

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUCIA VENTURELLI

Oscillazioni di piccola ampiezza in un fluido compressibile pesante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 5 (1934), p. 1-23

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1934__5__1_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

OSCILLAZIONI DI PICCOLA AMPIEZZA IN UN FLUIDO COMPRESSIBILE PESANTE

di LUCIA VENTURELLI a Vicenza

Sunto. — L' A. studia il moto ondoso in fluidi compressibili soggetti alla gravità, estendendo il procedimento usato dal Lamb per i fluidi incompressibili. Applica poi i risultati al calcolo dei periodi di onde di varia lunghezza che si propagano sulla tropopausa.

1. — Lo studio dei moti ondosi dell' atmosfera è della massima importanza per quel che riguarda la interpretazione dei fenomeni meteorologici. HELMHOLTZ ⁽¹⁾ dopo di essersi occupato dello studio delle onde che si propagano alla superficie di un liquido, osserva che certe forme speciali di nubi testimoniano dell' esistenza di moti ondosi nell' atmosfera, e, valendosi del metodo della similitudine meccanica, trasporta le conclusioni ottenute per i liquidi al caso dell' aria. Il LAMB ⁽²⁾ nel suo trattato di Idrodinamica, esamina pure ampiamente il problema; ma essi si limitano a ricercare, a studiare il moto ondoso in un fluido incompressibile, nel caso che l' accelerazione verticale non sia trascurabile.

Ora, nel presente lavoro, mi propongo di estendere il procedimento indicato dal LAMB al caso di un fluido compressibile, rimanendo fissa la condizione che l' accelerazione verticale non sia trascurabile. Perchè tale estensione fosse possibile è stato neces-

(¹) H. HELMHOLTZ. *Ueber atmosphärische Bewegungen* — Zweite Mitteilung. [Sitzber. der K. Preuss. Ak. der Wiss. Berlin 1889].

(²) LAMB. *Hydrodynamics*. Cap. IX.

sario introdurre delle particolari ipotesi restrittive di cui verrà fatta menzione nel corso del lavoro. Tali ipotesi sembrano essere del tutto accettabili in quanto, pur schematizzando il fenomeno, non lo fanno uscire dalla sua realtà fisica. Non è escluso però che talune di queste restrizioni possano venire in seguito eliminate in modo da poter dare alla soluzione del problema una maggiore generalità.

2. - Mi riferisco adunque, come fa il LAMB, ad una sola falda di fluido, limitando cioè lo studio al caso che il moto avvenga in due dimensioni.

Considero un fluido compressibile, di densità ρ , indefinitamente esteso in tutte le direzioni fuorchè inferiormente, dove lo suppongo limitato da un piano orizzontale. Supponendo che le superficie isobariche del fluido in quiete siano piani orizzontali, assumo una di queste come piano xy , e prendo l'asse x in senso contrario alla gravità. Il piano che limita inferiormente il fluido sia il piano $z = -h$.

Studiando, come ho detto, il moto in due dimensioni, prendo in esame quanto avviene nel piano xz , avendo assunto l'asse x nella direzione di propagazione dell'onda.

AmMESSO che esista un potenziale di velocità, siano

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

le componenti della velocità di una particella fluida. Se i moti delle particelle sono piccole oscillazioni intorno alle rispettive posizioni di equilibrio, nell'equazione di BERNOULLI ⁽³⁾ si può trascurare il quadrato della velocità, e scrivere :

$$(1) \quad \int \frac{dp}{\rho} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - gx ;$$

a questa va aggiunta l'equazione di continuità per il caso in cui

⁽³⁾ LAMB, l. c. Cap. II, § 21.

la densità sia variabile ⁽⁴⁾ e cioè nella forma :

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0,$$

e inoltre l'equazione delle trasformazioni adiabatiche :

$$(3) \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

dove p_0 e ρ_0 sono rispettivamente la pressione e la densità del fluido allo stato indisturbato e $\gamma = c_p : c_v$ il rapporto fra i due calori specifici del fluido compressibile.

Tenendo conto della (3) si può calcolare l'integrale che compare nella (1) la quale diventa :

$$(4) \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - gz;$$

quest'ultima si può anche scrivere

$$(4') \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^\gamma}{\rho_0^\gamma} \frac{1}{p_0^\gamma} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - gz.$$

(In entrambe si suppone la costante di integrazione compresa in $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$).

Dimodochè fra le tre incognite Φ , ρ , p si hanno le tre equazioni (2) (3) (4) con le condizioni ai limiti che per $z = -h$ sia nulla la componente verticale della velocità e che per $z = 0$ sia $p = \text{costante}$, poichè si è preso per piano xy una superficie isobarica. Tale condizione si può anche esprimere ⁽⁵⁾ in forma diversa, e cioè come segue: Se ζ rappresenta, al tempo t , lo

⁽⁴⁾ LAMB. l. c. Cap. I § 8.

⁽⁵⁾ LAMB. l. c. Cap. IX § 21.

spostamento di una particella dalla sua posizione di equilibrio $(x, 0)$ poichè la pressione è uniforme, si ricava dalla (4'):

$$(5) \quad \zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{x=\zeta},$$

supponendo sempre compresa in $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ogni costante, oppure con errore trascurabile, poichè si suppone che gli scostamenti dalla superficie $x = 0$ siano piccolissimi in rapporto ad h ,

$$(6) \quad \zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{x=0}.$$

Sempre nello stesso ordine di grandezza si può scrivere che la componente verticale della velocità del fluido è uguale alla velocità normale all'onda, ossia :

$$(7) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

Eliminando ζ fra la (6) e la (7) si ha la condizione :

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

la quale deve essere soddisfatta per $x = 0$.

