Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Ugo Morin

Sul sistema degli S_h totali di un complesso lineare di S_k

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 5 (1934), p. 24-49

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1934__5__24_0>

SUL SISTEMA DEGLI S_h TOTALI DI UN COMPLESSO LINEARE DI S_k.

di Ugo Morin *a Padova*

Questa nota è dedicata allo studio delle proprietà fondamentali del sistema degli S_h *totali* di un complesso lineare generico di S_k di uno spazio lineare S_n $(n > h > k)$, un S_h dicendosi *totale* per il complesso quando tutti i suoi S_k ne fanno parte. Determino la *dimensione* di questo sistema, che viene data dalla (3) salvo alcuni iuteressanti casi particolari (n.[i] 2-9).

Il sistema degli S_h totali è un sistema lineare, compiutamente rappresentabile mediante un sistema di $\binom{n+1}{h-k}$ equazioni lineari nelle coordinate grassmanniane (n^i 10 — 11), di cui rilevo la covarianza di fronte alle trasformazioni di coordinate.

Nel caso particolare di $k = 1$ quelle $\binom{n+1}{h-1}$ equazioni sono linearmente indipendenti (n^i 13 — 18) ed inoltre la varietà che rappresenta gli S_h totali del complesso lineare di rette, intersezione completa della grassmanniana degli S_h dell'S_n con lo spazio base del sistema degli $\binom{n+1}{h-1}$ iperpiani rappresentati da quelle equazioni, appartiene effettivamente a questo spazio secante, e non, come può accadere per $k > 1$, ad uno spazio di dimensione inferiore (n^i 19 — 21).

1. - Supposta nota la rappresentazione degli S_k di uno spazio lineare S_n mediante i punti della grassmanniana V_d, $(d = (n-k)(k+1))$ di uno spazio lineare S_N, $N = \binom{n+1}{k+1} - 1$, e le proprietà essenziali ad essa inerenti, consideriamo un complesso lineare di S_k dell'S_n.

Se di questo complesso fanno parte tutti gli S_k che si appoggiano ad un dato S_h secondo un S_l qualunque ed appartengono ad un S_t per l'S_h $(l+t>k+h)$ diremo che lo S_h è, per il complesso lineare di S_k dell'S_n, un S_h-*nucleo* di indici (l, t) oppure che l'S_t è uno *spazio nucleato* di indici (l, h).

In particolare se $h<k$ ed $l=h$ faranno parte del complesso tutti gli S_k dell'S_t che passano per l'S_h. Questi si dirà allora uno *spazio singolare dentro l'S_t* del complesso lineare di S_k dell'S_n; e semplicemente *spazio singolare* quando $t=n$.

Se $h>k$ ed $l=k$ saranno parte del complesso tutti gli S_k contenuti nell'S_h che si dirà *spazio totale* del complesso di S_k.

Con la legge di dualità in S_n ad un S_h singolare dentro un S_t di un complesso lineare di S_k corrisponde un S_{n-t-1} singolare dentro un S_{n-h-1} di un complesso di S_{n-k-1}: ed in particolare ad S_h singolari (dentro S_n) corrispondono dualmente S_{n-h-1} totali.

2. - Cerchiamo la dimensione dell'insieme degli S_h-nuclei di indici (l, t) di un complesso lineare *generico* di S_k dell'S_n. Indichiamo con $V_{\binom{h,\,l}{t}}$ la varietà imagine (dentro la grassmanniana V_d degli S_k dell'S_n) degli S_k incidenti un dato S_h in un S_l ed appartenenti ad un S_t per l'S_h; sopprimendo l'indice t quando si abbia $t=n$.

Lo spazio d'appartenenza della $V_{\binom{h,\,l}{t}}$ ha la dimensione [1]

$$\rho=\sum_{s=l+1}^{k+1}\binom{h+1}{s}\binom{t-h}{k-s+1}-1$$

perciò passano per esso nell'S_N $N-\rho$ iperpiani linearmente indipendenti.

Consideriamo l'insieme degli iperpiani dell'S_N ciascuno dei quali contiene almeno una $V_{\binom{h,\,l}{t}}$. Questo insieme algebrico W è *irriducibile*. Infatti esso è mutato in sè dal gruppo infinito, con-

[1] U. Morin. *Contributi alla geometria degli S_k di S_n*. [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, Anno III (1932)].

tinuo e transitivo di omografie dell' S_N corrispondenti alle omografie dall' S_n.

Indichiamo con $N-\nu$ $(\nu \geq 0)$ la dimensione dell'insieme W. L'insieme delle varietà $V_{\binom{h,\,l}{t}}$, cioè (per ogni l) la totalità delle coppie di spazi S_h, S_t $(t > h)$ appartenentisi in S_n ha la dimensione

$$(n-t)(t+1)+(t-h)(h+1)=(n-h)(h+1)+(n-t)(t-h)$$

quindi la totalità delle varietà $V_{\binom{h,\,l}{t}}$ contenute in un iperpiano generico dell' insieme W ha la dimensione

$$D=N-\rho-1+(n-h)(h+1)+(n-t)(t-h)-N+\nu$$

cioè

$$(1)\qquad D=(n-h)(h+1)+(n-t)(t-h)-\sum_{s=l+1}^{k+1}\binom{h+1}{s}\binom{t-h}{k-s+1}+\nu.$$

Se $\nu=0$ cioè se un iperpiano generico per una $V_{\binom{h,\,l}{t}}$ è un iperpiano generico dell' S_N; cioè se un complesso lineare generico di S_k dell' S_n possiede S_h-nuclei di indici $(l,\ t)$, allora la dimensione dell'insieme di questi nuclei del complesso è data da

$$(2)\qquad D=(n-h)(h+1)+(n-t)(t-h)-\sum_{s=l+1}^{k+1}\binom{h+1}{s}\binom{t-h}{k-s+1}$$

Invece $\nu > 0$ significa che un complesso generico di S_k dell' S_n non possiede S_h-nuclei di indici $(l,\ t)$. Ciò accadrà certamenete quando il numero D dato dalla (2) è negativo.

In particolare per gli l'S_h totali la (2) diviene

$$(3)\qquad D=(n-h)(h+1)-\binom{h+1}{k+1}$$

e per quelli singolari

$$(4)\qquad D=(n-h)(h+1)-\binom{n-h}{k-h}.$$

3. – Esponiamo una semplice proprietà di un sistema algebrico irriducibile di S_h di un S_n di dimensione $n-h+i$ ($i \geq 0$) e tale che per un punto generico dell'S_n non passi alcuno spazio S_h del sistema. Allora i punti degli S_h del sistema formano una varietà algebrica dell'S_n, V_{n-j} ($j > 0$), e gli ∞^{i+j} spazi S_h che passano per un punto generico della V_{n-j} sono contenuti nello spazio S_{n-j} tangente alla V_{n-j} in quel punto.

Dualmente (avendo sostituito $n-h-1$ con h) si abbia un sistema algebrico irriducibile di S_h di S_n di dimensione $h+1+i$ ($i \geq 0$) e tale che in un iperpiano generico dell'S_n non sia contenuto alcuno spazio S_h del sistema. Allora gli S_h del sistema contenuti in un particolare iperpiano (purchè questi sia generico per il sistema degli iperpiani che passano per gli S_h del nostro sistema) passano tutti per un medesimo spazio S_{j-1} ($j > 0$).

