

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARTURO MARONI

**Sulla struttura e la costruzione delle serie  
di equivalenza incomplete, sopra una curva  
algebraica riducibile**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 5 (1934), p. 160-170

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1934\\_\\_5\\_\\_160\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1934__5__160_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

# SULLA STRUTTURA E LA COSTRUZIONE DELLE SERIE DI EQUIVALENZA INCOMPLETE, SOPRA UNA CURVA ALGEBRICA RIDUCIBILE.

di ARTURO MARONI a Cagliari

In questa nota si vuol mostrare come sono costituite, e come si possono costruire, le serie di equivalenza *incomplete*, appartenenti ad una curva algebrica riducibile <sup>(1)</sup>.

## 1. - Sopra una curva algebrica riducibile

$$\Gamma = C_1 + C_2 + \dots + C_i,$$

di cui  $C_1, C_2, \dots, C_i$  siano le componenti irriducibili, si abbia una serie di equivalenza  $g_n^*$ , la quale subordini sulla componente

<sup>(1)</sup> La teoria delle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile, come è noto, è stata iniziata dal SEVERI nella memoria: *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica* [Commentarii Mathematici Helvetici - Vol. 4 - 1932 (Memoria A)]. La teoria è poi stata, dal SEVERI, ampiamente sviluppata nella memoria: *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*: [Memorie R. Acc. d'Italia. Classe di Scienze Fis. Mat. e Nat. - Vol. III - 1932-X (Memoria B)]. In quest'ultima memoria viene stabilito (v. n. 11) come è costituita, sopra una curva algebrica riducibile, una serie di equivalenza *completa*, mediante il TEOREMA FONDAMENTALE: *Ogni serie di equivalenza completa, sopra una curva algebrica riducibile, è costituita da tutti i gruppi ottenuti associando gruppi di serie lineari complete assegnate sopra talune componenti della curva; e soltanto da questi*. Invece, come sia costituita una serie di equivalenza *incompleta*, sopra una curva algebrica riducibile, non è stato finora esaminato.

$C_h$  ( $h = 1, 2, \dots, t$ ) la serie lineare  $g_{n_h}^{r_h}$  <sup>(2)</sup>. Sarà evidentemente  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$ ;  $r \leq r_1 + r_2 + \dots + r_t$ .

Per semplicità di linguaggio giova riferirsi ad una *immagine*, in uno spazio  $S_r$ , della serie  $g_n^r$ . Tale immagine si ottiene considerando un sistema lineare associato  $\Sigma$  <sup>(3)</sup>, che sega la  $g_n^r$  sulla curva  $\Gamma$ , e riferendo proiettivamente le forme di  $\Sigma$  agli iperpiani di un  $S_r$ . Poichè  $\Sigma$  sega sulla curva  $C_h$  la serie  $g_{n_h}^{r_h}$ , la  $C_h$  medesima viene trasformata birazionalmente in una curva  $C'_h$  di ordine  $n_h$ , appartenente ad un  $S_{r_h}$  dell'  $S_r$ , sulla quale  $C'_h$  gli iperpiani segano la serie  $g_{n_h}^{r_h}$ . Si hanno così, nell'  $S_r$ ,  $t$  spazi:  $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_t}$ , cui appartengono rispettivamente le curve  $C'_1, C'_2, \dots, C'_t$ , trasformate delle  $C_1, C_2, \dots, C_t$ . Sulla curva composta  $\Gamma' = C'_1 + C'_2 + \dots + C'_t$ , gli iperpiani dell'  $S_r$  segano la serie  $g_n^r$  <sup>(4)</sup>.

Si intuisce che la struttura della  $g_n^r$  dipende dalla mutua posizione degli spazi  $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_t}$ , cioè dalle dimensioni degli spazi cui questi  $S_{r_h}$  appartengono presi due a due, tre a tre ecc.

2. - Pensiamo la curva  $\Gamma$  scissa in due parti:  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ; essendo p. es.  $\Gamma_1 = C_1 + C_2 + \dots + C_i$  e  $\Gamma_2 = C_{i+1} + \dots + C_t$ . Se la  $g_n^r$  subordina sulla curva  $\Gamma_1$  la serie di equivalenza  $g_{m_1}^{r_1}$  ( $m_1 =$

(2) Supporremo  $r_h \geq 1$ ; per ogni  $h$ , perchè si può fare astrazione delle eventuali componenti della curva  $\Gamma$ , sulle quali la  $g_n^r$  non abbia punti variabili. Supporremo anche che nessuna delle serie  $g_{n_h}^{r_h}$  abbia punti fissi.