Dalle tre equazioni (2) (3) (4) si possono eliminare le incognite p e ρ ; infatti, derivando parzialmente la (4) e ponendo

per brevità $q = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} = \gamma R T_0$, si ha :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho_0 \gamma - 1}{q \rho^{\gamma-2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho_0 \gamma - 1}{q \rho^{\gamma-2}} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + g \right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\rho_0^{\gamma-1}}{q \rho^{\gamma-2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

per cui la (2) che, sempre trascurando il quadrato della velocità, può anche essere scritta:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

diventa:

$$(9) \quad \rho^{\gamma-1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - g \frac{\rho_0^{\gamma-1}}{q} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\rho_0^{\gamma-1}}{q} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

D'altra parte dalla (4) si ricava:

$$\rho^{\gamma-1} = - \frac{(\gamma-1) \rho_0^{\gamma-1}}{q} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gx \right),$$

per cui in luogo della (9) si può scrivere:

$$(10) \quad (\gamma-1) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gx \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Sicchè il problema, nella sua forma più generale si riduce a ricercare funzioni Φ non identicamente nulle che soddisfino alla (10) e che verifichino le condizioni ai limiti e cioè:

$$(11) \quad \text{per } x = -h \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$(12) \quad \text{e per } x = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Ora, se si fa l'ipotesi che i cambiamenti di pressione e quindi di densità siano molto piccoli, di guisa che non si commetta un sensibile errore sostituendo, nel 1° termine della (9), a ρ il valore ρ_0 che ha la densità quando il fluido è in quiete, si ha per la Φ , in luogo della (10), l'equazione lineare:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{g}{q} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{q} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0,$$

ferme sempre restando le condizioni (11) e (12).

3. - Suppongo ora che il moto sia armonico semplice, cioè che Φ sia della forma :

$$\Phi = f(x, z) e^{i(\sigma t + \varepsilon)},$$

con $\sigma = \frac{2\pi}{\tau}$, posto che con τ si indichi il periodo del moto ondoso. Suppongo inoltre che la funzione f sia sviluppabile in serie di Fourier rispetto alla x ; allora si può limitare la ricerca a un solo termine di tale serie, e porre :

$$(14) \quad \Phi = P \cos kx e^{i(\sigma t + \varepsilon)},$$

con P funzione della sola z e con $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, essendo λ la lunghezza d'onda.

Sostituendo allora nelle (11) (12) (13) a Φ il valore (14) si vede che il problema in questione si può porre analiticamente nei termini seguenti : determinare delle costanti σ per modo che l'equazione :

$$(15) \quad \frac{d^2 P}{dz^2} - \frac{g}{q} \frac{dP}{dz} + \left(\frac{\sigma^2}{q} - k^2 \right) P = 0$$

ammetta delle soluzioni non identicamente nulle, verificanti le due condizioni ai limiti :

$$(16) \quad \text{per } z = -h \quad \frac{dP}{dz} = 0$$

$$(17) \quad \text{e per } z = 0 \quad g \frac{dP}{dz} - \sigma^2 P = 0.$$

L'integrale generale della (15) è :

$$P = A_1 e^{(a+b)z} + A_2 e^{(a-b)z},$$

dove si è posto :

$$a = \frac{g}{2q} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{\frac{g^2}{4q^2} - \frac{\sigma^2}{q} + k^2}.$$

La condizione (16) dà :

$$A_1 (b + a) e^{bh} = A_2 (b - a) e^{bh} = C,$$

e quindi si ha

$$(18) \quad P = C e^{ax} [(b - a) e^{b(x+h)} + (b + a) e^{-b(x+h)}],$$

e per il potenziale di velocità :

$$(19) \quad \Phi = C e^{ax} [(b - a) e^{b(x+h)} + (b + a) e^{-b(x+h)}] \cos kx e^{i(\sigma t + \epsilon)}.$$

La condizione (17) assume la forma :

$$(20) \quad \sigma^2 [(b - a) e^{bh} + (b + a) e^{-bh}] = g(b^2 - a^2) (e^{bh} - e^{-bh}),$$

e stabilisce l'equazione a cui deve soddisfare la σ .

4. - Se si indicano con ξ e ζ gli spostamenti delle particelle fluide dalle loro posizioni di equilibrio, si ha

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Prendendo per Φ il valore (19) e integrando, limitatamente alle parti reali, si ha :

$$\xi = -\frac{kC}{\sigma} e^{ax} [(b - a) e^{b(x+h)} + (b + a) e^{-b(x+h)}] \text{sen } kx \text{ sen } (\sigma t + \epsilon)$$

$$\zeta = \frac{C}{\sigma} (b^2 - a^2) e^{ax} [e^{b(x+h)} - e^{-b(x+h)}] \cos kx \text{ sen } (\sigma t + \epsilon).$$

Eliminando il tempo si ha, per le traiettorie delle particelle l'equazione :

$$\frac{X-x}{Z-x} = k \frac{(b-a) e^{b(x+h)} + (b+a) e^{-b(x+h)}}{(a^2-b^2)(e^{b(x+h)} - e^{-b(x+h)})} \operatorname{tg} kx.$$

