RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO LEVI

Ancora sulle varietà a tre dimensioni che rappresentano un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del 2° e 3° ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 5 (1934), p. 148-159

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1934__5__148_0>

ANCORA SULLE VARIETÀ A TRE DIMENSIONI CHE RAPPRESENTANO UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL 2° E 3° ORDINE.

di Ugo Levi *a Saluzzo*

1. Facendo seguito alla mia Nota « Intorno alle varietà a tre dimensioni che rappresentano un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del 2° e 3° ordine » (1), proseguirò lo studio, già iniziato in quella, delle varietà indicate nel titolo.

Continuando a far uso della notazione del Bompiani, (2) per tutte le V_3 considerate il numero h_2 delle equazioni del 2° ordine linearmente indipendenti rappresentate dalla varietà è *tre*, e (3) conseguentemente $6 \leq h_3 \leq 9$. Nella Nota precedente abbiamo studiato i casi $h_3 = 6$, $h_3 = 7$, senza legarci a nessuna ipotesi circa la forma delle equazioni del 2° ordine: in questa Nota studieremo i casi $h_3 = 8$, $h_3 = 9$.

Per $h_3 = 9$ continueremo a supporre le tre equazioni del 2° ordine di tipo affatto qualunque, invece per $h_3 = 8$ ci limiteremo

(1) Pubblicato in questi Rendiconti – Anno IV, 1933.

(2) « *Determinazione delle superficie integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee* ». [Rendiconti R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. LII – pag. 612].

(3) Escludiamo senz' altro il caso banale $h_3 = 10$, nel quale la V_3 giace per intero in ciascun suo $S(2)$ generico e pertanto giace in un S_6 (e non in un S_7 come, per un errore sfuggito all' A. durante la revisione, è detto nell' ultima linea della seconda pagina della nota precedente): colgo questa occasione per rettificare in Lane il nome di Lalan erroneamente indicato nella nota 3) della prima pagina del suddetto lavoro.

a supporre che le tre equazioni alle derivate parziali del 2° ordine linearmente indipendenti, facenti parte del sistema, costituiscano un sistema di DARBOUX (4); cioè che esse siano della forma (5)

$$(1)\qquad \begin{cases} x^{110} \sim S(1) \\ x^{011} \sim S(1) \\ x^{101} \sim S(1) \end{cases}$$

Se per il punto x adottiamo coordinate proiettive non omogenee, il fatto che la V_3 non rappresenta ulteriori equazioni del 2° ordine che non siano combinazioni lineari delle (1), importa che i secondi membri delle (1) si possono scrivere per disteso nella forma seguente

$$(2)\qquad \begin{cases} x^{110} = a_1 x^{100} + a_2 x^{010} \\ x^{011} = b_2 x^{010} + b_3 x^{001} \\ x^{101} = c_1 x^{100} + c_3 x^{001} \end{cases}$$

La forma stessa delle equazioni (2), come già ebbi ad accennare nella mia Nota citata (6), mette in evidenza sulla V_3 l'esistenza di tre sistemi ∞^1 di superficie, che si tagliano secondo linee coniugate, nel senso che le linee, secondo le quali ogni superficie di un sistema è segata dalle superficie degli altri

(4) «*Leçons sur la théorie générale des surfaces*» [Tomo 4°, N. 1093].

(5) Con x^{ijk} indico la derivata di ordine $i+j+k$, ottenuta derivando $x(u_1, u_2, u_3)$ i volte rispetto ad u_1, j volte rispetto ad u_2, k volte rispetto ad u_3. Per le rimanenti notazioni in genere rinviamo alla mia Nota citata: fra l'altro notiamo che il simbolo $\sim$ usato nelle (1) sta ad indicare che ciascuna delle derivate seconde considerate è uguale ad una combinazione lineare di x e delle derivate prime od anche che il corrispondente punto derivato secondo sta nello S_3 tangente alla V_3 nel punto x; così pure nella (3) e nella (4) lo stesso simbolo sta ad indicare che l'espressione scritta a primo membro è uguale ad una combinazione lineare di x e delle derivate seconde e prime la cui forma effettiva per il momento viene trascurata.