(3) V. SEVERI - Memoria B, n. 4.

(4) Può avvenire che p. es. la serie  $g_{n_h}^{r_h}$  sia composta con una involuzione di ordine  $\mu$ . In tal caso la curva  $C_h$  viene trasformata in una curva  $C'_h$  dell' ordine  $n_h : \mu$ , la quale deve considerarsi come una curva multipla secondo il numero  $\mu$ , ed appartiene tuttavia ad uno spazio di dimensione  $r_h$ . Nel caso che sia  $r_h = 1$ , la  $C_h$  viene trasformata in una retta multipla secondo il numero  $n_h$ . Si osserverà che il presentarsi di questi fatti per una o più delle serie subordinate dalla  $g_n^r$  sulle curve  $C_1, C_2, \dots, C_t$ , non altera affatto i successivi ragionamenti, i quali sono fondati solo sulla considerazione della dimensione degli spazi cui appartengono le curve  $C'_1, C'_2, \dots, C'_t$  (prese isolatamente) oppure le curve somma di alcune di esse.

$= n_1 + n_2 + \dots + n_i$ ) e sulla curva  $\Gamma_2$  la serie  $g''_{m_2}$  ( $m_2 = n_{i+1} + \dots + n_i$ ), nello spazio  $S_r$  la curva  $\Gamma'_1$ , trasformata della  $\Gamma_1$ , appartiene ad un  $S_{r'}$ ; e la curva  $\Gamma'_2$ , trasformata della  $\Gamma_2$ , appartiene ad un  $S_{r''}$ . Questi due spazi,  $S_{r'}$  ed  $S_{r''}$ , appartenendo allo spazio  $S_r$  si segano in un  $S_\rho$ , ove  $\rho = r' + r'' - r$ . Si noti che sarà  $\rho \geq 0$ , dovendo essere  $r \leq r' + r''$ .

Se  $\rho = 0$  (quindi  $r = r' + r''$ ), un qualsiasi  $S_{r'-1}$  di  $S_{r'}$  ed un qualsiasi  $S_{r''-1}$  di  $S_{r''}$  sono contenuti in un  $S_{r-1}$  di  $S_r$  <sup>(5)</sup>; il che vuol dire che un qualunque gruppo della serie  $g'_{m_1}$  è *aggregabile* (per formare un gruppo della  $g'_n$ ) ad un qualunque gruppo della  $g''_{m_2}$ ; e quindi, se le serie  $g'_{m_1}$  e  $g''_{m_2}$  sono complete, anche la  $g'_n$  lo è.

Se invece è  $\rho > 0$ , due gruppi  $G_1$  e  $G_2$ , rispettivamente delle serie  $g'_{m_1}$  e  $g''_{m_2}$ , sono *aggregabili* <sup>(6)</sup> allora e solo allora che lo spazio  $S_{r'-1}$  secante il  $G_1$  sulla  $\Gamma'_1$ , e lo spazio  $S_{r''-1}$  secante il  $G_2$  sulla  $\Gamma'_2$ , sono contenuti in un  $S_{\rho-1}$ ; per il che è necessario e sufficiente che tali  $S_{r'-1}$  ed  $S_{r''-1}$  contengano uno stesso  $S_{\rho-1}$  dello spazio  $S_\rho$ . Per ottenere i gruppi della  $g''_{m_2}$  aggregabili ad un generico  $G_1$  della  $g'_{m_1}$ , basta dunque considerare l'iperpiano di  $S_{r'}$  secante sulla  $\Gamma'_1$  il gruppo  $G_1$ , e determinare l' $S_{\rho-1}$  intersezione di questo  $S_{r'-1}$  con lo spazio  $S_\rho$ : gli  $S_{r''-1}$  di  $S_{r''}$  passanti per tale  $S_{\rho-1}$  segano sulla curva  $\Gamma'_2$  tutti e soli i gruppi della  $g''_{m_2}$  aggregabili al dato  $G_1$ . In modo analogo si avrebbero i gruppi della  $g'_{m_1}$  aggregabili ad un dato gruppo  $G_2$  della  $g''_{m_2}$ . In sostanza, ogni  $S_{\rho-1}$  dello spazio  $S_\rho$  è, entro l' $S_{r'}$ , sostegno di una stella di  $S_{r'-1}$ , ed entro l' $S_{r''}$ , sostegno di una stella di  $S_{r''-1}$ : queste due stelle segano, rispettivamente sulle curve  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ , certe serie di equivalenza  $g'^{r'-\rho}_{m_1}$  e  $g''^{r''-\rho}_{m_2}$ , tali che ciascuna di esse è formata da tutti e soli i gruppi aggregabili ad un qualsiasi gruppo dell'altra.

