

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO CACCIOPPOLI

**Le funzioni monogene generalizzate definite
mediante integrali doppi di Cauchy**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 5 (1934), p. 122-147

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1934__5__122_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE FUNZIONI MONOGENE GENERALIZZATE DEFINITE MEDIANTE INTEGRALI DOPPI DI CAUCHY.

di RENATO CACCIOPPOLI

Monogene in senso lato o *quasi-analitiche* vengono dette le funzioni di una classe se ognuna di esse è individuata in seno alla classe stessa dai valori che assume in una porzione comunque ristretta del suo campo di definizione, o anche, più precisamente, da un suo sviluppo di TAYLOR, *formalmente* definito in un punto qualsiasi di questo campo. Tale proprietà, che è l'antica *continuità* di EULER, si postula quindi per le funzioni quasi-analitiche, mentre che per le funzioni analitiche ordinarie la si deduce dalla rappresentabilità mediante serie di TAYLOR dotate della convergenza elementare.

Per queste funzioni non v'ha luogo a dare una teoria chiusa e definitiva, come quella di WEIERSTRASS per le funzioni analitiche. Si tratta invece di assegnare, attraverso definizioni concrete al possibile, classi vieppiù estese dotate della quasi-analicità. Ciò può farsi peraltro da due punti di vista diversi, imponendo le opportune condizioni o direttamente alle funzioni definite al modo di DIRICHLET, oppure ad una loro rappresentazione analitica assunta a priori. Così è dal primo punto di vista che sono state determinate, per le funzioni di una variabile reale, le limitazioni delle derivate successive implicanti la quasi-analicità; è dal secondo che si è studiata la permanenza del carattere monogeno di una serie di frazioni semplici

$$\sum_n \frac{A_n}{z - a_n},$$

in una regione del piano complesso z occupata dai poli a_n ⁽¹⁾. In ogni caso sono le funzioni analitiche che forniscono i modelli delle condizioni da generalizzare subordinatamente alla conservazione della proprietà fondamentale.

Nel presente lavoro è affrontato il problema generale della definizione di funzioni monogene mediante integrali doppi di CAUCHY, cioè del tipo

$$\iint \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta, z = x + iy);$$

prenderemo anche a considerare, più generalmente, integrali del tipo di STIELTJES

$$\int \frac{d\mu}{\zeta - z}$$

μ essendo una *massa complessa* comunque ripartita sul piano z . Fra questi ultimi sono compresi tanto gli ordinari integrali curvilinei di CAUCHY che le serie di frazioni semplici.

È ovvio come la considerazione delle funzioni analitiche conduca a questo problema. Se I è un continuo limitato del piano z , ogni funzione olomorfa su I vi si può rappresentare mediante un integrale di CAUCHY. Si pone allora la duplice questione dell'esistenza, per ogni continuo, di classi di funzioni quasi-analitiche analogamente rappresentate, e dell'effettiva determinazione di classi siffatte, possibilmente estese e semplicemente caratterizzate. Risolvendo, affermativamente, il primo quesito, ci apriremo la via ad una soluzione, generalissima come si vedrà, del secondo ⁽²⁾.

⁽¹⁾ V. anche per le ulteriori indicazioni bibliografiche: BOREL, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes*; CARLEMAN, *Les fonctions quasi-analytiques* [Coll. Borel, Gauthier-Villars].

⁽²⁾ I principali risultati di questa ricerca sono stati esposti in una nota dei Comptes Rendus: *Intégrales doubles de Cauchy et fonctions monogènes généralisées*, 25 juin 1934.

1. Consideriamo dunque nel piano di GAUSS della variabile $z = x + iy$ un insieme I limitato, chiuso e connesso (*continuo*), cioè tale che due suoi punti qualunque possano congiungersi mediante una poligonale avente i lati piccoli a piacere ed i vertici sull'insieme. Se $f(z)$ è una funzione olomorfa su I , si avrà

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

essendo z un qualunque punto di I , e C un contorno regolare racchiudente I , peraltro arbitrario in un intorno convenientemente ristretto di I . Si vede facilmente che è possibile, in infiniti modi, sostituire il precedente integrale con un integrale doppio, ottenendo, sempre su I ,

$$(1) \quad f(z) = \iint \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\xi + i\eta - z - iy} d\xi d\eta.$$

dove l'integrazione si intende estesa a tutto il piano, e φ è una funzione complessa continua, nulla in un intorno di I e in un altro dell'infinito. Si può anche, volendo, supporre φ dotata di derivate continue⁽³⁾. Una formola del tipo (1) definisce una funzione $f(z)$ per ogni valore di z ; questa è *derivabile* rispetto alla variabile complessa z in ogni punto ove $\varphi \neq 0$, almeno se φ è differenziabile, avendosi allora

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = -2\pi \varphi(x, y).$$

Si presenta ora spontaneamente la seguente quistione: Se φ è nulla in tutto un intorno di I , $f(z)$, essendo olomorfa su I , vi risulta: 1) derivabile, 2) individuata dai valori assunti in un campo comunque ristretto. Se è soltanto $\varphi = 0$ su I , la prima proprietà si conserva; può dirsi altrettanto della seconda?