(6) Vedi nota (1).

due sistemi, costituiscono su quella due sistemi coniugati. Quei tre sistemi ∞^1 di superficie godono anche della proprietà che i piani tangenti alle superficie di un sistema nei punti della linea intersezione di due superficie dei rimanenti due sistemi, costituiscono una sviluppabile ordinaria. Tali V_3 furono chiamate V_3 di DARBOUX.

2. Studiamo anzitutto il caso $h_3 = 9$.

Prima di proseguire nella trattazione premetto il seguente lemma, che generalizza quello dimostrato dal BOMPIANI per il caso della superficie (7):

Se una V_k $(k \geq 2)$ dello S_n è tale che il suo $S(\nu)$ osculatore generico ha dimensione ρ e lo $S(\nu+1)$ osculatore generico ha dimensione $\rho+1$, essa è composta da ∞^1 V_{k-1} appartenenti ad altrettanti $S_{\rho-\nu}$ costituenti una sviluppabile ordinaria oppure sta in uno spazio di dimensione $\rho+1$.

La dimostrazione che segue si ottiene senz' altro estendendo quella del BOMPIANI (8) osservando però che la prima parte di questa, la cui estensione sarebbe meno immediata, non risulta necessaria per quanto riguarda la conclusione. Nella dimostrazione supponiamo senz' altro che lo spazio ambiente non abbia dimensione $\rho+1$, dobbiamo quindi dimostrare che la V_k è composta da ∞^1 V_{k-1} appartenenti ad altrettanti $S_{\rho-\nu}$ costituenti una sviluppabile ordinaria.

Osserviamo anzitutto che la V_k possiede soltanto ∞^1 $S(\nu)$ osculatori. Infatti gli $S(\nu)$ osculatori alla V_k in punti infinitamente vicini (del 1° ordine) al punto P, stanno nello $S(\nu+1)$ osculatore in P. Gli $S(\nu)$ osculatori alla V_k costituiscono dunque un sistema continuo tale che segando con un generico spazio $S_{n-\rho+1}$ si ottiene un sistema di rette tali che due infinitamente vicine sono incidenti. Per un teorema di SEGRE (8) queste rette se sono più che ∞^1 passano per un punto o giacciono in un piano. Perciò se gli $S(\nu)$ osculatori alla V_k fossero più che ∞^1

(7) Loc. cit. (2) pag. 614.

(8) « *Preliminari ad una teoria delle varietà luoghi di spazi* ». [Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, tomo XXX, 1910] n. 25.

essi passerebbero per uno stesso $S_{\rho-1}$ oppure giacerebbero in uno stesso $S_{\rho+1}$, casi entrambi esclusi.

Adunque ciascuno di quegli $S(\nu)$ è osculatore alla V_k in tutti i punti di una sua V_{k-1}; ciascuna di queste ∞^1 V_{k-1} sta entro $\nu+1$ consecutivi fra gli $S(\nu)$ osculatori, cioè in uno $S_{\rho-\nu}$, il quale varia fra gli $\infty^1 S_{\rho-\nu}$ costituenti una sviluppabile ordinaria.

Riprendendo la nostra trattazione, per le V_3 che stiamo considerando le dimensioni degli $S(2)$ e degli $S(3)$ osculatori sono rispettivamente *sei* e *sette*, cioè il passaggio dagli $S(2)$ agli $S(3)$ implica l'aumento di una sola unità nella dimensione degli spazi corrispondenti; perciò applicando il lemma segue senz' altro che *ogni* V_3 *per cui sia* $h_2 = 3$, $h_3 = 9$ *è necessariamente costituita da* ∞^1 *superficie giacenti negli* S_4 *di una sviluppabile ordinaria.*

Viceversa è chiaro che le V_3 così ottenute soddisfano alle condizioni richieste, a meno di ulteriori specializzazioni che aumentino i valori di h_2 o di h_3.