<sup>(5)</sup> E in uno solo, ammenochè gli spazi  $S_{r'-1}$ , ed  $S_{r''-1}$  non passino entrambi per l' $S_0$  comune ad  $S_{r'}$  e ad  $S_{r''}$ , nel qual caso per  $S_{r'-1}$  e per  $S_{r''-1}$  passano  $\infty^1$  iperpiani di  $S_r$ .

<sup>(6)</sup> S' intende: per formare un gruppo della  $g'_n$ .

3. - Gli  $S_{r'-1}$  dell'  $S_{r'}$ , passanti per lo spazio  $S_\rho$ , segano sulla curva  $\Gamma_1$  una serie  $g_{m_1}^{r'-\rho-1}$ , la quale può anche considerarsi segata, sulla  $\Gamma_1$ , dagli  $S_{r'-1}$  passanti per lo spazio  $S_{r'}$ . Questa serie  $g_{m_1}^{r'-\rho-1}$  è dunque formata da tutti e soli i gruppi della  $g_{m_1}'$ , ciascuno dei quali è aggregabile a tutti i gruppi della  $g_{m_2}''$ . Analogamente, entro la  $g_{m_2}''$  esiste una  $g_{m_2}^{r''-\rho-1}$  (segata sulla  $\Gamma_1$  dagli  $S_{r''-1}$  passanti per lo spazio  $S_\rho$ ) formata da tutti e soli i gruppi della  $g_{m_2}''$ , ciascuno dei quali è aggregabile ad ogni gruppo della  $g_{m_1}'$ .

Un gruppo della  $g_n^r$ , risultante dalla somma di un gruppo della  $g_{m_1}^{r'-\rho-1}$  con un gruppo qualunque della  $g_{m_2}''$ , è segato sulla curva  $\Gamma$  da una forma del sistema associato  $\Sigma$  passante per la curva  $\Gamma_2$  (o, più propriamente, da una forma infinitamente vicina a questa): esso è dunque *un gruppo eccezionale di 1ª specie* (7). Analogamente, ogni gruppo che si ottenga aggregando un gruppo qualunque della  $g_{m_1}'$  con un gruppo della  $g_{m_2}^{r''-\rho-1}$  è pure un gruppo eccezionale di prima specie. Ad ogni possibile spezzamento della curva  $\Gamma$  in due curve parziali  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , corrispondono dunque due serie di equivalenza, ciascuna di ordine:  $n = m_1 + m_2$ , e di dimensione:  $r - 1 = r' + r'' - \rho - 1$ , le quali  $g_n^{r-1}$  sono interamente costituite da gruppi eccezionali di prima specie (8).

Viceversa, sia  $G$  un gruppo eccezionale di prima specie per la  $g_n^r$  segata sulla curva  $\Gamma$  dal sistema associato  $\Sigma$ . Il gruppo  $G$  si potrà considerare segato sulla  $\Gamma$  da una forma  $F$  di  $\Sigma$ , passante per una o più delle componenti irriducibili della  $\Gamma$  stessa. Se diciamo  $\Gamma_1$  la somma di queste componenti irriducibili

(7) V. SEVERI. Mem. B - n. 5.

(8) S' intende che taluna di queste  $g_n^{r-1}$  può anche mancare, perchè possono per es. non esserci, entro la  $g_{m_1}'$ , gruppi aggregabili a tutti i gruppi della  $g_{m_2}''$ . Ciò avviene se lo spazio  $S_{r''}$  contiene lo spazio  $S_{r'}$ , nel qual caso è  $r'' = r$  ed  $r' = \rho$ , e quindi mancano gli  $S_{r'-1}$  passanti per l'  $S_{r''}$ . Risulta allora:  $r' - \rho - 1 = -1$ .