L'equazione della superficie d'onda, al tempo t , si ottiene ponendo, nell'equazione di BERNOULLI, per Φ il valore (19). Si ha :

$$\begin{aligned} \operatorname{cost} = e^{ax} & \left[\sigma \{ (b-a) e^{b(x+h)} + (b+a) e^{-b(x+h)} \} - \right. \\ & \left. - \frac{g}{\sigma} (b^2 - a^2) (e^{b(x+h)} - e^{-b(x+h)}) \right] \cos kx, \end{aligned}$$

e, tenendo conto della (20)

$$e^{ax} (e^{bx} - e^{-bx}) \cos kx = \operatorname{cost},$$

essendo il valore di quest'ultima costante dato da

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{C e^{bh} (b-a) \left[\sigma - \frac{g}{\sigma} (b+a) \right]}.$$

5. - Se l'impostazione del problema corrisponde alla realtà fisica, allora i valori di σ^2 (d'ora in avanti per comodità di scrittura si pone $\sigma^2 = n$) forniti dalle equazioni che traducono il problema, e cioè dalle (15), (16), (17), saranno tutti reali e positivi.

Per dimostrare che i valori di n sono tutti reali, si può procedere nel modo seguente :

Nella (15) si ponga :

$$P = e^{\frac{g}{2q} x} Q;$$

essa assume pertanto la forma :

$$(21) \quad \frac{d^2 Q}{dx^2} + \left(\frac{n}{q} - k^2 - \frac{g^2}{4q^2} \right) Q = 0,$$

e le condizioni ai limiti diventano :

$$(22) \quad g \frac{dQ}{dx} + \left(\frac{g^2}{2q} - n \right) Q = 0 \quad \text{per } x = 0$$

$$(23) \quad e \quad \frac{g}{2q} Q + \frac{dQ}{dx} = 0 \quad \text{per } x = -h.$$

Siano ora n_1 e n_2 due qualunque differenti valori di n soddisfacenti l'equazione (20); ad essi corrisponderanno due funzioni Q_1 e Q_2 tali che sia rispettivamente :

$$(21') \quad \frac{d^2 Q_1}{dx^2} + \left(\frac{n_1}{q} - k^2 - \frac{g^2}{4q^2} \right) Q_1 = 0$$

$$(22') \quad g \frac{dQ_1}{dx} + \left(\frac{g^2}{2q} - n_1 \right) Q_1 = 0 \quad \text{per } x = 0$$

$$(23') \quad \frac{g}{2q} Q_1 + \frac{dQ_1}{dx} = 0 \quad \text{per } x = -h,$$

e :

$$(21'') \quad \frac{d^2 Q_2}{dx^2} + \left(\frac{n_2}{q} - k^2 - \frac{g^2}{4q^2} \right) Q_2 = 0$$

$$(22'') \quad g \frac{dQ_2}{dx} + \left(\frac{g^2}{2q} - n_2 \right) Q_2 = 0 \quad \text{per } x = 0$$

$$(23'') \quad \frac{g}{2q} Q_2 + \frac{dQ_2}{dx} = 0 \quad \text{per } x = -h.$$

Moltiplicando la (21') per Q_2 e la (21'') per Q_1 , e sottraendo si ha :

$$Q_2 \frac{d^2 Q_1}{dx^2} - Q_1 \frac{d^2 Q_2}{dx^2} + \frac{n_1 - n_2}{q} Q_1 Q_2 = 0,$$

ossia :

$$\frac{d}{dx} \left(Q_2 \frac{dQ_1}{dx} - Q_1 \frac{dQ_2}{dx} \right) + \frac{n_1 - n_2}{q} Q_1 Q_2 = 0.$$

Integrando ora fra $-h$ e 0 si ha :

$$\left[Q_2 \frac{dQ_1}{dx} - Q_1 \frac{dQ_2}{dx} \right]_{-h}^0 + \frac{n_1 - n_2}{q} \int_{-h}^0 Q_1 Q_2 dx = 0,$$

e, tenendo conto delle condizioni ai limiti :

$$\frac{n_1 - n_2}{g} (Q_1 Q_2)_{x=0} + \frac{n_1 - n_2}{q} \int_{-h}^0 Q_1 Q_2 dx = 0,$$

o anche, dividendo per $\frac{n_1 - n_2}{g}$ che non è nullo poichè per ipotesi è $n_1 \neq n_2$, si ottiene :

$$(24) \quad (Q_1 Q_2)_{x=0} + \frac{g}{q} \int_{-h}^0 Q_1 Q_2 dx = 0,$$

Se adunque n_1 e n_2 sono due differenti valori di n (cioè di σ^2) che soddisfano la (20) le corrispondenti funzioni Q_1 e Q_2 devono verificare la (24).

Suppongo ora che la (20) abbia una radice complessa, e sia questa n_1 ; poichè i coefficienti che figurano nelle equazioni (21) (22) (23) sono reali, essa ammetterà anche la radice coniugata di n_1 , e sia questa n_2 . Le Q_1 e Q_2 corrispondenti saranno pure complesse coniugate. In tal caso il primo membro della (24) si riduce ad una somma di quadrati, il cui annullarsi comporterebbe che le soluzioni Q_1 e Q_2 corrispondenti alle radici n_1 e n_2 fossero identicamente nulle, contrariamente all'ipotesi fatta. I valori n che soddisfano alle condizioni del problema, non possono quindi essere immaginari.

Nè d'altra parte possono essere negativi, poichè per valori negativi di n , i due membri della (20) assumono segni contrari.