4. – Vogliamo calcolare la dimensione massima degli S_h totali di un complesso lineare *generico* di S_k dell'S_n. Dalla (3) segue che affinchè un complesso lineare generico di S_k dell'S_n possa avere S_h totali deve essere

$$(n-h)(h+1)-\binom{h+1}{k+1} \geq 0$$

da cui dividendo per $h+1$

$$n \geq h + \frac{h(h-1)\ldots(h-k+1)}{(k+1)!}. \tag{5}$$

Supponiamo che pur essendo soddisfatta questa *condizione necessaria* un complesso lineare generico di S_k dell'S_n non abbia S_h totali; di modo che nella (1) andrà posto $\nu > 0$. In tale caso l'insieme (algebrico irriducibile) degli spazi S_ρ, $\rho = \binom{h+1}{k+1}$, cui appartengono le imagini (dentro la grassmanniana degli S_k dell'S_n) degli S_k contenuti nei diversi S_h dell'S_n si trova nelle condizioni del lemma del n. 3 (caso duale).

Gli infiniti spazi S_ρ di questo sistema che stanno in un iperpiano dell'S_N condotto genericamente per un S_ρ del sistema passano dunque tutti per un punto almeno. Ora due S_ρ generici appartengono ad almeno un iperpiano dell' S_N (perchè il numero degli S_k linearmente indipendenti che si possono estrarre da due S_h qualunque di un S_n $(n > h)$ è inferiore al numero degli S_k linearmente indipendenti dell' S_n, come si vede pensando i due S_h come facce di una piramide fondamentale dell' S_n) quindi saranno incidenti. Questa proprietà di essere sempre incidenti potrà poi estendersi a due S_ρ qualunque del sistema irriducibile.

Ciò significa che nella situazione in cui ci troviamo $\binom{h+1}{k+1}$ spazi S_k linearmente indipendenti di un S_h ed altrettanti S_k linearmente indipendenti di un altro S_h saranno nel loro insieme linearmente dipendenti; ciò che sarà escluso (si pensi ancora a due facce S_h della piramide fondamentale dell' S_n) quando lo spazio comune ai due S_h abbia la dimensione minore di k, cioè

$$n > 2h - k\,. \tag{6}$$

Dunque se oltre ad essere soddisfatta la (5) lo è pure la (6) un complesso lineare generico di S_k dell' S_n contiene S_h totali e la dimensione di questo insieme è data dalla (3). Se invece pur essendo soddisfatta la (5) non lo è la (6) il caso è dubbio e va esaminato direttamente.

5. - Analizziamo quali sono i casi dubbi della conclusione del numero precedente.

1) Per $k = 1$ la (5) dà $2n \geq 3h$ e la (6) dà $n \geq 2h$. La seconda disuguaglianza è più forte della prima: se essa sussiste il complesso generico di rette ammette S_h totali, e la dimensione di questo insieme è data dalla (3), cioè

$$D = \frac{(h+1)(2n-3h)}{2}\,. \tag{7}$$

Quando invece $\frac{3h}{2} \leq n < 2h$ si ha il caso dubbio. Ora per i complessi lineari di rette è già noto ([2]) che la dimensione dello

([2]) S. Kantor. *Teorie der linearen Strahlenkomplexe im Raume von r Dimensionen.* [Journal für Mathematik. Bd. 118 (1897)].

spazio ambiente di un complesso generico che contenga S_h totali è $n \geq 2h$.

II) Per $h = k + 1$ la (5) dà $n \geq k + 2$ e la (6) dà $n > k + 2$. Il caso è quindi dubbio unicamente per $n = k + 2$.

Con la legge di dualità nello S_{k+2} potremo sostituire agli S_{k+1} totali del complesso di S_k i punti singolari di un complesso lineare di rette (n. 1).

Avendo presente che in uno spazio ambiente di dimensione pari un complesso lineare generico di rette ammette un punto singolare, ed in uno spazio di dimensione dispari in generale non ammette; ritornando per dualità alla primitiva interpretazione possiamo affermare:

Se $n = k + 2$ e k è pari un complesso lineare generico di S_k dell' S_n ammette un S_{k+1} totale, invece per k dispari non vi saranno S_{k+1} totali.

III) Per $h = k + 2$ la (5) dà $n \geq \frac{3(k+2)}{2}$ e la (6) da $n > k + 4$. L'unico caso dubbio, in cui la (5) è più debole della (6), con $k > 1$ è $k = 2$, $n = 6$.

Supponiamo che un complesso lineare di piani dell' S_6 possieda un S_4 totale e consideriamo il fascio di S_5 dell' S_6 che ha quell' S_4 come spazio base. In uno di questi S_5 il complesso lineare di piani subordina un complesso di piani che avendo un S_4 totale consta (3) dell'insieme dei piani che tagliano quell' S_4 nelle rette di un complesso lineare di rette. Preso un altro S_5 di quel fascio, i piani del complesso in esso subordinato taglieranno l' S_4 nelle rette di un altro complesso lineare (che potrà essere vincolato al precedente).

Ora due complessi lineari generici di rette di un S_4 hanno in comune un S_2 totale (quindi due complessi *non* generici avranno in comune almeno un S_2 totale). Infatti la retta congiungente i punti singolari dei due complessi è asse di due fasci di piani totali rispettivamente per l'uno e per l'altro dei due complessi; e questi due fasci ammettono un piano π in comune (il

(3) Ciò si vede facilmente direttamente o ricorrendo alla «interpretazione indiretta» del nostro n. 10.

piano intersezione dei due S_3 cui appartengono rispettivamente i due fasci).

Tutti i piani che tagliano il piano π in rette ed appartengono all'uno o all'altro dei due S_5 fanno dunque parte del complesso di piani. Ma allora un piano qualunque incidente π in una retta r fa parte del complesso lineare di piani, perchè può inserirsi in un fascio di piani di cui facciano parte due piani appartenenti rispettivamente all'uno e all'altro dei due S_5 e passanti per r.

Del complesso lineare di piani dell'S_6 farebbe dunque parte la totalità dei piani secanti un S_2 in rette. La nostra formola (1) dà per la dimensione dell'insieme di questi S_2-nucleo di indici (1, 6)

$$D = 4.3 - \sum_{s=2}^{3} \binom{3}{s} \binom{4}{3-s} + \nu = -1 + \nu$$

cioè (n. 2) un complesso lineare di piani dell'S_6 che possieda un S_4 totale non è generico (e quindi avrà ∞S_4 totali).

IV) Infine per $h \geq k + 3$ e $k > 1$ la disuguaglianza (5) è sempre più forte della (6), non potranno cioè più presentarsi dubbi nella applicazione della (3).

Riassumendo: *Perchè un complesso lineare generico di S_k di uno spazio lineare S_n abbia S_h totali il numero D dato dalla* (3) *deve essere positivo o nullo. Questa condizione è pure sufficiente, e allora D è la dimensione dell'insieme degli S_h totali, fatta eccezione dei seguenti casi:*

I) $k = 1, \;\; n < 2h$

II) $h = k + 1, \;\; n = k + 2$ (k dispari)

III) $k = 2, \;\; h = 4, \;\; n = 6$

nei quali pur essendo $D \geq 0$ il complesso generico non ammette S_h totali.

