RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

NICOLAS CIORANESCU

Sur l'équation intégrale linéaire à limites fixes et à un paramètre

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 5 (1934), p. 81-98

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1934__5__81_0>

SUR L'ÉQUATION INTÉGRALE LINÉAIRE À LIMITES FIXES ET À UN PARAMÈTRE

par Nicolas Cioranescu *à Bucarest*

Introduction.

Les résultats les plus intéressants qu'on a obtenu dans l'étude de l'équation intégrale :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,ds + f(x), \tag{1}$$

sont relatifs à $\varphi(x)$ considérée comme fonction du paramètre λ et nullement à $\varphi(x)$ en tant que fonction de x. Mais, beaucoup de problèmes d'Analyse, notamment l'intégration de l'equation différentielle linéaire:

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} p_k(x;\lambda)\,\frac{d^k y}{dx^k} = f(x;\lambda), \tag{2}$$

avec les conditions linéaires les plus générales :

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \frac{d^k y}{dx^k}\, d\alpha_{ik}(x;\lambda) = b_i(\lambda) \qquad (i = 0, 1, \ldots n) \tag{3}$$

conduisent (¹) à l'intégration d'une équation fonctionnelle de la forme suivante:

(¹) Voir p. ex. M. Picone: *Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le eq. diff. lineari ordinarie.* [Atti della Reale Accad. Naz. dei Lincei. Vol. XV 1932 p. 942].

$$(4) \qquad \varphi(x;\lambda) = \int_a^b K(x,s;\lambda)\,\varphi(s;\lambda)\,ds + f(x;\lambda).$$

Il y a par conséquent intérêt à étudier les solutions de l'équation intégrale (4) par rapport au paramètre λ avec les hypothèses les plus générales sur la nature des fonctions $K(x,y;\lambda)$, $f(x;\lambda)$ en tant que fonctions de λ (²). Nous allons supposer dans cette étude que ces fonctions sont des fonctions holomorphes de λ dans le cercle C_ρ : $|\lambda| \leq \rho$. Nous montrons l'existence d'une solution holomorphe par rapport à λ dans un cercle concentrique avec C_ρ, et en faisant l'inversion de la relation (4) on introduit le noyau résolvant $\Gamma(x,y;\lambda)$ que nous écrivons ordonné suivant les puissances de λ:

$$\Gamma(x,y;\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n \Gamma_n(x,y),$$

en introduisant ainsi la suite de noyaux $\Gamma_n(x,y)$ qu'on peut considérer comme attachée au noyau $K(x,y;\lambda)$. On pourrait considérer une équation analogue à (4) mais à un nombre quelconque de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et déterminer la nature de $\varphi(x)$ en tant que fonction de paramètres, mais la méthode étant la même nous allons nous borner à l'équation à un seul paramètre.

Étude de la solution autour du point $\lambda = 0$.

1. - Considérons l'équation intégrale :

$$(1,\ 1) \qquad \varphi(x;\lambda) = \int_a^b K(x,s;\lambda)\,\varphi(s;\lambda)\,ds + f(x;\lambda)$$

(²) Le cas du noyau $K(x,y;\lambda)$ linéaire par rapport á λ, a été considèré par M. Th. Angheluтza : *Sur une classe nouvelle de noyaux pour une équation Fredholm.* [Bulletin mathématique de la Soc. roumaine des Sciences, t. 35 (1933) pp. 23-35].

où $K(x, y; \lambda)$ et $f(x; \lambda)$ sont, quelsque soient x et y dans (a, b) des fonctions holomorphes de λ dans $|\lambda| \leq \rho$, soient:

$$(1,\ 2) \qquad K(x, y; \lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n K_n(x, y); \quad f(x; \lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n f_n(x).$$

Cherchons à déterminer $\varphi(x; \lambda)$ sous la même forme:

$$(1,\ 3) \qquad \varphi(x; \lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n \varphi_n(x).$$

En introduisant ces développements dans l'équation (1, 1) on trouve les équations des approximations successives:

$$(1,\ 4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi_0(x) = f_0(x) + \int_a^b K_0(x, s)\, \varphi_0(s)\, ds \qquad \text{avec} \\ & \varphi_n(x) = g_n(x) + \int_a^b K_0(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds \\ & g_n(x) = f_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b K_{n-i}(x, s)\, \varphi_i(s)\, ds. \end{aligned} \right.$$

En considérant ces équations on voit qu'il y a deux cas à distinguer, savoir: $a)$ $K_0(x, y) \neq 0$; $b)$ $K_0(x, y) \equiv 0$.