per le quali passa la  $F$ , e  $\Gamma_2$  la somma delle rimanenti componenti irriducibili della  $\Gamma$ , si vede subito che  $G$  è segato sulla curva  $\Gamma'$  da un iperpiano dell' $S_r$  passante per lo spazio  $S_{r'}$ , cui appartiene la curva  $\Gamma'_1$ , trasformata della  $\Gamma_1$ . Ne segue che il gruppo  $G$  risulta dal sommare un gruppo della serie  $g_{m_1}^{r'}$ , subordinata dalla  $g_n^r$  sulla  $\Gamma_1$ , con un gruppo della  $g_{m_2}^{r''}$  (subordinata dalla  $g_n^r$  sulla  $\Gamma_2$ ) aggregabile a tutti i gruppi della  $g_{m_1}^{r'}$ . Le varie coppie di serie  $g_n^{r-1}$  formate, come sopra si è visto, da gruppi eccezionali di prima specie, e corrispondenti a tutti i possibili spezzamenti in due parti della curva  $\Gamma$ , esauriscono dunque tutti i gruppi eccezionali di prima specie appartenenti alla  $g_n^r$ .

Da quanto si è detto in questo n.º risulta che i gruppi eccezionali di prima specie, di una serie di equivalenza  $g_n^r$ , sono suscettibili della seguente definizione:

*Un gruppo  $G$ , di una serie di equivalenza  $g_n^r$ , sopra una curva riducibile  $\Gamma$ , è eccezionale di prima specie, se la parte di esso esistente su di una curva  $\Gamma_2$  (riducibile o no), parte della  $\Gamma$ , è un gruppo aggregabile a tutti i gruppi della serie subordinata dalla  $g_n^r$  sulla curva rimanente  $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_2$ .*

Questa definizione è invariante per trasformazioni birazionali della curva, e quindi indipendente dal sistema lineare associato  $\Sigma$ , col quale si supponga di segare la serie <sup>(9)</sup>.

<sup>(9)</sup> Ciò concorda con la proposizione enunciata dal SEVERI (Memoria B n. 7): «*I gruppi eccezionali non son gruppi di natura essenzialmente diversa dai gruppi generici della  $g_n^r$ , considerata in sè stessa. Un gruppo eccezionale può mutar di specie o diventare non eccezionale, cangiando il sistema lineare associato*», la quale proposizione si riferisce (come è detto nel seguito del citato n. 7) alle serie di equivalenza  $g_n^r$ , complete. E, infatti, se la serie  $g_n^r$  è completa, comunque si supponga la curva  $\Gamma$  scomposta in due parti  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , ogni gruppo della serie che la  $g_n^r$  subordina sulla  $\Gamma_1$  è aggregabile ad ogni gruppo della serie che essa subordina sulla  $\Gamma_2$ ; sicchè, secondo la definizione del testo, tutti i gruppi della  $g_n^r$  sono eccezionali di prima specie. In relazione ad ogni sistema lineare associato  $\Sigma$ , si hanno ancora, per ogni possibile scissione della  $\Gamma$  in due parti, due  $g_n^{r-1}$  formate da gruppi eccezionali di prima specie; ma (come risulterà in seguito: v. n. 6,

La  $g_n^{r-1}$ , formata da gruppi eccezionali di prima specie, contenente parzialmente *ogni* gruppo della serie  $g_{m_1}'$  subordinata dalla  $g_n^r$  sulla curva parziale  $\Gamma_1$ , si dirà brevemente: *la  $g_n^{r-1}$  eccezionale relativa alla curva  $\Gamma_1$ .*

4. - Anche i gruppi eccezionali di 2<sup>a</sup> specie sono suscettibili di una definizione invariante. È facile provare che:

*1 gruppi eccezionali di seconda specie, di una serie di equivalenza  $g_n^r$  appartenente ad una curva riducibile  $\Gamma$ , sono tutti e soli i gruppi comuni alle  $t$   $g_n^{r-1}$  eccezionali relative alle componenti irriducibili  $C_1, C_2, \dots, C_t$ , della  $\Gamma$ .*

Sia, infatti,  $G$  un gruppo eccezionale di 2<sup>a</sup> specie per la  $g_n^r$  segata, sulla curva  $\Gamma$ , dal sistema lineare associato  $\Sigma$ . Per  $G$  passano allora infinite forme di  $\Sigma$ , sicchè esiste almeno una forma di  $\Sigma$  passante per la curva  $C_h$  ( $h = 1, 2, \dots, t$ ). Ciò vuol dire che il gruppo  $G$  appartiene alla  $g_n^{r-1}$  eccezionale relativa alla  $C_h$ , qualunque sia  $h$ .