6. – Ad illustrare queste proprietà compiliamo una tabella per i *complessi lineari generici di piani* indicando con n la dimensione dello spazio ambienti, con h la dimensione massima degli spazi totali e con D la dimensione del loro insieme.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
h	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8
D	0	4	8	5	10	4	10	0	7	14	0	8	16	24	6	15

7. - I risultati ai quali siamo pervenuti ai nn. 4 e 5 per per gli spazi totali si estendono per dualità (n. 1) agli spazi singolari. Riassumendoli nelle parti essenziali:

Perchè un complesso lineare generico di S_k *di uno spazio lineare* S_n *abbia* S_h *singolari il numero* D *dato dalla* (4) *deve essere positivo o nullo. Questa condizione è pure sufficiente, e allora* D *è la dimensione dell'insieme degli* S_h *singolari, fatta eccezione dei seguenti casi:*

I) $k = n - 2,\quad n > 2h + 2$

II) $k = 1,\quad h = 0,$ (n dispari)

III) $k = 3,\quad h = 1,\quad n = 6$

nei quali pur essendo $D \geq 0$ *il complesso generico non ammette* S_h *singolari.*

8. - Come abbiamo visto al n. 5, sussistendo la disuguaglianza $n \geq 2h$, la dimensione massima degli S_h totali di un complesso lineare generico di rette di un S_n è $\frac{n}{2}$ se n è pari ed $\frac{n-1}{2}$ se n è dispari. Con questa limitazione la dimensione dell'insieme degli S_h totali di un complesso lineare generico di rette è data dalla (7).

Inoltre è noto (4) che gli S_{h-1} totali sono tutti e soli gli S_{h-1} appartenenti agli S_h totali (ove h non superi la dimensione massima sopra precisata). Osserviamo inoltre che l'insieme degli S_h totali di un complesso lineare generico di rette è un insieme algebrico *irriducibile.*

Infatti la varietà V_t imagine dentro la grassmaniana degli S_h di S_n dell'insieme degli S_h totali del complesso lineare di

(4) S. Kantor loco cit. (2).

rette è mutata in sè dal gruppo infinito continuo transitivo di omografie dell' S_N corrispondente al gruppo delle $\infty^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$ omografie dell' S_n che mutano in sè il complesso lineare di rette (5).

9. – Quale sarà la dimensione del sistema degli S_h totali di un complesso lineare di rette non più generico, ma che ammetta un nucleo S_μ ($n - \mu$ necessariamente pari) di punti singolari?

Si vede facilmente che lo spazio congiungente il nucleo S_μ con uno spazio totale S_m del complesso è pure totale per il complesso. Infatti considerando S_μ ed S_m come facce della piramide delle coordinate dell' S_n, nel loro spazio congiungente vengono a far parte del complesso tutti gli spigoli di questa faccia della piramide fondamentale, perchè questi spigoli hanno col nucleo S_μ almeno un punto in comune oppure sono contenuti nell' S_m.

Quando

$$n - \mu \geq 2h + 2 \tag{8}$$

in uno spazio $S_{n-\mu-1}$ complementare dell' S_μ il complesso lineare di rette subordina un complesso generico che ammette S_h totali. Gli $S_{h+\mu+1}$ che li congiungono col nucleo S_μ sono, per quanto detto sopra, spazi totali del complesso di rette ed un generico S_h totale si proietta dall' S_μ sopra l' $S_{n-\mu-1}$ in un S_h totale del complesso ivi subordinato. Otteremo così la dimensione dell' insieme degli S_h totali del complesso nucleato dell' S_n sommando la dimensione dell' insieme degli S_h totali di un complesso generico di un $S_{n-\mu-1}$ e degli S_h di un $S_{h+\mu+1}$, cioè

$$D' = \frac{(h+1)(2n-2\mu-2-3h)}{2} + (\mu+1)(h+1) = D.$$

Dunque *finchè è soddisfatta la disuguaglianza* (8) *la pre-*

(5) E. Bertini *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* G. [Principato, Messina 1923] pag 122.

senza del nucleo non fa aumentare la dimensione dell'insieme degli S_h totali.

Supponiamo ora che la (8) non sia soddisfatta. Gli spazi totali di dimensione massima del complesso nucleato di rette dell'S_n sono gli $S_{\frac{n+\mu}{2}}$ che dal nucleo S_μ proiettano gli spazi totali di dimensione massima contenuti nell'$S_{n-\mu-1}$ complementare, la cui dimensione è $\frac{n-\mu}{2}-1$.

Gli S_h totali, ove

$$\frac{n-\mu}{2}-1<h\leq\frac{n+\mu}{2},$$

sono contenute negli $S_{\frac{n+\mu}{2}}$ totali ed uno generico appartiene ad uno solo di questi. In questo caso otterremo la dimensione dell'insieme degli S_h totali sommando le dimensioni dell'insieme degli $S_{\frac{n-\mu}{2}-1}$ totali dell' $S_{n-\mu-1}$ e dell'insieme degli S_h di un $S_{\frac{n+\mu}{2}}$ cioè

$$(9)\qquad D''=\frac{(n-\mu)(n-\mu+2)}{8}+\frac{(n+\mu-2h)(h+1)}{2}.$$

Applicando la (9) al caso particolare di n dispari, $\mu=1$ ed $h=\frac{n-1}{2}$ si ottiene

$$D''=\frac{(n+1)(n+3)}{8},$$

che si otterrebbe pure dalla (7) per un complesso generico. Dunque anche in questo caso, in seguito notevole (n. 19), la presenza dell' S_1-nucleo non fa aumentare la dimensione del sistema degli $S_{\frac{n-1}{2}}$ totali.

10. - Consideriamo nello spazio S_{n-h+k} $(k \geq 0,\ h > k)$ determinato dai punti $O_0, O_1, \ldots O_{n-h+k}$ vertici della piramide fondamentale dell' S_n $(O_0, O_1, \ldots O_n)$ un complesso lineare di S_k di equazione

$$\text{(10)} \qquad \sum_0^{n-h+k} A_{r_0 \ldots r_k} X_{r_0 \ldots r_k} = 0 .$$

Questa equazione interpretata direttamente in S_n rappresenta un complesso lineare di S_k per cui l' S_{h-k-1} opposto all' S_{n-h+k} (di vertici $O_{n-h+k+1} \ldots O_n$) è un nucleo di indici $(0, n)$. Oltre agli S_k incidenti questo nucleo fanno parte del complesso tutti gli S_k che dell'S_{h-k-1} nucleo si preiettano sull'S_{n-h+k} opposto in S_k le cui coordinate soddisfano l'equazione (10). In seguito questa interpretazione della (10) dentro l'S_n la chiameremo *diretta.*

Della (10) possiamo dare dentro l'S_n una notevole interpretazione indiretta. Poniamo

$$\text{(11)} \qquad A_{r_0 \ldots r_k} = B_{r_0 \ldots r_k\, n-h+k+1 \ldots n} ,$$

e consideriamo il complesso lineare di S_h dell'S_n di equazione

$$\text{(12)} \qquad \sum_0^{n-h+k}{}_{r_i} B_{r_0 \ldots r_k\, n-h+k+1 \ldots n} X_{r_0 \ldots r_k\, n-h+k+1 \ldots n} = 0 .$$

Esso contiene tutti e soli gli S_h che hanno in comune con l'S_{n-h+k} almeno un S_k del complesso di equazione (10).