Considérons le premier cas:

$a)$ $K_0(x, y) \neq 0$. On voit alors que les $\varphi_n(x)$ sont détérminés par des équations intégrales ordinaires de Fredholm dont le noyau est $K_0(x, y)$. Nous allons supposer que $\mu = 1$ n'est pas une valeur caractéristique de l'équation:

$$(1,\ 5) \qquad \varphi(x) = \mu \int_a^b K_0(x, s)\, \varphi(s)\, ds + g(x).$$

Par conséquent chaque équation du système (1, 4) admet une solution unique bien déterminée. Il reste à montrer la convergence du développement (1, 3).

Soit pour cela :

$$(1,\ 5') \qquad \varphi(x) = g(x) + \int_a^b \gamma(x, s)\, g(s)\, ds$$

la solution de l'équation (1, 5) dans le cas $\mu = 1$, qui par hypothèse n'est pas un pôle du noyau résolvant de cette équation. Soit, pour $a \leq x,\ y \leq b$, $|\gamma(x, y)| \leq m$ et $|g(x)| \leq G$. Alors on déduit de (1, 5'), que :

$$(1,\ 6) \qquad |\varphi(x)| \leq [1 + (b - a)\, m]\, G\,.$$

Cela étant dit, revenons aux équations (1, 4) et supposons que pour $a \leq x,\ y \leq b$ et $|\lambda| \leq \rho$ on ait :

$$(1,\ 7) \qquad |K(x, y; \lambda)| \leq M; \qquad |f(x; \lambda)| \leq F.$$

M et F étant indépendents de x et y. Alors il s'ensuit :

$$(1,\ 8) \qquad |K_n(x, y)| \leq \frac{M}{\rho^n}; \qquad |f_n(x)| \leq \frac{F}{\rho^n}.$$

En tenant compte de ces inégalités on déduit de la première équation (1, 4) :

$$|\varphi_0(x)| \leq k_0 F \qquad \text{où} \qquad k_0 = 1 + (b - a)\, m\,,$$

et par conséquent : $|g_1(x)| \leq [1 + (b - a)\, M k_0]\, \dfrac{F}{\rho} = \dfrac{k_1 F}{\rho}$

ce qui entraîne : $|\varphi_1(x)| \leq \dfrac{k_0 k_1 F}{\rho}$.

On trouve de la même manière : $|g_2(x)| \leq \dfrac{k_2 F}{\rho^2}$ où $k_2 = 1 + (b - a)\, M k_0 (1 + k_1)$ et ainsi de suite. En général on a :

$$(1,\ 9) \qquad |g_n(x)| \leq \frac{k_n F}{\rho^n}\,; \qquad |\varphi_n(x)| \leq \frac{k_0\, k_n\, F}{\rho^n}$$

les k_i étant liés par la relation de récurrence :

$$(1,\ 10) \quad k_n = 1 + \alpha(1 + k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1})\,; \quad \alpha = (b-a)\,k_0\, M$$

ce qui donne facilement :

$$(1,\ 10') \qquad k_n = (1+\alpha)^n\,.$$

Il résulte alors de (1, 9) que la sèrie (1, 3) est absolument et uniformément convergente dans le cercle :

$$|\lambda| < \frac{\rho}{1 + (b-a)\, M k_0}\,.$$

Il est bien évident que cette solution holomorphe autour de $\lambda = 0$ est unique, c. à. d. que d'après l'hypothèse faite sur $K_0(x, y)$ l'équation homogène correspondante à $f(x;\lambda) \equiv 0$ ne peut pas avoir d'autres solutions holomorphes que $\varphi(x;\lambda) \equiv 0$.

b) $K_0(x, y) \equiv 0$, $K_p(x, y) \not\equiv 0$.