Inversamente, sia  $G$  un gruppo della  $g_n^r$  comune alle  $t$   $g_n^{r-1}$  eccezionali relative alle curve  $C_1, C_2, \dots, C_t$ . Vi è allora una forma,  $F_1$ , di  $\Sigma$ , passante per  $G$  e contenente la curva  $C_1$ ; una,  $F_2$ , passante per  $G$  e contenente la curva  $C_2$ ; ... e una  $F_t$ , passante per  $G$  e contenente la curva  $C_t$ . Queste forme  $F_1, F_2, \dots, F_t$  non possono coincidere tutte in una sola, altrimenti vi sarebbe una forma di  $\Sigma$  passante per l'intera  $\Gamma$ , ciò che non avviene, essendo  $\Sigma$  un sistema lineare associato alla  $g_n^r$ . Dunque vi sono almeno due distinte forme di  $\Sigma$  (e quindi infinite) passanti per  $G$ , il che prova che esso è un gruppo eccezionale di 2<sup>a</sup> specie.

5. - Torniamo a considerare la curva  $\Gamma$  scissa nelle due curve (riducibili o no)  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ :  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ . Supponiamo date, sulle curve  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , rispettivamente le serie di equivalenza

Oss. II) tali  $g_n^{r-1}$  possono esser cambiate ad arbitrio, cambiando opportunamente il sistema lineare associato. Invece ciò non avviene se la  $g_n^r$  è incompleta.

$g_{m_1}^{r'}$  e  $g_{m_2}^{r''}$ . Vediamo come si possono costruire le serie di equivalenza  $g_n^r$  ( $n = m_1 + m_2$ ;  $r \leq r' + r''$ ) appartenenti alla curva  $\Gamma$ , le quali subordinano sulle componenti  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  le date serie  $g_{m_1}^{r'}$  e  $g_{m_2}^{r''}$ .

Essendo  $\rho = r' + r'' - r$ , assumiamo ad arbitrio, entro la  $g_{m_1}^{r'}$  una serie di equivalenza  $g_{m_1}^{r'-\rho-1}$ , ed entro la  $g_{m_2}^{r''}$  una serie di equivalenza  $g_{m_2}^{r''-\rho-1}$ . Consideriamo, in uno spazio  $S_{r'}$ , la curva  $\Gamma'_1$  (trasformata della  $\Gamma_1$ ) immagine della serie  $g_{m_1}^{r'}$ ; e, in un  $S_{r''}$ , la curva  $\Gamma'_2$  (trasformata della  $\Gamma_2$ ), immagine della serie  $g_{m_2}^{r''}$ . Sulla  $\Gamma'_1$  la  $g_{m_1}^{r'-\rho-1}$  sarà segata dagli iperpiani di  $S_{r'}$  passanti per un certo  $S_\rho$ , che indicheremo con  $A$ ; e, analogamente, sulla  $\Gamma'_2$  la serie  $g_{m_2}^{r''-\rho-1}$  sarà segata dagli iperpiani di  $S_{r''}$  passanti per un certo  $S_\rho$ , che indicheremo con  $B$ . Stabiliamo, a piacere, una omografia non singolare,  $\Omega$ , fra gli spazi  $A$  e  $B$ . Infine, diciamo *aggregabili* un gruppo  $G_1$  della serie  $g_{m_1}^{r'}$  ed uno  $G_2$  della  $g_{m_2}^{r''}$ , allorchè gli iperpiani, degli spazi  $S_{r'}$  ed  $S_{r''}$ , che segano il  $G_1$  e il  $G_2$  rispettivamente sulle curve  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ , segano inoltre gli spazi  $A$  e  $B$  in  $S_{\rho-1}$  corrispondenti per la fissata omografia  $\Omega$ . Proveremo che la totalità  $\gamma$  dei gruppi di  $n = m_1 + m_2$  punti, ottenuti sommando gruppi *aggregabili* delle serie  $g_{m_1}^{r'}$  e  $g_{m_2}^{r''}$  è, sulla  $\Gamma' = \Gamma'_1 + \Gamma'_2$ , una serie di equivalenza  $g_n^r$  <sup>(10)</sup>.