Dunque: *L'insieme degli S_h di S_n che passano per gli S_k $(k < h)$ di un complesso lineare contenuto in un S_{n-h+k} forma un complesso lineare.*

In seguito questa interpretazione della (10) dentro *l'S_n* realizzata attraverso la (12) chiameremo *indiretta.*

Osservazione. Oltre a queste due interpretazioni della (10) dentro l'S_n si possono avere delle altre, diciamo intermedie, ove nelle posizioni (11) si introduca solo una parte degli $h-k$ indici $n-h+k+1, \ldots n$ e le equazioni (12) così ottenute si interpretino direttamente in S_n.

11. - Il complesso lineare di S_h dell'S_n (12) formato dagli S_h incidenti l'S_{n-h+k} in S_k del complesso (10) che imaginiamo ivi subordinato da un complesso lineare di S_k dell'S_n di equazione

$$(13) \qquad \sum_0^n {}_{r_i} A_{r_0 r_1 \dots r_k} X_{r_0 r_1 \dots r_k} = 0 \,,$$

contiene tutti gli eventuali S_h totali di questo complesso. Infatti ogni S_h totale del complesso (13) taglia l'S_{n-k+1} in (almeno) un S_k del complesso (10) e tutti gli S_h per questi S_k fanno parte del complesso (12).

Con riferimento agli

$$\binom{n+1}{n-h+k+1} = \binom{n+1}{h-k},$$

spazi S_{n-h+k} della piramide fondamentale, otteniamo altrettanti complessi lineari di S_h che contengono tutti gli S_h totali del complesso di S_k (13). Le equazioni di questi complessi secondo la (12) sono

$$(14) \qquad \Sigma\, A_{r_0 r_1 \dots r_k} X_{r_0 r_1 \dots r_k\, k+1 \dots r_h} = 0$$

ottenendosi le diverse equazioni scegliendo le combinazioni $r_{k+1} \dots r_h$ degli indici $0, 1, \dots n$ negli $\binom{n+1}{h-k}$ modi possibili, e la sommatoria essendo estesa a tutte le combinazioni $r_0, r_1, \dots r_k$ degli $n-h+k+1$ indici rimanenti.

Viceversa ogni S_h comune a tutti i complessi (14) è totale per il complesso lineare di S_k (13). Infatti se un tale $\overline{S}_h$ non fosse totale, gli spazi S_k secondo cui taglia gli $\binom{n+1}{h-k}$ spazi S_{n-h+k} della piramide fondamentale apparterrebbero al complesso lineare di S_k indotto dal dato dentro l'$\overline{S}_h$. Ma allora gli S_{n-h+k} dell'S_n che tagliano l'$\overline{S}_h$ negli S_k di un complesso lineare apparterrebbero ad un complesso lineare, il che è assurdo perchè vi dovrebbero appartenere per quel che precede tutte le facce S_{n-h+k} della piramide fondamentale.

Un complesso generico del sistema lineare di complessi determinato dalle (14) ha per equazione una combinazione lineare di quelle equazioni, quindi i rispettivi coefficienti saranno

$$(15)\qquad A_{r_0 r_1 \dots r_h} = \Sigma (-1)^i A_{r'_0 \dots r'_k} \lambda_{r'_{k+1} \dots r'_h},$$

dove $\lambda_{r'_{k+1} \dots r'_h}$ sono $\binom{n+1}{h-k}$ numeri arbitrari sodisfacenti rispetto agli scambi degli indici alla legge alternante cui sodisfano le coordinate grassmanniane e la sommatoria essendo estesa alle $\binom{h+1}{k+1} = \binom{h+1}{h-k}$ combinazioni $(r'_0 \dots r'_k)$ degli indici $r_0\, r_0 \dots r_h$, ed $(r'_{k+1} \dots r'_h)$ essendone le combinazioni rispettivamente complementari. L'esponente i rappresenta inoltre la classe della sostituzione $\begin{pmatrix} r'_0 \dots r'_k\ r'_{k+1} \dots r'_h \\ r_0 \dots r_k\ r_{k+1} \dots r_h \end{pmatrix}$.

12. - Vogliamo dimostrare che il sistema lineare di iperpiani dell'S_N dato dalle (14) è indipendente dal sistema di coordinate dell'S_n che interviene nella sua costruzione; cioè che di quel sistema fanno parte tutti gli iperpiani imagini dei complessi lineari degli S_k dell'S_n incidenti un S_{n-h+k} fisso qualunque in S_k del complesso lineare (13), ([6]).

Operiamo perciò nell'S_n una generica trasformazione di coordinate

$$(16)\qquad y_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij}\, x_{ij} \ . \qquad (i = 0, 1, \dots n)$$

Sia $\Delta \neq 0$ il determinante di queste equazioni. Il determinante che si estrae da Δ mantenendo le righe $r_0, r_1, \dots r_k$ e le colon-

([6]) Questa dimostrazione è opportuna perchè non sappiamo se la varietà che rappresenta gli S_h totali del complesso lineare di rette, varietà che per quanto precede è l'intersezione completa della grassmanniana di indici (n, h) con lo spazio base del sistema di iperpiani (14), appartiene effettivamente a questo spazio secante oppure ad uno spazio di dimensione minore. In questo n. ometto quei calcoli che si riducono all'applicazione di noti teoremi sui determinanti.

ne $s_0, s_1, \ldots s_k$ indicheremo con $\begin{pmatrix} r_0, r_1, \ldots r_k \\ s_0, s_1, \ldots s_k \end{pmatrix}$ ed il suo complemente algebrico con $\begin{bmatrix} r_0, r_1, \ldots r_k \\ s_0, s_1, \ldots s_k \end{bmatrix}$.

Alle (16) corrispondono nell' S_N in coordinate di punto e di iperpiano le seguenti trasformazioni dirette ed inverse

$$Y_{s_0 s_1 \ldots s_k} = \Sigma_r \begin{pmatrix} s_0 s_1 \ldots s_k \\ r_0 r_1 \ldots r_k \end{pmatrix} X_{r_0 r_1 \ldots r_k} \tag{17}$$

$$X_{r_0 r_1 \ldots r_k} = \Sigma_s \begin{bmatrix} s_0 s_1 \ldots s_k \\ r_0 r_1 \ldots r_k \end{bmatrix} Y_{s_0 s_1 \ldots s_k} \tag{18}$$

$$B_{s_0 s_1 \ldots s_k} = \Sigma_r \begin{bmatrix} s_0 s_1 \ldots s_k \\ r_0 r_1 \ldots r_k \end{bmatrix} A_{r_0 r_1 \ldots r_k} \tag{19}$$

$$A_{r_0 r_1 \ldots r_k} = \Sigma_s \begin{pmatrix} s_0 s_1 \ldots s_k \\ r_0 r_1 \ldots r_k \end{pmatrix} B_{s_0 s_1 \ldots s_k}\,, \tag{20}$$

Partiamo da un' equazione del tipo (14) costruita nel nuovo sistema di coordinate

$$\Sigma_s\, B_{s_0 s_1 \ldots s_k}\, Y_{s_0 s_1 \ldots s_k\, s_{k+1}\, s_h} = 0\,, \tag{21}$$

dove gli indici $s_{k+1}, \ldots s_h$ sono fissi ed i coefficienti B sono stati dedotti dai coefficienti A della (13) mediante le (19). Ma ora questi B sono nella (21) coefficienti di un complesso lineare di S_k, quindi agli indici scritti $s_0, s_1, \ldots s_k$ vanno associati, analogamente alle posizioni (11), gli indici fissi $s_{k+1}, \ldots s_h$.