Dans ce cas les équations des approximations successives sont de la forme suivante :

$$(1,\ 4') \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x) = f_0(x)\,; \quad \varphi_1(x) = f_1(x)\,; \ldots \ \varphi_{p-1}(x) = f_{p-1}(x)\,, \\[2mm] \varphi_n(x) = f_n(x) + \displaystyle\int_a^b \left(\sum_{i=p}^{n} K_i(x, s)\, \varphi_{n-i}(s) \right) ds \end{array} \right.$$

et il n'est pas besoin dans ce cas de résoudre une équation intégrale pour trouver $\varphi_k(x)$. Pour montrer la convergence de la série (1, 3) observons que :

$$|\varphi_0(x)| \leq F\,; \quad |\varphi_1(x)| \leq \frac{F}{\rho}\,; \ldots \quad |\varphi_{p-1}(x)| \leq \frac{F}{\rho^{p-1}}$$

et du second group de p équations de (1, 4′) on déduit :

$$|\varphi_p(x)| \leq \frac{(1+k)F}{\rho^p}; \ |\varphi_{p+1}(x)| \leq \frac{(1+2k)F}{\rho^{p+1}}; \ldots |\varphi_{2p-1}(x)| \leq \frac{(1+pk)F}{\rho^{2p-1}}$$

où $k = (b-a)M$.

Posons partout dans ces inégalités au lieu de $1+k$, $1+2k, \ldots 1+pk$ la même constante $h_1 = 1+pk$, en renforçant ainsi ces inégalités. Soient alors :

$$(1,\ 11) \qquad |\varphi_{\nu p}(x)| < \frac{h_\nu F}{\rho^{\nu p}}; \ldots ; \ |\varphi_{(\nu+1)p-1}(x)| < \frac{h_\nu F}{\rho^{(\nu+1)p-1}}$$

on a entre les constantes h_ν la relation de récurrence :

$$h_\nu = 1 + pk(1 + h_1 + \ldots + h_{\nu-1})$$

ce qui donne : $h_\nu = (1+pk)^\nu$.

Il en résulte que la série (1, 3) converge absolument et uniformément dans le cercle :

$$|\lambda| < \frac{\rho}{1+p(b-a)M}$$

et dans ce domaine il y a aussi unicité de la solution.

Considérons en particulier le noyau qui intervient dans l'équation de Fredholm :

$$K(x, y; \lambda) \equiv \lambda K_1(x, y) \qquad \text{donc } p = 1.$$

Alors si l'on a : $|K_1(x, y)| \leq M_1$ on peut prendre dans C_ρ, $M = \rho M_1$ et le cercle de convergence est :

$$|\lambda| < \frac{\rho}{1+(b-a)\rho M_1}.$$

Mais comme ρ peut être pris aussi grand que l'on veut, la convergence des approssimations successives est assurée pour

$$|\lambda| \leq \frac{1}{(b-a)\,M_1} \qquad [3].$$

2. - *Le cas* $K_0(x, y) \neq 0$.

Considérons à nouveau le premier cas relatif au noyau $K(x, y; \lambda)$ et aux équations des approximations successives correspondantes. Nous allons résoudre ces équations et éliminer de l'expression ainsi trouvée de $\varphi_n(x)$ les $\varphi_k(x)$ $(k \leq n-1)$ qui y entrent. De la première équation (1, 4) on déduit:

$$(2,\ 1) \qquad \varphi_0(x) = f_0(x) + \int_a^b \gamma(x, s)\, f_0(s)\, ds .$$

De la seconde équation intégrale on déduit, après avoir remplacé $g_1(x)$ par son expression:

$$(2,\ 2) \qquad \varphi_1(x) = f_1(x) + \int_a^b \gamma(x, s)\, f_1(s)\, ds + \int_a^b M_1(x, s)\, \varphi_0(s)\, ds$$

où
$$M_1(x, s) = K_1(x, s) + \int_a^b \gamma(x, t)\, K_1(t, s)\, dt.$$

Si l'on remplace dans (2, 2) $\varphi_0(x)$ par son expression (2, 1) on trouve:

$$(2,\ 2) \qquad \varphi_1(x) = f_1(x) + \int_a^b \gamma(x, s)\, f_1(s)\, ds + \int_a^b G_{10}(x, s)\, f_0(s)\, ds$$

où
$$G_{10}(x, y) = M_1(x, y) + \int_a^b M_1(x, t)\, \gamma(t, y)\, dt .$$

[3] Cfr. E. Goursat: *Cours d'Analyse Mathématique*, t. III - III^e éd. p. 346.