3. Passiamo ora al caso successivo $h_3 = 8$ nell' ipotesi però che le tre equazioni alle derivate parziali del 2° ordine siano della forma (2).

In questo caso, fra le otto equazioni alle derivate parziali del 3° ordine formanti il sistema, vi saranno le sette equazioni che si ottengono derivando in tutti i modi possibili le tre equazioni del sistema (2), ed inoltre un' ottava non ottenibile nè per derivazione nè per combinazione lineare delle precedenti; in detta equazione, eliminate tutte le derivate esprimibili linearmente mediante quelle di ordine inferiore, interverranno solamente più le tre derivate residue x^{300}, x^{030}, x^{003}, una almeno delle quali con coefficiente diverso da zero.

Supponiamo ad esempio che questa ottava equazione si possa scrivere nella seguente forma:

$$x^{300} - lx^{030} - nx^{003} \sim S(2) \tag{3}$$

dove per ora l ed n siano funzioni di u_1, u_2, u_3, tutti non identicamente nulli. Se calcoliamo le derivate quarte, (derivando in tutti i modi possibili le otto equazioni alle derivate parziali del 3º ordine), tutte si potranno esprimere linearmente come combinazioni lineari delle derivate precedenti. In tali ipotesi possiamo senz' altro concludere che lo $S(4)$ in un punto generico della V_3 coincide con lo $S(3)$, cosicchè la V_3 giace in S_8.

Viceversa ogni V_3 di Darboux immersa in un S_8 soddisfa evidentemente alle condizioni $h_2 = 3$, $h_3 = 8$, salvo che i suoi $S(3)$ osculatori si abbassino di dimensioni, nel qual caso le V_3 ricadono fra quelle studiate nel numero precedente.

Le V_3 studiate in questo n.º si riducono dunque alle V_3 di S_8, (con la riserva formulata nell' ultimo capoverso).

4. Supponiamo ora invece che nella equazione (3) sia $n = 0$ ma $l \neq 0$ [9] cosicchè

$$x^{300} - l\,x^{030} \simeq S(2)\,. \tag{4}$$

In questa ipotesi la dimensione dello $S(4)$ supera di una unità la dimensione dello $S(3)$ in un punto generico della V_3, in quanto tutte le derivate quarte, ad eccezione della x^{004} si possono esprimere come combinazioni lineari delle derivate d'ordine inferiore [10].

Per l' enunciato del n. 2 si può senz' altro concludere che *attualmente se la V_3 non giace in uno spazio di dimensione* 8 *essa è composta di ∞^1 superficie giacenti negli S_5 di una sviluppabile ordinaria.*

Cerchiamo di fare uno studio più accurato delle V_3 in esame; ciò è necessario perchè una V_3 quale risulta dall' enunciato precedente conduce bensì (salvo eventuali eccezioni) ai valori $h_2 = 3$, $h_3 = 8$, ma non risulta generalmente una V_3 di Darboux.

[9] Lo stesso si potrebbe dire con poche varianti formali se fosse $l = 0$ ed $n \neq 0$.

[10] Se poi, indipendentemente dalle relazioni ottenute derivando la (4), anche la x^{004} si può esprimere per combinazione lineare delle derivate d'ordine inferiore, si ricade senz' altro nel caso trattato nel n. 3; nel seguito di questo numero prescindiamo da tale eventualità.

La equazione (4), tenuto conto delle equazioni del sistema (2) e di quelle del 3° ordine ottenute derivando queste in tutti i modi possibili, si può scrivere per disteso nel seguente modo:

$$(5)\qquad x^{300} = lx^{030} + fx^{200} + nx^{020} + px^{002} + qx^{100} + rx^{010} + sx^{001}$$