Si consideri, infatti, un  $S_r$ , ed in esso si prendano due spazi  $\bar{S}_{r'}$  ed  $\bar{S}_{r''}$  segantisi in un  $S_\rho$ , che indicheremo con  $C$ . Stabiliamo una omografia non singolare,  $\Omega_1$ , fra gli spazi  $A$  e  $C$ , e fra gli spazi  $B$  e  $C$  stabiliamo l'omografia  $\Omega_2 = \Omega^{-1} \cdot \Omega_1$ . Riferiamo, poi, omograficamente, gli spazi  $S_{r'}$  ed  $\bar{S}_{r'}$ , in modo che gli spazi  $A$  e  $C$  si corrispondano e fra essi venga subordinata l'omografia  $\Omega_1$ ; e riferiamo omograficamente gli spazi  $S_{r''}$  ed  $\bar{S}_{r''}$

<sup>(10)</sup> Ciò risulterebbe immediatamente osservando che la serie  $\gamma$  è razionale ed involutoria (V. SEVERI - Mem. B, n. 13). La dimostrazione del testo ha, però, il vantaggio di fornire un sistema lineare associato che sega la serie; inoltre essa ricorre a concetti meno elevati.



in modo che si corrispondano gli spazi  $B$  e  $C$  e che fra essi venga subordinata l'omografia  $\Omega_2$ . La curva  $\Gamma'_1$  verrà allora trasformata in una curva  $\bar{\Gamma}_1$  di  $\bar{S}_{r'}$ , e la  $\Gamma'_2$  in una  $\bar{\Gamma}_2$  di  $\bar{S}_{r''}$ . Due gruppi, uno della  $g_{m_1}^{r'}$  ed uno della  $g_{m_2}^{r''}$ , i quali siano *aggregabili*, nel senso sopra dichiarato, vengono trasformati in gruppi segati rispettivamente sulle curve  $\bar{\Gamma}_1$  e  $\bar{\Gamma}_2$  da un iperpiano di  $\bar{S}_{r'}$  e da un iperpiano di  $\bar{S}_{r''}$ ; e questi iperpiani debbono incontrare lo spazio  $C$  in due  $S_{\rho-1}$  corrispondenti nell'omografia:  $\Omega_1^{-1} \cdot \Omega \cdot \Omega_2$ . Ma questa omografia è l'identità ( $\Omega_1^{-1} \cdot \Omega \cdot \Omega_2 = \Omega_1^{-1} \cdot \Omega \cdot \Omega^{-1} \cdot \Omega_1 = 1$ ); dunque quei due iperpiani incontrano lo spazio  $C$  nel medesimo  $S_{\rho-1}$  e perciò appartengono ad un spazio di dimensione:  $r' - 1 + r'' - 1 - (\rho - 1) = r - 1$ ; ossia appartengono ad un iperpiano di  $S_r$ .

Viceversa, ogni iperpiano di  $S_r$  sega gli spazi  $\bar{S}_{r'}$  ed  $\bar{S}_{r''}$  rispettivamente in un  $S_{r'-1}$  e in un  $S_{r''-1}$  uscenti dallo stesso  $S_{\rho-1}$  dello spazio  $C$ : perciò un tale iperpiano sega le curve  $\bar{\Gamma}_1$  e  $\bar{\Gamma}_2$  in gruppi trasformati di due gruppi *aggregabili* delle serie  $g_{m_1}^{r'}$  e  $g_{m_2}^{r''}$ , e quindi sega la curva  $\bar{\Gamma}$  in un gruppo trasformato di un gruppo della serie  $\gamma$ . Questa serie è dunque, sulla curva  $\Gamma$  la trasformata, per una corrispondenza birazionale, della serie di equivalenza  $g_n^r$  segata dagli iperpiani di  $S_r$  sulla curva  $\bar{\Gamma}$ ; e perciò è essa stessa una serie di equivalenza, c. v. d. Gli iperpiani di  $S_r$  formano un sistema lineare associato che sega la serie.

È poi evidente che la serie  $\gamma$  subordina, sulle curve  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$ , le date serie  $g_{m_1}^{r'}$  e  $g_{m_2}^{r''}$ .

Si noti che, mediante la costruzione indicata, si può ottenere una qualsiasi serie di equivalenza  $g_n^r$ , la quale subordina sulle curve  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  le date serie  $g_{m_1}^{r'}$  e  $g_{m_2}^{r''}$ . Infatti, si faccia (come al n.º 1) l'immagine in un  $S_r$  di una tale  $g_n^r$ . Alla curva  $\Gamma_1$  verrà a corrispondere una curva  $\bar{\Gamma}_1$  appartenente ad un  $\bar{S}_{r'}$  di  $S_r$ , e alla  $\Gamma_2$  una  $\bar{\Gamma}_2$  appartenente ad un  $\bar{S}_{r''}$  di  $S_r$ ; e gli spazi  $\bar{S}_{r'}$  ed  $\bar{S}_{r''}$  si intersecheranno in uno spazio  $C$  di dimensione  $\rho = r' + r'' - r$ . Riferendo omograficamente lo spazio  $\bar{S}_{r'}$  ad un qualsiasi  $S_{r'}$ , e lo spazio  $\bar{S}_{r''}$  ad un  $S_{r''}$ , si vede senza

difficoltà che la  $g_n^r$  viene ad ottenersi nel modo che è stato indicato.