Soit en général:

$$\varphi_n(x) = f_n(x) + \sum_{i=0}^{n} \int_a^b G_{ni}(x, s)\, f_i(s)\, ds \tag{2, 3}$$

l'expression de $\varphi_n(x)$ déduite de la résolution de l'équation intégrale correspondante et après l'élimination de $\varphi_k(x)$. Proposons nous de trouver la loi de formation des noyaux $G_{ni}(xy)$. De l'équation intégrale:

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K_0(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds + f_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b K_{n-i}(x, s)\, \varphi_i(s)\, ds$$

on déduit:

$$\varphi_n(x) = f_n(x) + \int_a^b \gamma(x, s)\, f_n(s)\, ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b M_{n-i}(x, t)\, \varphi_i(t)\, dt \tag{2, 4}$$

où l'on a posé:

$$M_k(x, y) = K_k(x, y) + G_k(x, y)\,; \quad G_k(x, y) = \int_a^b \gamma(x, s)\, K_k(s, y)\, ds. \tag{2, 5}$$

Si dans (2, 4) on remplace $\varphi_i(x)$ par son expression supposée trouvée:

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{\gamma=0}^{i} \int_a^b G_{ij}(x, s)\, f_j(s)\, ds$$

on trouve:

$$\varphi_n(x) = f_n(x) + \int_a^b \gamma(x, s)\, f_n(x)\, ds + \tag{2, 6}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b M_{n-i}(x, s)\, f_i(s)\, ds + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} \int_a^b K_{ij}(x, s)\, f_j(s)\, ds$$

où l'on a posé :

$$(2,\ 7) \qquad K_{ij}(x, y) = \int_a^b M_{n-i}(x, t)\, G_{ij}(t, y)\, dt\,.$$

Si nous tenons compte que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} a_{ij}\, x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=j}^{n-1} a_{ij} \right) x_j$$

on peut écrire $\varphi_n(x)$ sous la forme :

$$(2,\ 8) \qquad \begin{aligned} \varphi_n(x) &= f_n(x) + \int_a^b \gamma(x, s)\, f_n(s)\, ds + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b M_{n-i}(x, s)\, f_i(s)\, ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b \left(\sum_{j=i}^{n-1} K_{ji}(x, s) \right) f_i(s)\, ds\,. \end{aligned}$$

En comparant les expressions (2, 3) et (2, 8) de $\varphi_n(x)$ on déduit :

$$(2,\ 9) \qquad \left\{ \begin{aligned} G_{nn}(x, y) &= \gamma(x, y) \\ G_{ni}(x, y) &= M_{n-i}(x, y) + \sum_{j=i}^{n-1} \int_a^b M_{n-j}(x, s)\, G_{ji}(s, y)\, ds\,. \end{aligned} \right.$$

Ces sont les formules de récurrence qui permettent le calcul des noyaux $G_{mn}(x, y)$. Nous allons les écrire sous la forme :

$$(2,\ 10) \qquad G_{n+m,\, m}(x, y) = M_n(x, y) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b M_{n-i}(x, s)\, G_{m+i,\, m}(s, y)\, ds$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, 3, \ldots).$$

On voit que $G_{n+m,\, m}(x, y)$ dépend des functions $G_{\nu+m,\, m}(x, y)$ où ν prend les valeurs de 0 à $n - 1$, mais le second indice reste le même. Il en résulte que l'on a:

$$G_{n+p,\,p}(x, y) \equiv G_{n+q,\,q}(x, y, \ldots)$$

quelques soient les entiers p et q.

On peut par conséquent poser:

$$G_{n+m,\,m}(x, y) \equiv H_n(x, y) \qquad (m = 0, 1, 2), \tag{2, 11}$$

et appeler les fonctions $H_n(x, y)$ les *noyaux itérés* attachés à la fonction $K(x, y; \lambda)$ et à $\gamma(x, y)$.

3. – Proposons nous de trouver des expressions majorantes pour les noyaux itérés en tenant compte des hypothèses (1, 7) faites sur $K(x, y; \lambda)$.