dove l, f, $n, \ldots$ sono funzioni di u_1, u_2, u_3. Tenendo poi conto delle condizioni di integrabilità e precisamente paragonando la derivata della (5) fatta rispetto ad u_3 con la derivata della equazione $x^{101} \backsim S(1)$ fatta due volte rispetto ad u_1 si trova anzitutto che deve essere $p = 0$ (altrimenti si verrebbe ad avere una ulteriore equazione differenziale alle derivate parziali del 3° ordine, il che non deve sussistere). Ripetendo ora il medesimo calcolo, dopo aver già acquisito il risultato $p = 0$, sostituendo effettivamente in quanto è possibile le varie derivate che entrano in considerazione mediante quelle di ordine inferiore e tenendo infine conto della stessa (5), si trova una relazione lineare fra la derivata x^{030} e quelle di ordine inferiore, nella quale relazione il coefficiente di x^{002} è s; ma tale relazione deve ridursi ad una identità e quindi anche s deve essere identicamente nullo; di modo che in definitiva la equazione (5) si riduce alla forma:

$$(6)\qquad x^{300} = lx^{030} + fx^{200} + nx^{020} + qx^{100} + rx^{010}.$$

Ogni superficie $u_3 = \mathrm{cost}$, i punti della quale corrispondono alle coppie di valori dei parametri u_1 ed u_2, è una superficie Φ (giacchè per ipotesi $x^{110} = a_1 x^{100} + a_2 x^{010}$) a caratteristiche distinte; inoltre essa sta nello S_5 individuato (11) dai punti x, x^{100}, x^{010}, x^{200}, x^{020}, x^{030} (giacchè per la relazione (6) e precedenti e per quelle ottenute mediante derivazione, tutti i punti ottenuti mediante derivazione d'ordine superiore rispetto ai soli parametri u_1 ed u_2 stanno nello spazio individuato da questi sei punti); gli ∞^1 S_5 così ottenuti, in relazione con le ∞^1 superficie $u_3 = \mathrm{cost}$,

(11) I sei punti in questione sono certamente linearmente indipendenti perchè se no ne seguirebbe una nuova equazione del 3° ordine rappresentata dalla V_3.

costituiscono una sviluppabile perchè derivando rispetto ad u_3 i sei punti x, x^{100}, x^{010}, x^{200}, x^{020}, x^{030}, si ottengono combinazioni lineari di questi stessi punti e della nuova derivata x^{001}.

Inoltre le superficie Φ ($u_3 = \text{cost}$), situate negli S_5 di questa sviluppabile, risultano riferite tra loro punto per punto mediante le linee u_3, in quanto ogni valore dei parametri u_1 ed u_2 individua una linea u_3, che ha un punto su ciascuna delle superficie $u_3 = \text{cost}$. La corrispondenza è tale che i piani tangenti a due superficie infinitamente vicine in punti corrispondenti incontrano in una stessa retta lo S_4 comune agli S_5 delle due superficie Φ (giacchè stanno entrambi nello S_3 dei punti x, x^{100}, x^{010}, x^{001}).

Inoltre il riferimento fra le ∞^1 superficie Φ è evidentemente tale che su di esse si corrispondono le linee caratteristiche.

Dedotta la natura della V_3 dallo studio del sistema di equazioni rappresentate da tale varietà, cerchiamo ora di invertire il risultato.

Partiamo da ∞^1 superficie Φ a caratteristiche distinte situate negli S_5 di una sviluppabile, riferite fra loro in modo che:

α) i piani tangenti a due superficie Φ infinitamente vicine in punti corrispondenti incontrino in una stessa retta lo S_4 comune agli S_5 delle due superficie Φ, vale a dire stiano in S_3;

β) si corrispondano le linee caratteristiche.

Dico che la V_3 luogo delle ∞^1 superficie Φ è del tipo richiesto.

Si hanno infatti sulla V_3 tre famiglie di superficie:

a) le superficie Φ;

b) le superficie costituite da un sistema di linee caratteristiche delle ∞^1 superficie Φ;

c) le superficie costituite dall'altro sistema di linee caratteristiche delle medesime superficie.

Scelgo i parametri curvilinei u_1, u_2, u_3, sulla V_3 in modo che le tre famiglie di superficie siano ordinatamente rappresentate da $u_3 = \text{cost}$, $u_1 = \text{cost}$, $u_2 = \text{cost}$.