Per avere i valori dei coefficienti della (21) nel vecchio sistema di coordinate dobbiamo operare con le (20) (con h al posto di k)

$$\tag{22} \left\{ \begin{aligned} A_{r_0 r_1 \ldots r_h} &= \Sigma_s \begin{pmatrix} s_0 \ldots s_k\; s_{k+1} \ldots s_h \\ r_0 \ldots r_k\; r_{k+1} \ldots r_h \end{pmatrix} B_{s_0 \ldots s_h} = \\ &= \Sigma_{\bar r}\, \Sigma_s \begin{pmatrix} s_0 \ldots s_k\; s_{k+1} \ldots s_h \\ r_0 \ldots r_k\; r_{k+1} \ldots r_h \end{pmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \ldots s_k \\ \bar r_0 \ldots \bar r_k \end{bmatrix} A_{\bar r_0 \ldots \bar r_k}\,. \end{aligned} \right.$$

Sviluppando secondo le prime $k+1$ righe il determinate che figura nella (22) si avrà

$$\begin{pmatrix} s_0 \dots s_k \, s_{k+1} \dots s_h \\ r_0 \dots r_k \, r_{k+1} \dots r_h \end{pmatrix} = \Sigma (-1)^i \begin{pmatrix} s_0 \dots s_k \\ r'_0 \dots s'_k \end{pmatrix} \lambda r'_{k+1} \dots r'_k \,,$$

dove abbiamo posto $\lambda_{r'_{k+1} \dots r'_h}$ per il minore $\begin{pmatrix} s_{k+1} \dots s_h \\ r'_{k+1} \dots r'_h \end{pmatrix}$, posizione legittima perchè dentro la (22) gli indici $s_{k+1}, \dots s_h$ sono fissi; la sommatoria essendo estesa a tutte le $\binom{h+1}{k+1} = \binom{h+1}{h-k}$ combinazioni $(r'_0 \dots r'_k)$ degli indici $r_0, r_1, \dots r_h$, $(r'_{k+1}, \dots r'_h)$ essendone combinazioni rispettivamente complementari; ed infine l'esponente i rappresentando la classe delle sostituzione

$$\begin{pmatrix} r'_0 \dots r'_k \, r'_{k+1} \dots r'_k \\ r_0 \dots r_k \, r_{k+1} \dots r_k \end{pmatrix} .$$

Osservando inoltre che la

$$\Sigma_S \begin{pmatrix} s_0 \, s_1 \dots s_k \\ r'_0 \, r'_1 \dots r'_h \end{pmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \, s_1 \dots s_k \\ \bar{r}_0 \, \bar{r}_1 \dots \bar{r}_k \end{bmatrix} ,$$

è nulla tranne se le due combinazioni $(r'_0 \, r'_1 \dots r'_k)$ $(\bar{r}_0 \, \bar{r}_1 \dots \bar{r}_k)$ coincidono, nel qual caso è uguale a Δ, la (22) diviene

$$A r_0 \, r_1 \dots r_h = \Delta \, \Sigma (-1)^i A r'_1 \dots r'_k \, \lambda r'_{k+1} \dots r'_h \,,$$

che confrontata con le (15) ci dice che l'iperpiano di equazione (21) appartiene al sistema lineare degli iperpiani di equazioni (14).

c. d. d.

13. – Se la (13) rappresenta un complesso lineare di rette

(23) $$\Sigma \, a r_0 \, r_1 \, x r_0 \, r_1 = 0 \,,$$

le (14) divengono

(24) $$\Sigma \, a r_0 \, r_1 \, X r_0 \, r_1 \, r_2 \dots r_h = 0 \,,$$

la sommatoria essendo estesa a tutte le combinazioni $(r_0\, r_1)$ degli $n - h + 2$ indici che si ottengono sopprimendo dagli $0, 1, \ldots n$ gli indici $r_2, \ldots r_h$, ottenendosi $\binom{n+1}{h-1}$ di queste equazioni prendendo in tutti i modi possibili le combinazioni $r_2 \ldots r_h$. Una di queste equazioni rappresenta il complesso lineare degli S_h di S_n che passano per le rette del complesso lineare (23) contenute nell' S_{n-h+1} della piramide fondamentale opposto ai vertici $Or_2 \ldots Or_h$.

14. – Dimostriamo che gli $\binom{n+1}{h-1}$ complessi lineari di S_h di equazioni (24) sono linearmente indipendenti se il complesso lineare di rette (23) è generico ed è $n \geq 2h - 1$.

Un iperpiano generico della stella di iperpiani dell' S_N determinata dalle (24) ha per equazione una combinazione lineare di quelle equazioni, quindi i rispettivi coefficienti, analogamente alle (15), saranno dati dalle

$$A r_0\, r_1 \ldots r_h = \Sigma\, (-1)^i\, a s_0\, s_1\, \lambda s_2 \ldots s_h\,, \tag{25}$$

dove $\lambda s_2 \ldots s_h$ sono $\binom{n+1}{h-1}$ numeri arbitrari soddisfacenti rispetto agli scambi degli indici alla legge alternante cui soddisfano le coordinate grassmanniane e la sommatoria essendo estesa alle $\binom{h+1}{2}$ combinazioni $(s_0\, s_1)$ degli indici $r_0, r_1, \ldots r_h$, $(s_2 \ldots s_h)$ essendone le combinazioni rispettivamente complementari. Infine l'esponente i rappresenta la classe della sostituzione $\begin{pmatrix} s_0\, s_1\, s_2 \ldots s_h \\ r_0\, r_1\, r_2 \ldots r_h \end{pmatrix}$, di modo che il fattore $(-1)^i$ potrà sopprimersi ove si abbia l'avvertenza di disporre in modo opportuno gli indici $(s_0\, s_1)$.

La indipendenza lineare del sistema di equazioni (24) è equivalente alla incompatibilità del sistema di equazioni lineari omogenee nelle λ

$$\Sigma\, a s_0\, s_1\, \lambda s_2 \ldots s_h = 0\,, \tag{26}$$

la sommatoria avendo il significato ora esposto per le (25). Il numero delle equazioni (26) è uguale a quello delle combinazioni $(s_0\, s_1\, s_2 \dots s_h)$ degli indici $0, 1, \dots n$, cioè $\binom{n+1}{h+1}$.