On a tout d'abord:

$$|H_0(x, y)| \equiv |\gamma(x, y)| \leq m.$$

En tenant compte des expression (2, 5) on a ensuite:

$$|M_k(x, y)| \leq \frac{M}{\rho^k} + \frac{(b-a)\,m\,M}{\rho^k} = \frac{k_0\,M}{\rho^k}. \tag{3, 1}$$

$$k_0 = 1 + (b-a)\,m\,.$$

On déduit alors facilement de (2, 10):

$$\begin{aligned} |H_n(x, y)| &\leq \frac{k_0\,M}{\rho^n} + \frac{k_0\,(b-a)\,m\,M}{\rho^n} + \\ &+ \frac{k_0^3\,(b-a)\,M^2}{\rho_n} \sum_{i=1}^{n-1} k_i = \frac{k_0\,k_n}{\rho^n}\,M, \end{aligned} \tag{3, 2}$$

en posant:

$$k_n = 1 + \alpha\,(1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{n-1}); \quad \alpha = (b-a)\,k_0\,M$$

ce qui donne: $\qquad k_n = (1+\alpha)^{n-1}.$

Par conséquent:

$$(3,\ 3) \qquad |H_n(x, y)| \leq \frac{k_0^2 (1+\alpha)^{n-1}}{\rho^n} M .$$

4. - Considérons l'expression (2, 3) de $\varphi_n(x)$ que nous allons écrire en tenant compte de la notation introduite par (2, 11):

$$(4,\ 1) \qquad \varphi_n(x) = f_n(x) + \sum_{i=0}^{n} \int_a^b H_{n-i}(x, s)\, f_i(s)\, ds$$

multiplions ces expression par λ^n et faisons la somme par rapport à n de 0 à l'infini. Si nous posons:

$$(4,\ 2) \qquad \mathcal{H}(x, y;\ \lambda) = \sum_0^{\infty} \lambda^n H_n(x, y)$$

on obtiént ainsi:

$$(4,\ 3) \qquad \varphi(x;\lambda) = f(x;\lambda) + \int_a^b \mathcal{H}(x, s; \lambda)\, f(s; \lambda)\, ds .$$

Tout d'abord la fonction $\mathcal{H}(x, y; \lambda)$ existe et est holomorphe autour de $\lambda = 0$, de sorte que la relation (4, 3) a un sens. En effet, si nous tenons compte des expressions (3, 3) on voit que la série: $k_0^2 M \sum_0^{\infty} |\lambda|^n \frac{(1+\alpha)^n}{\rho^n}$ est majorante pour la série (4, 2). Or, cette série converge si $|\lambda| \leq \frac{\rho}{1+\alpha}$ (cf. § 1 a).

On a par conséquent dans (4, 3) une vraie solution explicite de l'équation intégrale considèrée, et il est évident que $\mathcal{H}(x, y; \lambda)$ est le noyau résolvant de l'equation (1, 1) et la relation (4, 2) nous donne son développement suivant les puissances de λ. Les relations (1, 1) et (4, 3) sont inverses l'une de l'autre.

Remarquons, toujours à propos de la formule (4, 3), que le fait de supposer le terme libre de l'équation (1, 1) comme étant aussi fonction de λ ne change pas la forme de la solution.

Introduisons aussi la fonction:

$$(4,\ 4)\quad \mathcal{M}(x, y\,;\lambda) = \lambda M_1(x, y) + \lambda^2 M_2(x, y) + \ldots + \lambda^n M(x, y) + \ldots$$

En tenant compte des expressions (3, 1) des majorantes de $M_k(x, y)$ on voit que $\mathcal{M}(x, y\,;\lambda)$ existe dans le même cercle C_ρ que $K(x, y\,;\lambda)$. En tenant compte de relation (2, 10) il est facile de voir que $\mathcal{H}(x, y\,;\lambda)$ satisfait à l'équation fonctionnelle:

$$(4,\ 5)\quad \begin{aligned} \mathcal{H}(x, y\,;\lambda) &= \gamma(x, y) + \mathcal{M}(x, y\,;\lambda) + \\ &+ \int_a^b \mathcal{M}(x, s\,;\lambda)\,\mathcal{H}(s, y\,;\lambda)\,ds\,. \end{aligned}$$

5. - *Le cas* $K_0(x, y) \equiv 0\,,\quad K_p(x, y) \not\equiv 0$.

On peut trouver les noyaux itérés en faisant dans les formules du § 2 $K_0(x, y) \equiv 0$ et par conseguent $\gamma(x, y) \equiv 0$ ou par un calcul direct conduit de la même manière.