Il fatto che ogni superficie $u_3 = \text{cost}$ è una superficie Φ e che su di essa le linee u_1 ed u_2 sono le linee caratteristiche, ci dice intanto che sono legati linearmente fra di loro i punti

$$x,\ x^{100},\ x^{010},\ x^{110}. \tag{7}$$

Inoltre per la condizione α) i punti

(8) $$x,\ x^{100},\ x^{010},\ x^{001},\ x^{101},\ x^{011}$$

stanno in S_3 (e questo S_3 contiene ovviamente lo S_2 dei punti (7)).

Lo $S(2)$ osculatore alla V_3 considerata nel suo punto x, contenendo ulteriormente i punti x^{200}, x^{020}, x^{002}, ha dunque dimensione *sei*, salvo che questa si abbassi ulteriormente. Escludendo quest' ultima eventualità, nella quale la V_3 rappresentando quattro equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti rientra in classi già individuate da altri Autori, le relazioni che secondo quanto precede intercedono fra i punti considerati si possono scrivere (passando a coordinate non omogenee) secondo la forma (2) ([12]); cioè intanto la V_3 è una V_3 di DARBOUX. Di più essa oltre le sette equazioni del 3° ordine che si ottengono per derivazione da quelle del 2° ordine, rappresenta proprio una ulteriore equazione del 3° ordine del tipo (5); infatti lo S_5 contenente la superficie Φ a cui appartiene il punto x, contiene i punti x, x^{100}, x^{010}, x^{200}, x^{020}, x^{002}, x^{030}, e questo fatto si traduce appunto in una equazione del tipo (5).

Le condizioni α) e β) conducono quindi ad una V_3 del tipo richiesto ove si escludano quelle particolari V_3 per le quali come già si è detto, risulti $h_2 > 3$, ed anche quelle per le quali eventualmente risulti $h_3 > 8$: ma anche queste V_3 appartengano a tipi a noi già noti.

Concludiamo pertanto che *le V_3 studiate in questo n.° sono tutte e sole le V_3 luoghi di ∞^1 superficie Φ, a caratteristiche distinte, situate negli S_5 di una sviluppabile, riferite fra loro in modo che sussistono le condizioni α) e β) dianzi* [*enunciate*] (con la riserva formulata nell' ultimo capoverso).

5. Rimane da considerare l' ultimo caso possibile in cui la equazione (3) per l' annullarsi simultaneo dei coefficienti l ed n si riduca alla forma

([12]) Perchè se no risulterebbe $h_2 > 3$.

$$x^{300} \sim S(2). \tag{9}$$

Seguendo lo stesso procedimento del numero precedente, si vede che la equazione (9) può scriversi esplicitamente nel modo seguente:

$$x^{300} = fx^{200} + qx^{100}. \tag{10}$$

Dalla suddetta equazione, si deduce che la derivata quarta e susseguenti fatte rispetto al parametro u_1, si possono esprimere come combinazioni lineari di x, x^{100}, x^{200}; la V_3 in istudio appare quindi solcata da ∞^2 linee u_1 che appartengono ad uno spazio che è lo $S(2)$ in uno dei suoi punti, spazio che è un piano, cioè le linee u_1 sono linee piane.

Le V_3 studiate in questo n.° sono dunque tutte e sole le V_3 di DARBOUX *per le quali le ∞^2 linee u_1 sono linee piane* (senza che ciò importi valori di h_2 ed h_3 rispettivamente maggiori di tre ed otto): nel numero successivo è indicato un esempio di tale V_3.

6. Diamo ora due esempi di V_3 rappresentanti un sistema alle derivate parziali del 2° ordine e del 3° ordine del tipo dei n. 4 e 5.

Per il n. 4 siano $x^{011} = 0$, $x^{101} = 0$ ed $x^{110} = 0$ le tre equazioni differenziali alle derivate parziali del 2° ordine ed $x^{300} = x^{030}$ un' equazione del 3° ordine distinta da quelle ottenute dalle equazioni del 2° ordine mediante derivazione.