Difatti, per $n < 0$, essendo $b > a$, le quantità $b - a$, $b + a$, $b^2 - a^2$ sono tutte positive ⁽⁶⁾ e il secondo membro della (20) è pure positivo; mentre il primo membro, come prodotto, di una quantità positiva per n , che si suppone negativa, è negativo.

Perciò rimane dimostrato che le quantità σ che soddisfano all'equazione (20) sono tutte reali.

6. - Si tratta ora di stabilire l'effettiva l'esistenza di soluzioni dell'equazione (20). Questa può essere scritta nella forma:

$$(25) \quad e^{bh} [g(b^2 - a^2) - n(b - a)] - e^{-bh} [g(b^2 - a^2) + n(b + a)] = 0.$$

Ora, poichè è: $e^{-bh} \neq 0$ e, tenendo inoltre conto che i valori di n che annullano la prima parentesi quadra non sono soluzioni dell'equazione, essa può essere scritta:

$$(26) \quad e^{2bh} = \frac{g(b^2 - a^2) + n(b + a)}{g(b^2 - a^2) - n(b - a)}.$$

Intanto si osserva subito che il valore di n che annulla b , ossia $n = qk^2 + \frac{g^2}{4q}$, è una soluzione dell'equazione (26). Si tratta ora di trovare le altre, le quali, per quanto si è dimostrato, saranno tutte reali e positive.

Considero, per ora, i soli valori di n per cui b è reale; quelli cioè compresi nell'intervallo $\left[0, qk^2 + \frac{g^2}{4q}\right]$.

Ricordo che b è il valore, preso positivamente, del radicale $\sqrt{\frac{g^2}{4q^2} - \frac{n}{q} + k^2}$ e che perciò è $e^{2bh} > 1$, e che quindi anche il secondo membro della (26) deve essere maggiore di uno.

Se questo secondo membro si scrive nella forma:

⁽⁶⁾ Si suppone che b rappresenti il valore, preso col segno positivo, del radicale $\sqrt{\frac{g^2}{4q^2} - \frac{n}{q} + k^2}$: ma è facile verificare che l'equazione (20) non muta cambiando b in $-b$.

$$(27) \quad 1 + \frac{2nb}{g(b^2 - a^2) - n(b - a)},$$

si vede che, considerando valori positivi di n , la condizione è soddisfatta se è:

$$g(b^2 - a^2) - n(b - a) > 0,$$

e che quindi le soluzioni della (26) sono da cercarsi fra i valori di n che soddisfano a una delle tre limitazioni seguenti:

$$(28) \quad \begin{cases} n < qk^2 \\ n > \frac{g^2}{2q} \\ n < gk \end{cases} \quad (29) \quad \begin{cases} n < qk^2 \\ n < \frac{g^2}{2q} \end{cases} \quad (30) \quad \begin{cases} n > qk^2 \\ n > \frac{g^2}{2q} \\ n > gk \end{cases}.$$

Pongo ora

$$(31) \quad f(n) = e^{2bh} - \frac{g(b^2 - a^2) + n(b + a)}{g(b^2 - a^2) - n(b - a)},$$

e studio l'andamento di questa funzione.

La $f(n)$ è la somma della quantità e^{2bh} la quale è finita e continua in tutto l'intervallo considerato, e di una frazione la quale è finita e continua per tutti i valori di n che non annullano il denominatore. Questo è nullo sempre per $n = qk^2$; si annulla pure per $n = gk$, purchè sia, in questo caso, $n > \frac{g^2}{2q}$

ossia $k > \frac{g}{2q}$.

Inoltre si ha:

$$f(0) = e^{\sqrt{\frac{g^2}{q^2} + 4k^2} \cdot h} - 1 > 0.$$

$$f\left(qk^2 + \frac{g^2}{4q}\right) = 0.$$

Considerando separatamente i due casi:

$$k \leq \frac{g}{2q}, \quad k > \frac{g}{2q};$$

nel primo la funzione $f(n)$ diventa infinita solamente nel punto $n = qk^2$; nell'intervallo $[0, qk^2]$ la frazione che vi compare si mantiene sempre positiva essendo verificate le condizioni (29), e quindi, a sinistra di qk^2 si ha:

$$\lim_{n=qk^2} f(n) = -\infty,$$

mentre a destra di qk^2 si ha:

$$\lim_{n=qk^2} f(n) = +\infty.$$

Nel secondo caso $k > \frac{g}{2q}$ la funzione diventa infinita nei due punti: $n = qk^2$, $n = gk$. Distinguo due sottocasi:

$$\alpha) \quad qk \leq g, \quad \beta) \quad qk > g.$$

Se è verificata la (α) nell'intervallo $[0, qk^2]$ la (27) è positiva e perciò, a sinistra di qk^2 è:

$$\lim_{n=qk^2} f(n) = -\infty,$$

mentre per $qk^2 < n < gk$ la (27) è negativa e quindi, come nel caso precedente, a destra di qk^2 è:

$$\lim_{n=qk^2} f(n) = +\infty.$$

Analogamente si mostra che, a sinistra di gk la $f(n)$ tende pure all'infinito per valori positivi, mentre a destra di gk tende all'infinito per valori negativi.

Se è verificata la $\beta)$, le quantità $0, \frac{g^2}{2q}, gk, qk^2$ e $qk^2 + \frac{g^2}{2q}$, scritte in questo ordine, risultano in ordine crescente e perciò in virtù delle (28) (29) (30), mentre in un intorno a sinistra

di gk la $f(n)$, tende all'infinito per valori negativi, a destra di gk vi tende per valori positivi: così come a sinistra e a destra di qk^2 la $f(n)$ ha per limite rispettivamente l'infinito positivo e l'infinito negativo.