On arrive aux formules de récurrence:

$$(5,\ 1)\quad \begin{cases} G_{ni}(x, y) = K_{n-i}(x, y) & n - 2p < i \leq n - p \\ G_{ni}(x, y) = K_{n-i}(x, y) + \displaystyle\sum_{j=p}^{n-p-i} \int_a^b K_j(x, s)\, G_{n-j,\,i}(s, y)\,ds & \\ (i = 0, 1, \ldots, n - 2p)\,, & \end{cases}$$

De la même manière on voit que l'on peut poser:

$$(5,\ 2)\qquad G_{n+m+p\,,m}(x, y) = \Gamma_n(x, y)$$

et par conséquent écrire le formules de récurrence ainsi:

$$(5,\ 1')\quad \Gamma_n(x, y) = K_{n+p}(x, y) + \sum_{i=p}^{n} \int_a^b K_i(x, s)\,\Gamma_{n-i}(s, y)\,ds\,.$$

De cette formule on peut obtenir des majorantes pour les noyaux itérés $\Gamma_n(x, y)$, comme au §§ 1, *b* et 2.

On trouve ainsi :

$$(5,\ 3)\quad |\Gamma_{p\nu}(x, y)| < \frac{h_\nu M}{\rho^{p(\nu+)}} ; \ldots \quad |\Gamma_{p(\nu+)-1}(x, y)| < \frac{h_\nu M}{\rho^{p(\nu+2)-1}}$$

avec :

$$h_\nu \doteq 1 + pk(1 + h_1 + h_{\nu-1}) = (1 + pk)^\nu ; \quad k = (b - a) M.$$

Donc :

$$|\Gamma_n(x, y)| < \frac{(1 + pk)^{E\left(\frac{n}{p}\right)}}{\rho^{n+p}} M.$$

Par conséquent la fonction :

$$(5,\ 4)\qquad \Gamma(x, y ; \lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n \Gamma_n(x, y)$$

existe dans le cercle : $|\lambda| < \dfrac{\rho}{1 + pk}$.

En considérant les relations :

$$(5,\ 5)\quad \begin{cases} \varphi_0(x) = f_0(x) ; \ \varphi_1(x) = f_1(x) ; \ldots \ \varphi_{p-1}(x) = f_{p-1}(x) \\ \varphi_{n+p}(x) = f_{n+p}(x) + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \int_a^b \Gamma_{n-i}(x, s)\, f_i(s)\, ds \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

et en multipliant respectivement par : $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \ldots \lambda^{n+p}, \ldots$ on on obtienne en faisant la somme :

$$(5,\ 6)\qquad \varphi(x ; \lambda) = f(x ; \lambda) + \lambda^p \int_a^b \Gamma(x, s ; \lambda)\, f(s ; \lambda)\, ds$$

qui est la solution de l'équation (1, 1) dans ce deuxième cas, solution valable dans le domaine circulaire déterminé. Les cas de l'équation de Fredholm, c. à. d. le cas $K(x, y ; \lambda) \equiv \lambda K_1(x, y)$ conduit sans peine, à l'aide des relations (5, 1') au noyan résolvant bien connu :

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{0}^{\infty} \lambda^n K_1^{(n)}(x, y) .$$

6. – Il est facile d'obtenir l'équation fonctionelle que satisfait $\Gamma(x, y; \lambda)$. Considérons pour cela l'intégrale:

$$(6,\ 1)\qquad \int_a^b K(x, s; \lambda)\,\Gamma(x, y; \lambda)\,ds = \sum_{n=p}^{\infty} \int_a^b \left(\sum_{i=p}^{n-p} K_i(x, s)\,\Gamma_{n-i}(s, y) \right) ds.$$

En tenant compte des formules (5, 1′) on peut ècrire cette relation comme il suit:

$$(6,\ 2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^b K(x, s; \lambda)\,\Gamma(s, y; \lambda)\,ds = \Gamma(x, y; \lambda) - \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^i \Gamma_i(x, y) - \\ &\qquad - \left[\lambda^{-p} K(x, y;\ \lambda) - \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^i K_{p+i}(x, y) \right] \end{aligned} \right.$$

ou en simplifiant:

$$(6,\ 2')\qquad \Gamma(x, y; \lambda) = \int_a^b K(x, s; \lambda)\,\Gamma(s, y; \lambda)\,ds + \lambda^{-p} K(x, y; \lambda) .$$

Si nous considérons la relation (5, 6) comme une équation intégrale pour $f(x; \lambda)$ dont le noyau est $-\lambda^p \Gamma(x, y; \lambda)$, alors $\lambda^{-p} K(x, y; \lambda)$ est le noyau résolvant, et en écrivant la relation (6, 2′) pour ces noyaux on trouve que $\Gamma(x, y; \lambda)$ vérifié aussi l'équation fonctionnelle:

$$(6,\ 3)\qquad \Gamma(x, y; \lambda) = \lambda^{-p} K(x, y \lambda) + \int_a^b K(s, y; \lambda)\,\Gamma(x, s; \lambda)\,ds .$$