In quanto le derivate seconde miste devono annullarsi e la derivata del 3° ordine fatta rispetto al parametro u_1 deve coincidere con quella del 3° ordine fatta rispetto ad u_3, il punto generico della V_3 in questione si potrà esprimere sotto la forma:

$$x_i = c_i(u_1^3 + u_2^3) + a_i u_1^2 + b_i u_1 + e_i + l_i u_2^2 + m_i u_2 + W_i(u_3)$$

dove le c_i, a_i, b_i, e_i, l_i, m_i, sono costanti qualunque.

Ora per valori generici di queste costanti e per una scelta generica delle funzioni $W_i(u_3)$, la V_3 così ottenuta appartiene effettivamente al tipo considerato. Invero verifichiamo contemporaneamente (usando coordinate omogenee) che essa non è integrale di ulteriori equazioni del secondo ordine, nè del terzo all'infuori di quelle da noi prefissate e loro combinazioni lineari ([13]), osservando che i nove punti x, x^{100}, x^{010}, x^{001}, x^{200}, x^{020}, x^{002}, x^{030}, x^{003}, sono linearmente indipendenti: giacchè le espressioni cha risultano immediatamente per questi punti fanno vedere che nell'ipotesi opposta risulterebbero linearmente legati il punto c (avente per coordinate le c_i) ed i punti a, b, l, m, $e + W$, W', W'' e W'''. Ma supporre questo vuol dire supporre che la curva descritta dal punto $e + W$ abbia i suoi S_3 osculatori incidenti allo S_4 di quei cinque punti fissi ([14]) (che possiamo supporre, stante l'arbitrarietà delle costanti introdotte, linearmente indipendenti), ciò che non avviene certamente con una scelta generica delle funzioni W_i.

Per il n. 5, siano ancora $x^{011} = 0$, $x^{101} = 0$ ed $x^{110} = 0$ le tre equazioni differenziali alle derivate parziali del 2° ordine ed $x^{300} = 0$ un'equazione del 3° ordine.

Attualmente il punto generico della V_3 in questione si può esprimere sotto la forma

$$x_i = c_i u_1^2 + b_i u_1 + c_i + V_i(u_2) + W_i(u_3)$$

dove le a_i, b_i, c_i, sono costanti qualunque.

Anche qui per valori generici di queste costanti e scelta generica delle funzioni $V_i(u_2)$, $W_i(u_3)$, la V_3 non rappresenta equazioni del 2° e 3° ordine diverse da quelle da noi richieste. Basta a tal uopo fare in modo che per la superficie descritta dal punto $c + V(u_2) + W(u_3)$, al variare dei parametri u_2, u_3, la dimensione dello spazio $S(3)$ nei punti generici non scenda al di sotto di 6 e che esso non risulti costantemente incidente alla retta dei punti fissi a, b.

([13]) Ed anche che la V_3 non degeneri in una V_2.

([14]) Il che poi significa che questa curva starebbe in uno S_7 fisso passante per questo S_4.

7. Tornando al caso del n. 5 aggiungiamo ancora una considerazione che chiarirà la struttura delle V_3 ivi considerate.

Premettiamo che i piani contenenti le linee u_1 sono ∞^2: infatti detti piani non possono essere ∞^1, giacchè in tal caso ognuno di questi piani apparterrebbe alla V_3 che sarebbe luogo di piani e come tale rappresenterebbe (con una opportuna scelta di parametri) tre equazioni di Laplace del tipo $x^{200} \sim 0$, $x^{110} \sim 0$, $x^{020} \sim 0$. Ma allora le coniche associate sarebbero coppie di rette per un punto fisso anzichè coniche per tre punti fissi distinti; quei piani saranno quindi ∞^2 ed ognuno di essi conterrà una sola linea u_1.