Inoltre è:

$$f(n) > 1 - \frac{g(b^2 - a^2) + n(b + a)}{g(b^2 - a^2) - n(b - a)} = - \frac{2nb}{g(b^2 - a^2) - n(b - a)},$$

e quindi per valori di n compresi nell'intervallo $[qk^2, gk]$ e che perciò non verificano nessuna delle condizioni (28) (29) (30), la $f(n)$ è sempre positiva. Le eventuali radici della (26) sono dunque da ricercarsi esternamente a tale intervallo.

Derivando la $f(n)$ rispetto ad n si ha:

$$(32) \quad \frac{df}{dn} = - \frac{h}{bq} e^{2bh} - \frac{2bg(b^2 - a^2) - \frac{n}{bq} [an - g(a^2 + b^2)]}{[g(b^2 - a^2) - n(b - a)]^2}.$$

Essendo b positivo, il primo termine è sempre negativo, il secondo termine ha segno contrario a quello del suo numeratore, il quale ha il segno di:

$$(33) \quad n^2 - 6qk^2 n + g^2 k^2 + 4q^2 k^4$$

e quindi per valori di n esterni all'intervallo

$$[3qk^2 - \sqrt{5q^2 k^4 - g^2 k^2}, \quad 3qk^2 + \sqrt{5q^2 k^4 - g^2 k^2}],$$

la (32) risulta negativa e la $f(n)$ decrescente, mentre per n compreso in tale intervallo la (32) può anche essere positiva e la $f(n)$ crescente

7. - Concludendo:

1°) se è $k \leq \frac{g}{2q}$ la funzione $f(n)$ ha una sola discontinuità; e poichè:

$$3qk^2 - \sqrt{5q^2 k^4 - g^2 k^2} > qk^2$$

la $f(n)$, nell'intervallo $[0, qk^2]$ è continua, sempre decrescente dal valore positivo che essa assume per $n=0$, a $-\infty$ a cui tende per n tendente a qk^2 .

La funzione adunque si annulla per uno ed un sol valore di n compreso fra 0 e qk^2 .

Nell'intervallo successivo per $qk^2 < n < qk^2 + \frac{g^2}{4q}$ la funzione varia con continuità da $+\infty$ a zero. Inoltre, poichè, o il discriminante della (33) è negativo, o è:

$$3qk^2 - \sqrt{5q^2 k^4 - g^2 k^2} > qk^2 + \frac{g^2}{4q},$$

anche in questo intervallo la $f(n)$ è sempre decrescente e perciò non ammette ulteriori radici, all'infuori dell'estremo destro dell'intervallo.

2°) Se è:

$$\frac{g}{2q} < k \leq \frac{g}{q},$$

la funzione decresce dal valore positivo che ha per $n=0$ fino al valore $-\infty$ che assume per $n=qk^2$, poi decresce ancora da $+\infty$ fino ad un minimo positivo, in seguito, mantenendosi sempre positiva varia (ma non si può asserire che vari sempre nello stesso senso) da questo minimo fino a $+\infty$ a cui tende per n tendente a gk . Nell'intervallo $\left[gk, qk^2 + \frac{g^2}{4q} \right]$ varia da $-\infty$ a 0, ma non è escluso che possa anche annullarsi in qualche altro punto, diverso dall'estremo superiore.

Anche in questo caso si ha dunque una ed una sola radice compresa fra 0 e qk^2 , ma non si può escludere che ve ne siano delle altre fra gk e $qk^2 + \frac{g^2}{4q}$.

3°) Se è $k > \frac{g}{q}$,

essendo: $gk < 3qk^2 - \sqrt{5q^2 k^4 - g^2 k^2} < qk^2$

$$e \quad qk^2 + \frac{g^2}{4q} < 3qk^2 + \sqrt{5q^2 k^4 - g^2 k^2},$$

la derivata di $f(n)$ è negativa nell'intervallo $[0, gk]$ mentre può essere positiva negli altri. Quindi $f(n)$ si annulla per un valore di n compreso fra 0 e gk , tende a $-\infty$ per n tendente a gk , varia fra $+\infty$ e $+\infty$ restando sempre positiva mentre n cresce da gk a qk^2 , varia da $-\infty$ a 0 mentre n varia fra qk^2 e $qk^2 + \frac{g^2}{4q}$; e in quest'ultimo intervallo non si può escludere che possa eventualmente annullarsi in qualche altro punto, diverso dall'estremo superiore dell'intervallo.

8. - Per $n > \frac{g^2}{4q} + qk^2$ alla (26) può essere sostituita la:

$$(34) \quad \cotg \beta h = g \frac{2qk - n}{2q \beta n},$$

dove si è posto:

$$\beta = \sqrt{\frac{n}{q} - \frac{g^2}{4q^2} - k^2},$$

(intendendo il radicale preso positivamente).