D'ailleurs, d'une manière plus générale, si nous appliquons les relations (5, 1) à $-\lambda^p \Gamma(x, y; \lambda)$ considéré comme noyau de l'équation (5, 6) on obtient:

$$(6,\ 4)\qquad \Gamma_n(x, y) = K_{n+p}(x, y) + \sum_{i=p}^{n} \int_a^b K_i(s, y)\, \Gamma_{n-i}(x, s)\, ds$$

formules qui peuvent aussi servir au calcul des noyaux itérés et qui sont complementaires au relation (5, 1′). De ces relations on peut déduire comme au début de ce § l'équation fonctionelle (6, 3) que satisfait $\Gamma(x, y; \lambda)$.

7. - *Étude de la solution, dans un cas particulier, dans le plan du paramètre.*

Considérons l'èquation (1, 1) dans le cas où le noyau $K(x, y; \lambda)$ a la forme suivante :

$$(7,\ 1)\qquad K(x, y; \lambda) = \sum_{1}^{m} X_i(x)\, \Psi_i(y; \lambda)$$

les fonctions $\Psi_i(y; \lambda)$ ainsi que $f(x; \lambda)$ étant des fonctions méromorphes de λ quelsque soient x et y, ayant leurs pôles fixes, et de plus on suppose que $\lambda = 0$ est un point ordinaire pour chacune de ces fonctions. Les fonctions $X_i(x)$ sont supposées linéairement indépendentes, c. à. d. qu'il n'existe pas des fonctions $C_i(\lambda) \neq 0$ telles que l'on ait :

$$\sum_{1}^{m} C_i(\lambda)\, X_i(x) = 0$$

quelsque soient λ et x. Ces noyaux généralisent les noyaux de M. Goursat. Il est facile de voir que la solution a la forme :

$$(7,\ 2)\qquad \varphi(x; \lambda) = f(x; \lambda) + \sum_{1}^{m} \psi_i(\lambda)\, X_i(x)$$

les fonctions $\psi_i(\lambda)$ étant déterminées par le système :

$$(7,\ 3)\qquad \psi_i(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} A_{ki}(\lambda)\, \psi_k(\lambda) - H_i(\lambda) = 0\ ,$$

où :

$$(7,\ 4)\qquad A_{ki}(\lambda)=\int_a^b \psi_i(s;\lambda)X_k(s)\,ds;\quad H_i(\lambda)=\int_a^b \psi_i(s;\lambda)\,f(s;\lambda)\,ds.$$

Les $\psi_i(\lambda)$ étant, comme on voit de (7, 3), des fonctions méromorphos de λ, il en résulte que $\varphi(x;\lambda)$ est aussi une function méromorphe de λ. En particulier, si les fonctions $\psi_i(y;\lambda)$, $f(x;y)$ sont des fonctions rationnelles de λ, il en est de même de la solution $\varphi(x;\lambda)$. C'est une extention du résultat de M. Goursat relatif aux noyaux de la forme:

$$K(x,y;\lambda)=\lambda\sum_1^m X_i(x)\,Y_i(y).$$

8. - *Le noyau $K(x,y;\lambda)$ fonction entière de λ.*

Si nous appliquons les résultats de Fredholm è l'equation:

$$(8,\ 1)\qquad \bar{\varphi}(x)=\mu\int_a^b K(x,y;\lambda)\,\bar{\varphi}(s)\,ds+\bar{f}(x)$$

en faisant ensuite $\mu=1$, on introduit alors la fonction:

$$(8,\ 2)\quad D(\lambda)=1-\int_a^b K(s_1,s_1;\lambda)\,ds_1+\frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}s_1\,s_2\\ s_1\,s_2\end{pmatrix}\lambda\Big)\,ds_1\,ds_2-\ldots$$

où:

$$K\begin{pmatrix}x_1\,x_2\ldots\,x_n\\ y_1\,y_2\ldots\,y_n\end{pmatrix}\lambda\Big)=\|K(x_i,y_k;\lambda)\|.$$

Si $K(x,y;\lambda)$ est une fonction entière de λ, il en est de même de $D(\lambda)$ car la série: $\sum^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}(b-a)^n M^n}{n!}$ est convergente pour tout $\rho=|\lambda|$ fini.