Ciò premesso dimostriamo che *gli ∞^2 piani, ognuno dei quali contiene una linea u_1, sono tangenti ad una superficie Φ, a meno che passino per una retta fissa oppure ricoprano una ∞^1 di S_3 sviluppabile ordinaria.*

Infatti uno qualunque di questi piani, corrispondente a dati valori dei parametri u_2 ed u_3, sta in uno S_3 col piano infinitamente vicino corrispondente ai valori $u_2 + du_2$, u_3, in quanto i punti che li individuano (per le equazioni formanti il sistema rappresentato dalla V_3) giacciono nello S_3 dei punti x, x^{100}, x^{010}, x^{200}; così anche il piano infinitamente vicino corrispondente ai valori u_2, $u_3 + du_3$ sta con quello in uno S_3. Quegli ∞^2 piani costituiscono una di quelle che il Bompiani chiama *configurazione* di Laplace.

Osserviamo poi anche che ciascuno di questi piani e tutti gli infinitamente vicini appartengono ad uno stesso S_4: infatti, come il primo di detti piani è individuato dai punti x, x^{100}, x^{200}, quelli infinitamente vicini saranno individuati dai punti

$$\begin{gathered} x + x^{100}\, du_1 + x^{010}\, du_2 + x^{001}\, du_3 \\ x^{100} + x^{200}\, du_1 + x^{110}\, du_2 + x^{101}\, du_3 \\ x^{200} + x^{300}\, du_1 + x^{210}\, du_2 + x^{201}\, du_3 \end{gathered}$$

punti che stanno nello S_4 dei punti x, x^{100}, x^{010}, x^{001}, x^{200}.

Proiettando ora tutta la figura in uno S_5 da uno S_{n-6} e traducendo per dualità nasce un sistema doppiamente infinito di piani Σ tale che ciascuno di essi è incontrato in uno stesso punto da tutti gli infinitamente vicini; ma un tale sistema è l'insieme dei piani tangenti ad una superficie F, o come caso degenere l'insieme di ∞^2 piani tangenti ad una linea ([15]). Inoltre attualmente per ogni piano di Σ ne esistono due infinitamente vicini che stanno con esso in uno S_3: se i piani di Σ inviluppano una superficie F prendiamo allora su di essa, che pensiamo descritta dal punto x, i parametri u_2 ed u_3 in modo che le linee $u_3 = \text{cost}$ ed $u_2 = \text{cost}$ siano proprio le linee che hanno in ogni punto per tangenti una delle due direzioni lungo le quali ciò avviene.

Ne segue che i piani sopra considerati contengono rispettivamente i punti:

$$x,\ x^{001},\ x^{010};\ \text{e}\ x + x^{010}\,du_2,\ x^{001} + x^{011}\,du_2,\ x^{010} + x^{020}\,du_2$$

oppure

$$x,\ x^{001},\ x^{010};\ \text{e}\ x + x^{001}\,du_3,\ x^{001} + x^{002}\,du_3,\ x^{010} + x^{011}\,du_3\,.$$

La particolarità considerata implica due equazioni di LAPLACE che possono ridursi ad una sola qualora manchino in esse i termini in x^{002} ed x^{020}. In quest'ultima ipotesi l'unica equazione ha come parte di secondo ordine il solo termine nella derivata seconda mista e le linee caratteristiche sono quelle scelte come linee parametriche. Se no, la superficie appartiene notoriamente ad un S_3 (non potendosi ridurre ad una sviluppabile poichè i piani tangenti devono essere ∞^2). Ritraducendo per dualità si avranno in S_5 gli ∞^2 piani tangenti ad una superficie Φ, oppure ∞^2 piani passanti per una retta.

Resta l'ipotesi che gli ∞^2 piani di Σ siano tangenti ad una linea, nel qual caso, traducendo per dualità nello S_5 si hanno ∞^2 piani che complessivamente ricoprono gli ∞^1 S_3 di una sviluppabile ordinaria.

Tutti questi risultati si trasportano immediatamente dallo S_5 alla figura oggettiva, e così si conclude la proprietà enunciata.

([15]) SEGRE C. loc. cit. ([8]) (vedi il n. 26).