Nell'intervallo $qk^2 + \frac{g^2}{4q} < n < \infty$ la (34) ha infinite soluzioni reali. Ciò può essere messo in evidenza col procedimento che segue:

Considero le due funzioni:

$$y = \cotg \beta h$$

$$\eta = g \frac{2qk^2 - n}{2q n \beta}.$$

La prima, che per $\beta = 0$ assume valore infinito, è sempre decrescente e ammette infinite discontinuità, passando da $-\infty$ a $+\infty$ nei punti in cui è:

$$\beta h = \alpha \pi \quad (\text{con } \alpha \text{ intero qualunque});$$

questi punti corrispondono agli infiniti valori di n dati da :

$$n = \frac{g^2}{4q} + qk^2 + \frac{\alpha^2 q \pi^2}{h^2} .$$

Poichè il primo punto di infinito si ha precisamente per $n = \frac{g^2}{4q} + qk^2$, i successivi punti in cui la y è discontinua corrispondono ai valori di n che si ottengono aggiungendo a questo la quantità $\frac{q\pi^2}{h^2}$ moltiplicata per i successivi quadrati dei numeri interi. Il diagramma della curva è quello rappresentato a tratto continuo nelle figure. I rami di essa risultano tanto più fitti quanto più grande è h e i punti di discontinuità si vanno allontanando fra loro mano a mano che il loro ordine diviene più elevato.

La funzione

$$\eta = g \frac{2qk^2 - n}{2qn\beta} ,$$

è continua in tutto l'intervallo, tende a zero col tendere di n all'infinito e ha il segno del suo numeratore, essendo β positivo.

Si ha perciò :

$$\eta \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad \text{se è} \quad n \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 2qk^2 .$$

Ora, distinguendo come nel n° precedente, i due casi

$$k \leq \frac{g}{2q} , \quad k > \frac{g}{2q} ,$$

se è $k \leq \frac{g}{2q}$ si ha :

$$-\frac{g^2}{4q} + qk^2 > 2qk^2 ,$$

e quindi la η è sempre negativa.

Se è invece $k > \frac{g}{2q}$, la η si annulla per $n = 2qk^2$, è positiva per $n < 2qk^2$, negativa per $n > 2qk^2$.

Inoltre si ha :

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{n^2 - 6qk^2 n + 4q^2 k^4 + g^2 k^2}{4q^2 n^2 \beta^3}.$$

Questa derivata ha il segno del suo numeratore il quale è negativo per n compreso nell'intervallo

$$[3qk^2 - \sqrt{5q^2 k^4 - g^2 k^2}, \quad 3qk^2 + \sqrt{5q^2 k^4 - g^2 k^2}].$$

Quindi se è $k \leq \frac{g}{\sqrt{5} \cdot q}$ la derivata non si annulla e la funzione η è sempre negativa e crescente da $-\infty$ a zero, al crescere di n da $\frac{g^2}{4q} + qk^2$ a $+\infty$ (fig. 1, linea a tratto e punto).

Se è $\frac{g}{\sqrt{5} \cdot q} < k \leq \frac{g}{2q}$ la η ha un massimo ed un minimo restando però sempre negativa (fig. 1 linea tratteggiata).

Per $k > \frac{g}{2q}$ la η assume il valore $+\infty$ per $n = \frac{g^2}{4q} + qk^2$,

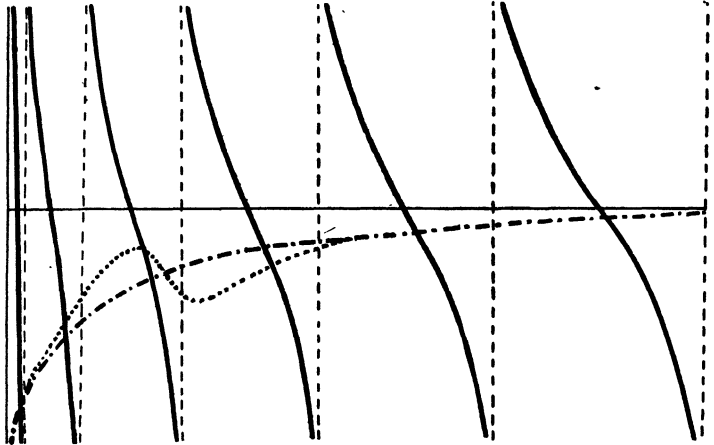


FIG. 1

decesce fino ad annullarsi per $n = 2qk^2$, decresce ancora fino ad un minimo che raggiunge per $n = 3qk^2 + \sqrt{5q^2k^2 - g^2k^2}$ e poi, rimanendo sempre negativa, cresce fino a zero, mentre n cresce fino a $+\infty$ (fig. 2 linea a tratto e punto).

In ogni caso la y e la η hanno infiniti valori comuni che sono altrettante soluzioni dell'equazione (34).

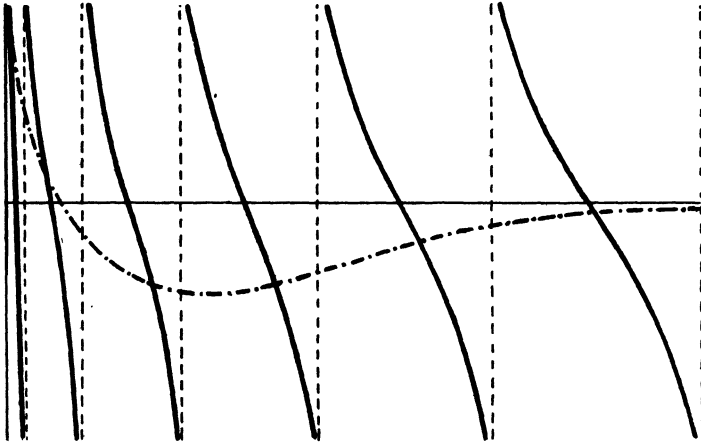


FIG. 2

9. - Riassumendo, per dati valori di h e di q , ad ogni valore di k e quindi ad ogni lunghezza d'onda, corrisponde anzitutto un valor minimo per n , compreso fra zero e il minore dei due numeri qk^2 e gk , e inoltre infiniti altri valori di n , l'uno eguale, gli altri maggiori di $\frac{g^2}{4q} + qk^2$. In nessun caso l'equazione (26) ha soluzioni comprese fra qk^2 e gk .