Da questo sistema (26) possiamo estrarre $\binom{2h}{h+1}$ equazioni limitando la costruzione delle combinazioni $(s_0\, s_1\, s_2 \dots s_h)$ a $2h\,(\leq n+1)$ indici prescelti arbitrariamente dagli indici $0, 1, \dots n$. Indichiamo uno di questi sistemi di equazioni estratte dalle (26) con Γ.

Se ogni sistema di equazioni Γ estratte dalle (26) è incompatibile nelle λ lo sarà vieppiù il sistema (26), perchè qualunque equazione (26) è inscritta in qualche sistema di equazioni Γ.

Considerare $2h$ degli indici $0, 1, \dots n$ per ricavare dal sistema (26) un sistema Γ equivale a fissare un S_{2h-1} della piramide fondamentale dell'S_n: il sistema Γ è precisamente il sistema (26) costruito con riferimento al complesso lineare di rette subordinato dal (23) in quell'S_{2h-1}.

Poichè l'indipendenza lineare delle equazioni (24) e la incompatibilità delle equazioni (26) sono equivalenti, e dalla incompatibilità dei sistemi Γ segue l'incompatibilità delle (26), possiamo affermare: *Se le equazioni* (24) *sono linearmente indipendenti ove si costruiscano per un complesso lineare generico di rette di un* S_{2h-1}, *saranno linearmente indipendenti ove si costruiscano per uno spazio* S_n *con* $n > 2h-1$.

Si tenga presente che per un S_{2h-1} avendosi $\binom{2h}{h-1} = \binom{2h}{h+1}$ il numero delle equazioni (24) è uguale al *numero massimo* di complessi lineari di S_h dell'S_{2h-1} linearmente indipendenti.

15. – Verifichiamo che un sistema di equazioni Γ è incompatibile per $h=2$. Per $h=2$ ed $n=2h-1=3$ le $\binom{2h}{h-1}=4$ equazioni (26) sono

$$
(27)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
a_{12}\lambda_0 + a_{20}\lambda_1 + a_{01}\lambda_2 & & & = 0 \\
a_{13}\lambda_0 + a_{30}\lambda_1 & & + a_{01}\lambda_3 & = 0 \\
a_{23}\lambda_0 & + a_{30}\lambda_2 & + a_{02}\lambda_3 & = 0 \\
 & a_{23}\lambda_1 + a_{31}\lambda_2 & + a_{12}\lambda_3 & = 0\,,
\end{array}
\right.
$$

Si constata facilmente che il determinante del sistema (27) è il quadrato del pfaffiano

$$P_{0123} = a_{01}\, a_{23} + a_{02}\, a_{31} + a_{03}\, a_{12}\,,$$

diverso da zero poichè il complesso lineare di rette dell' S_3 è generico.

I complessi (24) sono quindi linearmente indipendenti per $h = 2$ e, per la conclusione del numero precedente, per qualunque $n \geqq 3$.

16. - Supponiamo ora che i complessi (24), in cui per la conclusione del n. 15 è sufficiente di considerare il caso $n = 2h-1$, siano linearmente indipendenti fine ad un certo valore di h. Facciamo vedere che ciò accade di conseguenza per il valore successivo $h+1$.

Consideriamo le equazioni (24) costruite per gli S_{h+1} di un S_{2h+1}, in relazione ad un complesso lineare di rette (23) generico dell' S_{2h+1}. Sia O un punto qualunque dell' S_{2h+1}. Nel suo iperpiano S_{2h} polare (nel sistema nullo associato al complesso lineare generico di rette) passante per O prendiamo un S_{2h-1} generico. Le rette del complesso subordinato nell' S_{2h} dal complesso di rette (23) appartengono ai piani totali che dal punto singolare (dentro l' S_{2h}) O proiettano le rette del complesso generico subordinato dal (23) nell' S_{2h-1}.

Le equazioni del tipo (24) costruite per gli S_h di questo S_{2h-1} (in relazione al complesso lineare di rette ivi subordinato dal (23) dell' S_{2h+1}), di cui ognuna rappresenta il complesso lineare degli S_h dell' S_{2h-1} incidenti un dato $\overline{S}_h$ (poichè $n = 2h-1$, $n-h+1 = h$) in rette del complesso lineare (23), interpretate *direttamente* (n. 10) nell' S_{2h} polare di O rappresentano complessi lineari di S_h, di cui ciascuno è formato dagli S_h che hanno in comune con l' $\overline{S}_{h+1}$, congiungente il punto singolare O coll' $\overline{S}_h$, rette del complesso (23). Queste equazioni interpretate ora *indirettamente* (n. 10) nell' S_{2h+1} rappresentano complessi lineari di S_{h+1}, di cui uno è formato dagli S_{h+1} che hanno in comune con l' $\overline{S}_{h+1}$ sopra considerato rette del complesso (23): appartengono cioè al sistema lineare delle equazioni (24) costruite per gli S_{h+1} dell' S_{2h+1}.

Ma le equazioni del tipo (24) costruite per gli S_{h-1} dell' S_{2h-1} essendo per ipotesi linearmente indipendenti, ed il loro numero $\binom{2h}{h-1} = \binom{2h}{h+1}$ essendo uguale al numero massimo dei complessi lineari di S_h dell' S_{2h-1} linearmente indipendenti, mediante una loro combinazione lineare potremo rappresentare un complesso lineare qualunque di S_h dell' S_{2h-1}, in particolare un complesso speciale formato dagli S_h incidenti un dato $\overline{S}_{h-2}$. Questi complessi speciali interpretati come precedentemente prima direttamente nell' S_{2h} e poi indirettamente nell' S_{2h+1} sono nella definitiva interpretazione complessi speciali formati dagli S_{h+1} dell' S_{2h+1} incidenti l' $\overline{S}_{h-1}$ congiungente O con l' S_{h-2}.

Dunque del sistema lineare di complessi di equazioni (24), costruite per gli S_{h+1} di un S_{2h+1}, fanno parte tutti i complessi speciali il cui nucleo è un $\overline{S}_{h-1}$ del tipo di quello ora costruito. In questo $\overline{S}_{h-1}$ il complesso di rette (23) subordina un complesso di rette avente il punto O come punto singolare, e nel resto generico. Ma anche viceversa, preso un S_{h-1} in cui il complesso subordini un complesso con un punto singolare e nel resto generico, chiamato O questo punto, poichè l' S_{2h} polare di O contiene l' S_{h-1}, su questi può eseguirsi la costruzione sopra eseguita per l' $\overline{S}_{h-1}$.

Se h è dispari, cioè $h - 1$ pari (poichè un complesso di rette generico possiede in uno spazio di dimesione pari un punto singolare) l' $\overline{S}_{h-1}$ è uno spazio generico dell' S_{2h+1}: quindi del sistema lineare (24) di complessi di S_{h+1} fanno parte tutti i complessi speciali dell' S_{2h+1}, cioè [7] le equazioni (24) sono linearmente indipendenti.

[7] Si tenga presente che i coefficienti dell' equazione di un complesso lineare speciale di S_h di un S_n sono le coordinate grassmanniane dell' S_{n-h-1} nucleo del complesso, e che il numero degli S_{n-h-1} linearmente indipendenti dell' S_n è uguale al numero degli S_h linearmente indipendenti dell' S_n, cioè uguale al numero massimo di complessi lineari di S_h dell' S_n linearmente indipendenti.

