C}_0 è di classe 1 ed ha i punti terminali in P_0 e P_1 . Ne segue che esiste almeno un punto P di \mathcal{C}_0 , diverso da P_0 e P_1 , nel quale $y'(x)$ esiste finita. Sia γ il massimo arco di \mathcal{C}_0 contenente P nel cui interno è soddisfatta questa condizione.

Ogni arco chiuso tutto contenuto in γ soddisfa al sistema (13) e quindi tale sistema è soddisfatto nell'intorno di γ . Ma allora $y'(x)$ esiste finita anche negli estremi di questo arco e di qui si deduce che γ deve coincidere con \mathcal{C}_0 , e perciò tale curva è rappresentabile nella forma (3) con $y'(x)$ finita e continua in tutto l'intervallo $(0, 1)$ chiuso.

Si intende che se si ommette la condizione α) si devono considerare come curve ammissibili soltanto le curve della forma (3) composte di un numero finito di archi di classe 1.

Osservazione II. - L'ipotesi che il campo A sia costituito da tutto il piano (x, y) o da una striscia parallela all'asse delle y può essere sostituita dall'altra che il campo A sia limitato da due curve, rappresentabili nella forma $y = y(x)$ con $y'(x)$ finita e continua e concave l'una verso l'altra, e da due segmenti paralleli all'asse delle y ⁽¹⁰⁾.

(¹⁰) Vedi H. LEWY, loc. cit. pag. 114.

Nel caso ora considerato diventa inutile la condizione posta nell'enunciato del teorema relativamente alle curve ammissibili la cui massima distanza dall'origine delle coordinate tende a $+\infty$.

Osservazione III. - Se la funzione $f(x, y, y', u)$ è indipendente da u , nel teorema del n. 4 e nelle osservazioni precedenti si può omettere l'ipotesi

$$f(x, y, y', u) \geq 0.$$

Infatti l'ipotesi che il problema di MAYER considerato fosse semidefinito positivo è servita soltanto ad assicurare che le funzioni $u(x)$ corrispondenti alle curve della classe K sulle quali $u(1)$ è inferiore a un numero fisso, sono ugualmente limitate.

Dunque il teorema e le due osservazioni precedenti sono veri anche per i problemi relativi all'estremo libero degli integrali quasi-regolari normali del calcolo delle variazioni. Si ha così un'estensione agli integrali quasi-regolari normali dei risultati dati dal LEWY per gli integrali regolari.

Osservazione IV. - La condizione relativa alle curve ammissibili la cui massima distanza dall'origine delle coordinate tende a $+\infty$, è soddisfatta se è sempre

$$(14) \quad f(x, y, y', u) \geq \varphi(x, y, y')$$

e se l'integrale

$$(15) \quad \int_C \varphi(x, y, y') dx,$$

calcolato sopra la curva C di classe 1, tende a $+\infty$ al tendere a $+\infty$ della massima distanza di C dall'origine delle coordinate.

Condizioni affinché si verifichi l'ipotesi relative all'integrale $\int_C \varphi(x, y, y') dx$ si trovano nei *Fondamenti di calcolo delle variazioni* del TONELLI ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Vedi loc. cit. Vol. II., pag. 307 e segg.

Osservazione IV.^{bis} - Nell'osservazione precedente basta anche supporre che ad ogni numero positivo M si possa far corrispondere una funzione $\varphi(x, y, y')$ tale che per (x, y) appartenente al campo A , y' finito qualunque e $|u| \leq M$ valga la (14), e tale che l'integrale (15) soddisfi alla condizione ivi indicata.

Osservazione V. - L'ipotesi che esista la soluzione $u(x)$ dell'equazione (1) corrispondente a una qualunque curva del campo A , congiungente i due punti fissi P_0, P_1 , rappresentabile nella forma ordinaria e composta da un numero finito di archi di classe 1, è certamente soddisfatta se a ogni insieme limitato e chiuso I di punti (x, y, y') , con (x, y) appartenente al campo A e y' finito, si possono far corrispondere due costanti positive M_1, M_2 , tali che, per (x, y, y') appartenente a I e u finito qualunque, sia sempre

$$0 \leq f(x, y, y', u) < M_1 u + M_2.$$

Infatti, se

$$C: y = y(x), \quad (0 \leq x \leq 1),$$

è una qualunque delle curve indicate nell'enunciato, e $(0, \xi)$ è il massimo intervallo parziale di $(0, 1)$ nel cui interno esiste la soluzione $u = u(x)$ dell'equazione

$$u' = f(x, y(x), y'(x), u)$$

con $u(0) = u_0$, nell'intervallo $(0, \xi)$ è sempre

$$u'(x) < M_1 u(x) + M_2,$$

e quindi $u(x)$ è limitata in questo intervallo. Di qui segue subito l'asserto.

6. Esempi.

1) Le condizioni del teorema del n. 4 sono soddisfatte dal

problema di MAYER relativo all'equazione

$$u' = 1 + y^2 + \left(1 + \frac{1}{1 + u^2}\right) \sqrt{1 + y'^2}.$$

2) Il problema di MAYER relativo all'equazione

$$u' = 1 + y'^2 + (x^2 + y^2) \sqrt{1 + u^2}$$

soddisfa a tutte le condizioni del teorema del n. 4 meno alla condizione α); ma, in questo caso si può applicare l'*Osservazione I*, perchè la seconda delle equazioni (13) per il problema proposto diventa

$$y\sqrt{1 + u^2} + 2y' \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} = y'',$$

e quindi, posto, per un arco γ e per una funzione $u(x)$ di quelli indicati nell'*osservazione citata*,

$$m(x) = \frac{2u}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad n(x) = \sqrt{1 + u^2},$$

si ha

$$y'' = m(x) y' + n(x),$$

e y' risulta finita e continua su tutto l'arco γ , come si vede applicando la formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine.