10. - I risultati della ricerca teorica sono stati applicati a un caso pratico. Si è preso come strato di fluido lo strato d'aria compreso fra il suolo e la tropopausa e, supponendo di trascurare la rotondità della terra, si sono ricercati i valori dei periodi corrispondenti ad onde di varia lunghezza che si propaghino sulla tropopausa stessa.

Prendendo come altezza media della tropopausa 11 chilo-

metri, si suppone che la temperatura a quell'altezza sia -55° e che l'aria sia secca in tutto lo strato. Si ha :

$$\begin{aligned} h &= 11000 \text{ m.} & g &= 9,7721 \frac{m}{s^2} \text{ (}^7\text{)} \\ T &= 218^{\circ} & R &= 29,27 \\ q &= 8977 & a &= 5,43074 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Considerando lunghezze d'onda fra i 100 km. e i 4000 km., e quindi valori di k compresi fra $6,283 \cdot 10^{-5}$ e $1,57 \cdot 10^{-6}$ si ha : $k < \frac{g}{2q}$ e quindi l'esempio rientra nel 1^o caso. Si sono calcolati, con successive approssimazioni i primi 12 valori di n quali appaiono dalla tab. II, e i corrispondenti valori di τ , raccolti nella tab. III. (Si ricordi che $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{n}}$).

TABELLA I.

λ (km.)	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	qk^2
100	$6,283 \cdot 10^{-5}$	$3,55189 \cdot 10^{-5}$
200	$3,142 \cdot 10^{-5}$	$8,87925 \cdot 10^{-6}$
500	$1,257 \cdot 10^{-5}$	$1,42075 \cdot 10^{-6}$
1000	$6,28 \cdot 10^{-6}$	$3,55189 \cdot 10^{-7}$
1500	$4,19 \cdot 10^{-6}$	$1,57788 \cdot 10^{-7}$
2000	$3,14 \cdot 10^{-6}$	$8,87968 \cdot 10^{-8}$
2500	$2,51 \cdot 10^{-6}$	$5,68298 \cdot 10^{-8}$
3000	$2,09 \cdot 10^{-6}$	$3,94471 \cdot 10^{-8}$
4000	$1,57 \cdot 10^{-6}$	$2,21992 \cdot 10^{-8}$

(⁷) Il calcolo di g è stato fatto usando la formula

$$g_z = g_0 - 0,000003086 z$$

dove g_z è la gravità (in $m.s^{-2}$) all'altezza z e g_0 quella al livello del mare e z l'altezza in metri [HELMERT, *Enzyklop d. Math. Wiss.* Bd. VI₁ Heft 2, 1910].

TABELLA II.

λ	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
100	$3,55.10^{-5}$	$2,6890.10^{-3}$	$3,2335.10^{-3}$	$4,9530.10^{-3}$	$7,9980.10^{-3}$	$1,2435.10^{-2}$
200	$8,875.10^{-6}$	$2,6624.10^{-3}$	$3,2105.10^{-3}$	$4,9410.10^{-3}$	$7,9925.10^{-3}$	$1,2429.10^{-2}$
500	$1,420.10^{-6}$	$2,6549.10^{-3}$	$3,2075.10^{-3}$	$4,9355.10^{-3}$	$7,9858.10^{-3}$	$1,2424.10^{-2}$
1000	$3,551.10^{-7}$	$2,6538.10^{-3}$	$3,2045.10^{-3}$	$4,9344.10^{-3}$	$7,9840.10^{-3}$	$1,2423.10^{-2}$
1500	$1,577.10^{-7}$	$2,6537.10^{-3}$	$3,2030.10^{-3}$	$4,9342.10^{-3}$	$7,9838.10^{-3}$	$1,2423.10^{-2}$
2000	$8,879.10^{-8}$	$2,6536.10^{-3}$	$4,2025.10^{-3}$	$4,9342.10^{-3}$	$7,9837.10^{-3}$	$1,2423.10^{-2}$
2500	$5,682.10^{-8}$	$2,6535.10^{-3}$	$3,2020.10^{-3}$	$4,9341.10^{-3}$	$7,9837.10^{-3}$	$1,2423.10^{-2}$
3000	$3,944.10^{-8}$	$2,6535.10^{-3}$	$3,2020.10^{-3}$	$4,9341.10^{-3}$	$7,9836.10^{-3}$	$1,2423.10^{-2}$
4000	$2,219.10^{-8}$	$2,6535.10^{-3}$	$3,2020.10^{-3}$	$3,9341.10^{-3}$	$7,9836.10^{-3}$	$1,2423.10^{-2}$

(segue) TABELLA II.