17. – Supponiamo ora che h sia pari, cioè $h-1$ *dispari.* Allora l' $\overline{S}_{h-1}$ nucleo del complesso speciale di S_{h+1} costruito al numero precedente non è più uno spazio generico dell' S_{2h+1}, ma fa parte del *complesso lineare* degli S_{h-1} nucleati del complesso lineare di rette il cui nucleo ($h-1$ essendo dispari) è una retta almeno.

Che l'insieme degli S_{h-1} nucleati ($h-1$ dispari) di un complesso lineare generico di rette formi un complesso lineare risulta dall'osservare che la dimensione di questo insieme è $(n-h+1)\,h-1$ (applicando la (2) per $k=1$, $h=1$, $l=0$, $t=h-1$) e che gli S_{h-1} nucleati contenuti in un S_h generico passano tutti per il punto [8] singolare del complesso di rette ivi subordinato.

Per una opportuna scelta della piramide delle coordinate nell' S_{2h+1} l'equazione (23) del complesso lineare di rette diviene [9]

$$x_{0,\,2h+1}+x_{1,\,2h}+\ldots+x_{h,\,h+1}=0\,. \tag{28}$$

Del complesso lineare di rette (28) fanno parte tutti gli spigoli della piramide fondamentale, fatta eccezione delle $h+1$ rette che congiungono le coppie di vertici

$$O_0\,O_{2h+1},\ O_1\,O_{2h},\ldots\ O_h\,O_{h+1}\,. \tag{29}$$

Sono quindi spazi nucleati per il complesso di rette (28) tutte le facce S_{h-1} della piramide fondamentale fatta eccezione di quelle determinate da $\frac{h}{2}$ (h pari) delle $h+1$ copie di vertici (29). Se l'equazione del complesso lineare degli S_{h-1} nucleati del complesso di rette (28) è

$$\Sigma\, A r_0\, r_1 \ldots r_{h-1}\, X r_0\, r_1 \ldots r_{h-1}=0\,, \tag{30}$$

[8] La proprietà che gli S_k di un complesso contenuti in un S_{k+1} passino tutti per un punto è *caratteristica* per i complessi *lineari.* S. Kantor loco cit. [2].

[9] E. Bertini loco cit. [5] pag. 125.

saranno diversi da zero i coefficienti i cui indici corrispondono a spazi S_{h-1} non nucleati della piramide fondamentale, e nulli tutti i coefficienti i cui indici corrispondono a spazi S_{h-1} nucleati della piramide. Per togliere l'ambiguità di segno nei coefficienti non nulli usiamo l'avvertenza di ordinare gli indici $r_0 r_1 \ldots r_{h-1}$ in modo che gli indici di una coppia (29) siano susseguenti e dando la precedenza dentro la coppia al più basso dei due. I valori dei coefficienti della (30) potranno così dipendere soltanto dalle particolari coppie (29) che figurano nei loro indici.

Ma l'equazione (28) è simmetrica rispetto a queste coppie, quindi lo sarà pure la (30) da essa determinata, cioè nella (30) i coefficienti saranno uguali tra loro, se vogliamo uguali all'unità. La (30) si scriverà allora

$$(31) \qquad \Sigma X_{r_0,\, 2h+1-r_0,\, \ldots\, r_{\frac{h-2}{2}},\, 2h+1-r_{\frac{h-2}{2}}} = 0\,,$$

la sommatoria essendo estesa a tutte le combinazioni che si possono formare con $\frac{h}{2}$ delle coppie (29), osservando le avvertenze predette.

Ricordiamo che l'equazione di un complesso lineare speciale di S_{h+1} di un S_{2h+1} è

$$(32) \qquad \Sigma X_{r_0 r_1 \ldots r_{h-1}} Y_{s_0 s_1 \ldots s_{h+1}} = 0\,,$$

dove $(r_0 r_1 \ldots r_{h-1} s_0 s_1 \ldots s_{h+1})$ è una permutazione degli indici $0, 1, \ldots 2h+1$, X le coordinate grassmanniane dell'S_{h-1}-nucleo, Y le coordinate variabili degli S_{h+1} incidenti il nucleo, la sommatoria andando estesa a tutte le combinazioni $(r_0 r_1 \ldots r_{h-1})$ degli $2h+2$ indici.

Gli iperpiani dell'S_N imagini dei complessi speciali (32) i cui nuclei hanno coordinate X soddisfacenti alla (31) passano dunque tutti per il punto P dell'S_N le cui coordinate $Y_{s_0 s_1 \ldots s_{h+1}}$ sono eguali ad *uno* quando la combinazione $(s_0 s_1 \ldots s_{h+1})$ è complementare di una delle combinazioni degli indici delle X dentro la (31) e *zero* negli altri casi (e viceversa).

Scriviamo un equazione del sistema (24) per gli S_{h+1} dell'S_{2h+1} in relazione al complesso lineare di rette di equazione

(28), appoggiandoci ad una faccia S_{h+1} della piramide fondamentale non nucleata per il complesso di rette, ad esempio quella determinata dai vertici

$$O_{\frac{h}{2}}\, O_{\frac{3h}{2}+1}\,, \ldots\, O_h\, O_{h+1}\,.$$

L' equazione sarà allora

$$\sum_{i=\frac{h}{2}}^{h} X_{0,\,2h+1\,,\,\ldots\,\frac{h-2}{2},\,\frac{3h}{2}+2,\,i,\,2h+1-i} = 0\,.$$

Si vede che le coordinate del punto P non soddisfano a questa equazione $(1+1+\ldots+1 \neq 0)$. Del sistema d'iperpiani (24) fanno dunque in questo caso parte tutti gli iperpiani passanti per il punto P ed anche l' iperpiano ora considerato che non passa per quel punto, cioè tutti gli iperpiani dell' S_N.

Così, come al numero precedente per h dispari, anche nel caso di h pari le equazioni (24) supposte linearmente indipendenti fino ad un certo valore di h lo sono anche per il valore successivo, e poichè sono linearmente indipendenti per $h = 2$ (n. 16) lo saranno per ogni valore di h. E ricordiamoci che per la conclusione del n. 15 ciò vale per ogni $n \geq 2h - 1$.

18. - Dimostriamo infine che il numero $\binom{n+1}{h-1}$ dei complessi (24) è effettivamente il numero *massimo* di complessi lineari di S_h linearmente indipendenti che contengono tutti gli S_h totali di un complesso lineare generico di rette di un S_n $(n \geq 2h)$. Ciò equivale a verificare che la varietà imagine (dentro la grassmanniana V_d degli S_h dell' S_n) di quegli S_h totali, ottenuta come intersezione completa della V_d con lo spazio base del sistema d' iperpiani (24) appartiene effettivamente a questo spazio secante, e non ad uno spazio di dimensione minore.