Soit $\Gamma(x,y;\lambda,\mu)$ le noyau résolvant de l'èquation (8, 1). Nous avons montré aux § § 4 et 5 que ce noyau existe même si $\mu=1$, mais alors $|\lambda|$ doit être suffisament petit. Soient de même $D(\lambda, \mu)$, $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \mid \lambda, \mu\right)$ les foctions de FREDHOLM de l'équation (8, 1). Ces sont des fonctions entiéres de μ; nous avons montré que la premiére est aussi fonction entière de λ. Il en est de même de la seconde. En effet, la relation :

$$(8,\ 3) \qquad D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \mid \lambda, \mu\right) = D(\lambda, \mu)\, \Gamma(x, y\,;\, \lambda, \mu)$$

définit $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \mid \lambda, \mu\right)$ sous la forme d'une série

$$(8,\ 4) \qquad \begin{aligned} D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \mid \lambda, \mu\right) &= K(x, y\,;\, \lambda) + \\ &+ \sum_1^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n\,!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\left(\begin{matrix} x\ s_1 \ldots s_n \\ y\ s_1 \ldots s_n \end{matrix}\ \lambda\right) ds_1 \ldots ds_n, \end{aligned}$$

et en y faisant $\mu = 1$ on voit à l'aide du théorème de M. HADAMARD sur la valeur maxima d'un déterminant que cette série est convergente quelque soit λ fini. Alors, on déduit de (8, 3), en faisant $\mu = 1$, $\Gamma(x, y\,;\, \lambda, 1)$ se réduisant à $\mathcal{H}(x, y\,;\, \lambda)$ ou $\Gamma(x, y\,;\, \lambda)$, que ces deux fonctions sont des fonctions méromorphes de λ, dans tout le plan λ. Il en résulte que le premier théoréme de FREDHOLM, relatif à la nature de la solution de l'equation (1, 1), considérée comme fonction du paramètre, reste valable avec $K(x, y; \lambda)$ fonction entière de λ et $f(x\,;\, \lambda)$ fonction méromorphe de λ ayant ses singularités fixes, comme on voit facilement des expressions (4, 3) et (5, 6) de la solution.

9. – *Application aux èquations diffèrentielles linéaires :* Considérons pour simplifier l'équation différentielle :

$$(9,\ 1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = A(x\,;\, \lambda)\, y + f(x\,;\, \lambda)\,.$$

La solution de cette équation satisfaisant aux conditions :

$$\int_a^b y(x)\,d\alpha_0(x) + \int_a^b y'(x)\,d\alpha_1(x) = 0\,;$$

(9, 2)

$$\int_a^b y(x)\,d\beta_0(x) + \int_a^b y'(x)\,d\beta_1(x) = 0$$

est donnée, dans le cas des conditions initiales non - singuliéres par l'équation intégrale ([4]) :

$$(9,\ 3)\qquad y(x) = \int_a^b G(x, s)\,A(s\,;\lambda)\,y(s)\,ds + \int_a^b (x, s)\,f(s, \lambda)\,ds$$

$G(x, s)$ étant la fonction de Green correspondante aux conditions (9, 2).

Il en résulte que si $A(x\,;\lambda)$, $f(x\,;\lambda)$ sont des fonctions holomorphes de λ autour de $\lambda = \lambda_0$ et si l'équation homogène :

$$(9,\ 1')\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = A(x\,;\lambda_0)\,y$$

n'admet que la solution $y \equiv 0$ satisfaisant aux conditions (9, 2), alors la solution de (9, 1) satisfaisant aux conditions (9, 2) est aussi une fonction holomorphe de λ, autour de λ_0. En particulier si $A(x\,;\lambda)$, $f(x\,;\lambda)$ sont des fonctions entiéres de λ, la solution satisfaisant aux conditions précédentes est une fonction méromorphe de λ.

Ces résultats peuvent s'éntendre aux équations (2) et aux conditions (3) que nous avons signalè au début.

([4]) N. Cioranescu : *Sur les conditions linéaires*... [Mathematische Zeitschrift B. 35. S. 608, et « Buletinul Facultatii Stiinte din Cernauti » Vol. V. pp. 99-117]. Voir aussi M. Picone loc. cit. ([1]).