6. - *Osservazione I.* - Per costruire una  $g_n^r$ , sulla curva  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , nel modo che si è detto al n.º 5, abbiamo visto che, date le serie  $g_{m_1}^{r'}$  e  $g_{m_2}^{r''}$  (rispettivamente sulle curve  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ), si possono poi dare ad arbitrio: una serie  $g_{m_1}^{r'-\rho-1}$  contenuta totalmente entro la  $g_{m_1}^{r'}$ , ed una serie  $g_{m_2}^{r''-\rho-1}$  contenuta totalmente entro la  $g_{m_2}^{r''}$  ( $\rho = r' + r'' - r$ ). Ora si osservi che, per la definizione ivi data di *gruppi aggregabili*, la  $g_{m_1}^{r'-\rho-1}$  risulta formata da tutti e soli i gruppi della serie  $g_{m_1}^{r'}$ , ciascuno dei quali è aggregabile ad ogni gruppo della  $g_{m_2}^{r''}$ ; sicchè, il dare ad arbitrio la  $g_{m_1}^{r'-\rho-1}$  entro la  $g_{m_1}^{r'}$  equivale a dare la  $g_n^{r-1}$  eccezionale (della  $g_n^r$ ) relativa alla curva  $\Gamma_1$  (v. n. 3); ed analogamente, il dare la  $g_{m_2}^{r''-\rho-1}$  entro la  $g_{m_2}^{r''}$ , equivale a dare la  $g_n^{r-1}$  eccezionale relativa alla curva  $\Gamma_2$ . Si noti che, data per es. la  $g_n^{r-1}$  eccezionale relativa alla curva  $\Gamma_1$ , resta anche determinata la  $g_{m_1}^{r'}$  che la  $g_n^r$  deve subordinare sulla  $\Gamma_1$ , perchè tale  $g_{m_1}^{r'}$  è subordinata sulla  $\Gamma_1$  anche dalla  $g_n^{r-1}$ . Si può dunque affermare che:

*Per costruire una serie di equivalenza  $g_n^r$  sulla curva riducibile  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , si possono dare ad arbitrio le due  $g_n^{r-1}$  eccezionali relative alle curve  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  <sup>(11)</sup>. Resta, poi, ancora arbitraria una omografia non singolare,  $\Omega$ , da stabilirsi fra due spazî di dimensione  $\rho = r' + r'' - r$ , essendo  $r'$  la dimensione della serie che la  $g_n^{r-1}$  relativa alla  $\Gamma_1$  subordina sulla  $\Gamma_1$*

(11) Beninteso, queste due  $g_n^{r-1}$  possono essere date ad arbitrio purchè soddisfacenti alle seguenti condizioni: 1) le serie che le due  $g_n^{r-1}$  subordinano sulla curva  $\Gamma_1$  (e così quelle che subordinano sulla  $\Gamma_2$ ) si debbono appartenere; 2) ciascuna delle due  $g_n^{r-1}$  deve risultare dall'aggregare in tutti i modi possibili, un gruppo della serie subordinata sulla  $\Gamma_1$  con uno di quella subordinata sulla  $\Gamma_2$ ; 3) la differenza fra le dimensioni delle serie che le due  $g_n^{r-1}$  subordinano sulla  $\Gamma_1$ , deve uguagliare la differenza delle dimensioni delle serie che esse subordinano sulla  $\Gamma_2$ .

stessa, e  $r''$  la dimensione della serie che la  $g_n^{r-1}$  relativa alla  $\Gamma_2$  subordina su questa curva.

*Osservazione II.* - Se  $\rho = 0$  ( $r = r' + r''$ ), gli spazi  $A$  e  $B$  (v. n.° 5) si riducono a due punti. In tal caso, ogni gruppo della  $g_{m_1}^{r'}$  deve riguardarsi come aggregabile ad ogni gruppo della  $g_{m_2}^{r''}$ ; perciò la  $g_n^r$  che si viene a costruire è sempre la stessa comunque si prendano i punti  $A$  e  $B$  entro gli spazi  $S_{r'}$  ed  $S_{r''}$ , cioè comunque si diano le  $g_n^{r-1}$  eccezionali relative alle curve  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Ma date queste  $g_n^{r-1}$  (cioè dati i punti  $A$  e  $B$  nei rispettivi spazi) il sistema lineare associato alla  $g_n^r$  che si viene a costruire (formato dagli iperpiani dello spazio  $S_r$ ) è tale che, rispetto ad esso, la  $g_n^r$  ha per gruppi eccezionali di prima specie, quelli delle date  $g_n^{r-1}$ .