Supponiamo dapprima di avere un complesso lineare di rette dell' S_n che abbia il vertice O_n della piramide fondamentale come punto singolare e che sia ulteriormente generico. Se n è pari questo complesso sarà ancora un complesso *generico* dell' S_n; invece se n è dispari sarà il complesso *particolare* le cui rette appartengono ai piani totali che al punto singolare O_n proiettano le rette di un complesso generico subordinato in un S_{n-1} complementare di O_n. Sia

$$(33) \qquad \sum_{0}^{n}{}_r A_{r_0 r_1 \dots r_h} X_{r_0 r_1 \dots r_h} = 0 ,$$

l'equazione di un complesso generico che contiene tutti gli S_h totali del complesso di rette. Scindiamo la sommatoria in

$$(34) \quad \sum_{0}^{n-1}{}_r A_{r_0 r_1 \dots r_h} X_{r_0 r_1 \dots r_h} + \sum_{0}^{n-1}{}_r A_{r_0 \dots r_{h-1} n} X_{r_0 \dots r_{h-1} n} = 0,$$

e consideriamo separatamente le due equazioni

$$(35) \qquad \sum_{0}^{n-1}{}_r A_{r_0 r_1 \dots r_h} X_{r_0 r_1 \dots r_h} = 0$$

$$(36) \qquad \sum_{0}^{n-1}{}_r A_{r_0 \dots r_{h-1} n} X_{r_0 \dots r_{h-1} n} = 0 .$$

L'equazione (35) è soddisfatta dalle coordinate di tutti gli S_h totali che appartengono all' S_{n-1} di equazione $x_n = 0$. Viceversa, poichè gli S_h totali si proiettano dal punto singolare O_n dentro l' S_{n-1} in S_h totali, se un'equazione del tipo (35) è soddisfatta dalle coordinate degli S_h totali dell' S_{n-1}, interpretata direttamente (n. 10) nell' S_n è soddisfatta dalle coordinate di tutti gli S_h totali dell' S_n; cioè la (35) costruita direttamente per gli S_h totali dell' S_{n-1} è una particolare (33) (il punto O_n essendo singolare). Nel caso estremo di $n = 2h$ nel quale nell' S_{n-1} non vi saranno S_h totali l'equazione (35) è *generica.*

L'equazione (36) è soddistatta dalle coordinate degli S_h totali che passano per il punto singolare O_n, ed interpretata nell' S_{n-1} opposto (sopprimendo l'indice fisso n) è soddisfatta dalle coordinate degli S_{h-1} totali dell' S_{n-1}. Viceversa un'equazione del tipo (36), costruita direttamente per gli S_{h-1} totali dell' S_{n-1} ed aggiuntovi l'indice fisso n, interpretata ("indirettamente", n. 10) nell' S_n è soddisfatta dalle coordinate di tutti gli S_h totali del complesso (poichè questi hanno in comune con l' S_{n-1} degli S_{h-1} totali le cui coordinate soddisfano alla (36) soppresso n).

Dunque per un complesso lineare di rette che abbia O_n come punto singolare non solo ogni equazione (33) è la somma di una (35) e di una (36) ma anche viceversa, le (35) e (36) essendo particolori equazioni (33), ogni loro combinazione lineare dà una (33).

Indicando con $E_{n,h}$ il numero massimo di complessi lineari di S_h linearmente indipendenti che contengono tutti gli S_h totali di un complesso lineare generico di rette di un S_n (numero dipendente soltanto da n ed h perchè tutti i complessi lineari di rette generici dell' S_n sono proiettivamente equivalenti) e con $E'_{n,h}$ l'analogo numero relativo ad un complesso di rette che abbia O_n come punto singolare ([10]), avremo

$$E'_{n,h} = E_{n-1,h} + E_{n-1,h-1} \tag{37}$$

Si osservi che per una osservazione fatta alla (35) il numero $E_{n-1,h}$ si presenterà anche per il caso $n-1=2h-1$ nel quale nell' S_{2h-1} non sono contenuti S_h totali. In base a quell'osservazione il numero $E_{2h-1,h}$ andrà posto uguale al numero massimo di complessi lineari di S_h dell' S_{2h-1} linearmente indipendenti, cioè

$$E_{2h-1,h} = \binom{2h}{h+1} = \binom{2h}{h-1}. \tag{38}$$

19. - Se il sistema degli S_h totali di un complesso lineare di rette con un punto singolare (quindi per n dispari non generico) non ha dimensione maggiore di quella del sistema degli

([10]) Se n è pari sarà $E'_{n,h}=E_{n,h}$ e per n dispari il numero $E'_{n,h}$ dipenderà comunque soltanto da n ed h perchè tutti i complessi lineari di rette con un punto singolare (e quindi un S_1–nucleo) ed ulteriormente generici sono proiettivamente equivalenti.

S_h totali di un generico complesso lineare di rette (n. 9), la dimensione dello spazio d'appartenenza della sua imagine dentro la grasmanniana di indici (n, h) non aumenta nel passaggio dal complesso generico al complesso singolare (detta dimensione potrebbe eventualmente diminuire): quindi il numero degli iperpiani linearmente indipendenti per quello spazio d'appartenenza non diminuisce. In questi casi il numero $E_{n,h}$ sarà uguale o eventualmente minore del numero $E'_{n,h}$ cioè

$$E_{n,h} \leq E_{n-1,h} + E_{n-1,h-1} \, . \tag{39}$$

Ricordiamo che, per quanto abbiamo ora detto, questa disuguaglianza sarà valida purchè le dimensioni del sistema degli S_h totali di un complesso lineare di rette dell'S_n generico e di un complesso che abbia un punto singolare (e ulteriormente generico) siano uguali. Ciò varrà sempre per n pari e per n dispari (osservazione alla (9) del n. 9) finchè $n \geq 2h + 1$, in conclusione per ogni n, pari o dispari, tale che $n \geq 2h$: cioè nel campo delle nostre considerazioni.

20. - Servendoci della (38) e della (39) costruiremo per induzione completa, essendo $n \geq 2h - 1$, la disuguaglianza

$$E_{n,h} \leq \binom{n+1}{h-1} . \tag{40}$$

Osserviamo dapprima che la (40) vale per $h = 1$ e qualsiasi n, cioè

$$E_{n,1} = 1 = \binom{n+1}{1-1},$$

e supponiamo che la (40) valga fino agli indici $n - 1$ ed $h - 1$. In base a questa ipotesi ricaviamo dalla (39)

$$E_{n,h-1} \leq \binom{n}{h-2} + \binom{n}{h-3} = \binom{n+1}{h-2}$$

cioè *sussiste l'induzioue per l'indice n.*

Inoltre la (38) esprime che la (40) è verificata per ogni valore di h e per il più basso valore possibile di n, cioè $n = 2h - 1$. Operando a partire da questo con l' induzione ora verificata per l'indice n si ottiene la (40); che risulta così dimostrata in generale.

Se ora ricordiamo che esistono effettivamente $\binom{n+1}{h-1}$ complessi lineari di S_h dell' S_n $(n \geq 2h)$ *linearmente indipendenti* che contengono tutti gli S_h totali di un complesso lineare generico di rette (dei quali abbiamo scritte le equazioni (24) e successivamente verificata l'indipendenza lineare) possiamo concludere che nella (40) varrà esclusivamente il segno di uguaglianza.

Dunque: $\binom{n+1}{h-1}$ *è il numero massimo dei complessi lineari di S_h di un S_n lineamente indipendenti che contengono tutti gli S_h totali di un complesso lineare generico di rette. I coefficienti dell'equazione di un generico di questi complessi sono dati dalle* (25).