λ	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_{11}	n_{12}
100	$1,8320.10^{-2}$	$2,5072.10^{-2}$	$3,3878.10^{-2}$	$4,4152.10^{-2}$	$5,5894.10^{-2}$	$6,9103.10^{-2}$
200	$1,8312.10^{-2}$	$2,5045.10^{-2}$	$3,3851.10^{-2}$	$4,4125.10^{-2}$	$5,5867.10^{-2}$	$6,9076.10^{-2}$
500	$1,8307.10^{-2}$	$2,5038.10^{-2}$	$3,3844.10^{-2}$	$4,4118.10^{-2}$	$5,5860.60^{-2}$	$6,9069.10^{-2}$
1000	$1,8306.10^{-2}$	$2,5036.10^{-2}$	$3,3843.10^{-2}$	$4,4117.10^{-2}$	$5,5859.10^{-2}$	$6,9068.10^{-2}$
1500	$1,8306.10^{-2}$	$2,5036.10^{-2}$	$3,3843.10^{-2}$	$4,4117.10^{-2}$	$5,5858.10^{-2}$	$6,9068.10^{-2}$
2000	$1,8306.10^{-2}$	$2,5036.10^{-2}$	$3,3843.10^{-2}$	$4,4117.10^{-2}$	$5,5858.10^{-2}$	$6,9068.10^{-2}$
2500	$1,8306.10^{-2}$	$2,5036.10^{-2}$	$3,3843.10^{-2}$	$4,4117.10^{-2}$	$5,5858.10^{-2}$	$6,9068.10^{-2}$
3000	$1,8306.10^{-2}$	$2,5036.10^{-2}$	$3,3843.10^{-2}$	$4,4117.10^{-2}$	$5,5858.10^{-2}$	$6,9068.10^{-2}$
4000	$1,8306.10^{-2}$	$2,5036.10^{-2}$	$3,3843.10^{-2}$	$4,4117.10^{-2}$	$5,5858.10^{-2}$	$6,9068.10^{-2}$

TABELLA III.

λ	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
100	17 ^m 34 ^s	2 ^m 1 ^s , 17	1 ^m 50 ^s , 50	1 ^m 29 ^s , 28	1 ^m 10 ^s , 26	56 ^s , 34
200	35 ^m 8 ^s	2 ^m 1 ^s , 77	1 ^m 50 ^s , 89	1 ^m 29 ^s , 39	1 ^m 10 ^s , 28	56 ^s , 36
500	1 ^h 27 ^m 52 ^s	2 ^m 1 ^s , 94	1 ^m 50 ^s , 94	1 ^m 29 ^s , 44	1 ^m 10 ^s , 31	56 ^s , 37
1000	2 ^h 55 ^m 46 ^s	2 ^m 1 ^s , 97	1 ^m 50 ^s , 99	1 ^m 29 ^s , 45	1 ^m 10 ^s , 32	56 ^s , 37
1500	4 ^h 25 ^m 40 ^s	2 ^m 1 ^s , 97	1 ^m 51 ^s , 02	1 ^m 29 ^s , 45	1 ^m 10 ^s , 32	56 ^s , 37
2000	5 ^h 52 ^m	2 ^m 1 ^s , 97	1 ^m 51 ^s , 03	1 ^m 29 ^s , 45	1 ^m 10 ^s , 32	56 ^s , 37
2500	7 ^h 19 ^m	2 ^m 1 ^s , 98	1 ^m 51 ^s , 04	1 ^m 29 ^s , 45	1 ^m 10 ^s , 32	56 ^s , 37
3000	8 ^h 47 ^m	2 ^m 1 ^s , 98	1 ^m 51 ^s , 04	1 ^m 29 ^s , 45	1 ^m 10 ^s , 32	56 ^s , 37
4000	11 ^h 42 ^m	2 ^m 1 ^s , 98	1 ^m 51 ^s , 04	1 ^m 29 ^s , 45	1 ^m 10 ^s , 32	56 ^s , 37

(segue) TABELLA III.

λ	τ_7	τ_8	τ_9	τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}
100	46 ^s , 42	39 ^s , 69	34 ^s , 13	29 ^s , 90	23 ^s , 90	22 ^s , 78
200	46 ^s , 43	39 ^s , 70	34 ^s , 15	29 ^s , 91	23 ^s , 90	22 ^s , 78
500	46 ^s , 44	39 ^s , 71	34 ^s , 15	29 ^s , 91	23 ^s , 90	22 ^s , 78
1000	46 ^s , 44	39 ^s , 71	34 ^s , 15	29 ^s , 91	23 ^s , 90	22 ^s , 78
1500	46 ^s , 44	39 ^s , 71	34 ^s , 15	29 ^s , 91	23 ^s , 90	22 ^s , 78
2000	46 ^s , 44	39 ^s , 71	34 ^s , 15	29 ^s , 91	23 ^s , 90	22 ^s , 78
2500	46 ^s , 44	39 ^s , 71	34 ^s , 15	29 ^s , 91	23 ^s , 90	22 ^s , 78
3000	46 ^s , 44	39 ^s , 71	34 ^s , 15	29 ^s , 91	23 ^s , 90	22 ^s , 78
4000	46 ^s , 44	39 ^s , 71	34 ^s , 15	29 ^s , 91	23 ^s , 90	22 ^s , 78

Dall' esempio addotto si deduce che, nel caso considerato, i valori delle radici dell'equazione di frequenza (26) diminuiscono al crescere della lunghezza d'onda, ma, mentre tale diminuzione è molto sensibile per la radice più piccola, si fa tanto meno spiccata quanto più elevato è l'ordine della radice considerata. Sicchè si può concludere che, per onde di grande lunghezza, quella di più bassa frequenza, aumenta sensibilmente il proprio periodo coll' aumento della lunghezza, mentre i periodi più piccoli sono pressochè indipendenti dalla lunghezza dell'onda ma variano quasi esclusivamente con l'altezza dello strato.

All' Illustre Prof. ERNESTO LAURA mi è gradito esprimere la più viva riconoscenza per l'aiuto e i consigli di cui mi fu cortese.