Se, invece, è  $\rho > 0$ , cambiando la posizione degli spazi  $A$  e  $B$ , rispettivamente entro l' $S_{r'}$  e l' $S_{r''}$ , cioè cambiando le  $g_n^{r-1}$  eccezionali relative alle curve  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , si viene a cambiare il modo di aggregare i gruppi della  $g_{m_1}^{r'}$  con quelli della  $g_{m_2}^{r''}$ , e perciò si vengono a costruire serie  $g_n^r$  differenti <sup>(12)</sup>.

7. - È chiaro, ora, come si debba procedere, per costruire, sulla curva  $\Gamma = C_1 + C_2 + \dots + C_t$ , una serie di equivalenza  $g_n^r$ , la quale subordini sulle curve irriducibili  $C_1, C_2, \dots, C_t$  rispettivamente certe date serie lineari:  $g_{n_1}^{r_1}, g_{n_2}^{r_2}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$  ( $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$ ).

Si comincerà col costruire sulla curva  $\Gamma_2 = C_1 + C_2$ , nel modo indicato al n.° 5, una serie di equivalenza  $g_{n_1+n_2}^{r_1+r_2}$ , la quale subordini sulle curve  $C_1$  e  $C_2$  rispettivamente le serie  $g_{n_1}^{r_1}$  e  $g_{n_2}^{r_2}$ . Sia:

$$r'' = r_1 + r_2 - \rho_1 \quad (0 \leq \rho_1 \leq r_1; \rho_1 \leq r_2).$$

Poi si costruirà, sempre come al n.° 5, sulla curva  $\Gamma_3 = \Gamma_2 + C_3$  ( $= C_1 + C_2 + C_3$ ) una serie di equivalenza  $g_{n_1+n_2+n_3}^{r_1+r_2+r_3}$ , la quale subordini sulla  $\Gamma_2$  la serie  $g_{n_1+n_2}^{r_1+r_2}$  già costruita, e sulla  $C_3$  la  $g_{n_3}^{r_3}$ .

(12) Si confronti con la nota (9).

Sia :

$$r''' = r'' + r_3 - \rho_2 \quad (0 \leq \rho_2 \leq r''; \rho_2 \leq r_3).$$

Così si seguirà finchè siano esaurite le curve  $C_1, C_2, \dots, C_t$ .  
L'ultima costruzione riguarderà una  $g_n^{r^{(t)}}$  sulla curva

$$\Gamma = \Gamma_{t-1} + C_t \quad (\Gamma_{t-1} = C_1 + C_2 + \dots + C_{t-1}),$$

la quale serie dovrà subordinare sulla  $\Gamma_{t-1}$  la serie precedentemente costruita:  $g_{n_1+n_2+\dots+n_{t-1}}^{r^{(t-1)}}$ , e sulla  $C_t$  la  $g_{n_t}^{r_t}$ . Dovrà risultare:

$$r = r^{(t)} = r^{(t-1)} + r_t - \rho_{t-1} \quad (0 \leq \rho_{t-1} \leq r^{(t-1)}; \rho_{t-1} \leq r_t).$$

I numeri interi assoluti  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{t-1}$  potranno essere assunti ad arbitrio, purchè soddisfacenti alle disuguaglianze indicate entro le parentesi, ed all'uguaglianza (conseguenza delle uguaglianze successivamente scritte):

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{t-1} = r_1 + r_2 + \dots + r_t - r.$$

Questi numeri  $\rho$  dovranno prendersi tutti uguali a zero allora e solo allora che sia  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_t$ , nel qual caso i gruppi della  $g_n^r$  si otterranno aggregando, in tutti i modi possibili, un gruppo della  $g_{n_1}^{r_1}$  con uno della  $g_{n_2}^{r_2} \dots$  e con uno della  $g_{n_t}^{r_t}$ . In questo caso, se le  $g_{n_1}^{r_1}, g_{n_2}^{r_2}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$  sono complete, tale risulta anche la  $g_n^r$ .

---