7. La curva \mathcal{C}_0 che abbiamo determinata nel Teorema I può non essere rappresentabile nella forma ordinaria per mezzo di una funzione la quale sia finita e continua insieme con la sua derivata prima, e, per conseguenza, abbiamo potuto affermare soltanto che le equazioni (13) sono soddisfatte da archi parziali della curva \mathcal{C}_0 . Perciò è importante l'*Osservazione I*, che indica una condizione sufficiente affinchè l'intera curva \mathcal{C}_0 sia rappre-

sentabile nella forma ordinaria per mezzo di una funzione di classe 1, e soddisfi alle equazioni (13). Quando tale condizione è verificata non è più necessario considerare nella classe K anche le curve non rappresentabili nella forma ordinaria e si può omettere la condizione α) che serviva soltanto a giustificare la introduzione di tali curve.

È dunque opportuno indicare delle condizioni analitiche dalle quali segua l'ipotesi fatta nell'Osservazione I, e tali condizioni si possono ottenere estendendo noti teoremi relativi ai problemi dell'estremo libero. Noi ci limiteremo a estendere il più semplice e più importante di questi teoremi (¹²).

Teorema II. - *Se il problema di MAYER relativo all'equazione differenziale*

$$u' = f(x, y, y', u)$$

è regolare; se ad ogni insieme limitato e chiuso I di punti (x, y, u) si possono far corrispondere due costanti positive Q₁, Q₂, tali che per ogni (x, y, u) di I e per y' finito qualunque, sia sempre

$$(15) \quad \left| \frac{f_y + f_{y'} f_u - f_{y'x} - y' f_{y'y} - f f_{y'u}}{f_{y'y'}} \right| \leq Q_1 y'^2 + Q_2;$$

risulta verificata l'ipotesi dell'Osservazione I, e quindi si può omettere la condizione α) e le equazioni (13) sono soddisfatte sopra tutta la curva \mathcal{C}_0 .

Infatti, preso un arco

$$\gamma: y = y(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

con $y(x)$ finita e continua nell'intervallo (a, b) chiuso e $y'(x)$

(¹²) Tali teoremi si trovano nei *Fondamenti di calcolo delle variazioni* (Vol. II, pag. 359 e segg.) del TONELLI e in una sua recente Memoria: *Sulle proprietà delle estremanti*. [Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, Serie II, Vol. III (1934)] pagg. 213-237.

finita continua nell'intervallo (a, b) aperto, per il quale esista una funzione $u(x)$, finita e continua insieme con la sua derivata prima nell'intervallo aperto (a, b) e ivi limitata, tale che le equazioni (13) risultino soddisfatte per $(a < x < b)$, si vede con un noto ragionamento⁽¹³⁾ che in tutto l'intervallo (a, b) aperto esiste finita e continua la derivata seconda $y''(x)$, data da

$$y'' = \frac{f_y + f_{y'u} - f_{y'x} - y' f_{y'y} - u' f_{y'u}}{f_{y'y'}}.$$

Tenendo conto della prima delle (13) e della (15), si ha allora che nell'interno dell'intervallo (a, b) , è sempre

$$(16) \quad |y''| \leq Q_0 y'^2 + Q_2,$$

essendo Q_1, Q_2 due costanti positive.

Di qua segue⁽¹⁴⁾ che $y'(x)$ resta limitata in tutto l'intervallo (a, b) , e quindi resta limitata anche $y''(x)$. Ne viene che $y'(x)$ esiste finita e continua in tutto l'intervallo (a, b) chiuso, e così risulta dimostrato l'asserto.

Osservazione - Nel teorema precedente basta supporre che per ogni insieme I fissato le condizioni ivi indicate sieno soddisfatte per

$$|y'| \geq Y',$$

essendo Y' un numero positivo, purchè si supponga che la funzione $y'(x)$ sia continua [finita o infinita] su tutto l'arco γ , estremi compresi.

Infatti, a noi basta escludere che nei punti $x = a$ e $x = b$ la $y'(x)$ sia infinita. Supposto, invece, che in uno di questi punti sia infinita, vi sarà tutto intorno di esso nel quale $|y'(x)| > Y'$, e in questo intorno si può ripetere il ragionamento fatto sopra.

⁽¹³⁾ Vedi p. es. L. TONELLI, *Fondamenti*. — Vol. II, pag. 96 e pag. 319.

⁽¹⁴⁾ Vedi L. TONELLI, loc. cit., pag. 363.

Esempio. - Le condizioni del teorema precedente sono soddisfatte dal problema di MAYER relativo all'equazione

$$u' = (1 + y^2) y'^2 + \sqrt{1 + u^2}.$$

In questo caso è

$$f_{y'y'} = 2(1 + y^2) > 0,$$

$$\frac{f_y + f_{y'} f_u - f_{y'x} - y' f_{y'y} - f f_{y'u}}{f_{y'y'}} = \frac{y' u (1 + y^2) - y y'^2 \sqrt{1 + u^2}}{(1 + y^2) \sqrt{1 + u^2}},$$

e le condizioni indicate si verificano facilmente.