Un esempio mostrerà che la risposta è negativa: I sia l'in-

(3) Cfr. BOREL, op. cit., p. 147.

tervallo $(-1, 1)$ dell'asse reale x , e con D si indichi il dominio limitato da due circonferenze, di diametri 1 e 2, tangenti nell'origine all'asse y e contenute nel semipiano $x > 0$; prendiamo $\varphi = 0$ fuori di D , e

$$\varphi(x, y) = \frac{n+1}{2\pi} \binom{2n+1}{n} \frac{(x^2 + y^2 - x)^n (2x - x^2 - y^2)^n}{x^{2n+2}} x^2 e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

su D , \sqrt{x} essendo la radice di argomento minimo. Un facile calcolo mostra che con tale scelta di φ la (1) diventa

$$f(x) = (n+1) \binom{2n+1}{n} \int_1^2 (r-1)^n (2-r)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{-\frac{1}{\sqrt{\zeta}}} \frac{d\zeta}{\zeta-x} dr,$$

C_r dinotando la circonferenza di diametro r appartenente (nel semipiano $x > 0$) al fascio delle due precedenti; si ha dunque su I

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{-\frac{1}{\sqrt{\zeta}}} \frac{d\zeta}{\zeta-x} \quad (1 < r)$$

ossia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

sicchè f si annulla su una porzione di I senza annullarsi identicamente. Osserviamo d'altra parte che alla funzione φ può imporsi qualunque condizione di regolarità, poichè essa ammette derivate continue fino all'ordine $n-1$.

2. Dunque la condizione $\varphi = 0$ su I non basta ad assicurare il carattere monogeno delle funzioni (1); d'altra parte supponendo $\varphi = 0$ in un intorno di I (variabile naturalmente da

caso a caso) si ricade sulle funzioni analitiche. È ben naturale allora tentare di dedurre la quasi-analicità da opportuni *tipi infinitesimali* per la funzione $|\varphi|$ intorno ad I , cioè da una conveniente *rarefazione* della massa di densità $|\varphi|$ distribuita sul piano, - massa che nel caso dell'analicità scompare del tutto in prossimità di I .

Sia $\rho(x, y)$ la distanza del punto (x, y) dall'insieme I . Ci proponiamo di dimostrare l'esistenza, per ogni continuo I , di una funzione decrescente $\omega(\rho)$, *nulla solo per* $\rho = 0$, e tale che le funzioni (1) relative a densità $|\varphi|$ verificanti la disuguaglianza

$$(2) \quad |\varphi(x, y)| \leq \omega(\rho)$$

da un certo valore (variabile) di ρ in poi, siano monogene su I .

L'esempio precedente, in cui a \sqrt{x} potrebbe sostituirsi una qualunque potenza di esponente < 1 , suggerisce di ammettere senz'altro $\omega < c e^{-\frac{1}{\rho}}$. In tal caso la (2) implica che $f(x)$ sia indefinitamente derivabile su I , e che si abbia

$$(3) \quad \frac{d^n f}{dx^n} = n! \iint \frac{\varphi(\xi, \eta)}{(\zeta - x)^{n+1}} d\xi d\eta$$

Preciseremo allora la condizione di quasi-analicità esigendo che una funzione f sia individuata da un suo sviluppo (formale) di TAYLOR, relativo ad un punto qualunque di I .

3. Consideriamo tra le funzioni (1) quelle relative a densità verificanti la disuguaglianza

$$|\varphi(x, y)| \leq k e^{-\frac{1}{\rho}},$$

ognuna per valori sufficientemente piccoli di ρ e per una conveniente costante k ; e supponiamo in un primo momento che si abbia

$$(4) \quad \iint |\varphi(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq M,$$

cioè che la *massa totale* non superi un certo limite arbitrariamente fissato.

Indichiamo con $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ una successione decrescente e tendente a zero, e con D_1, D_2, D_3, \dots i domini costituiti dai punti aventi da I distanze non superiori a $\delta, \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{3}, \dots$ rispettivamente, δ essendo una data quantità positiva. Tra le funzioni or ora dichiarate, quelle originate da funzioni φ nulle internamente a D_r sono ivi analitiche ed equicontinue: ne segue che in corrispondenza di ogni intero r si potranno trovare un indice n_r ed una quantità positiva σ_r ($\leq \epsilon_r$) tali che per dette funzioni dalle disequaglianze, verificate in un qualunque particolare punto a di I ,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \sigma_r \quad (n = 0, 1, 2, \dots, n_r - 1)$$

segue l'altra

$$|f(x)| \leq \epsilon_r$$

ovunque su I ; chè altrimenti si potrebbe costruire una successione di tali funzioni, convergente uniformemente (con tutte le successioni derivate, in virtù del noto teorema di WEIERSTRASS) nell'interno di D_r verso una funzione analitica nulla in almeno un punto di I con tutte le sue derivate, - successione che peraltro non tenderebbe uniformemente a zero su I , ciò che è assurdo.

Sia λ_r una costante positiva tale che per una funzione definita dalla (1) si abbia su I

$$|f^{(n)}(x)| \leq \sigma_r \quad (n < n_r)$$

non appena φ verifichi in D_r la disequaglianza

$$(5) \quad |\varphi(x, y)| \leq \lambda_r e^{-\frac{1}{\rho}}$$

e si annulli altrove. Costruiamo una funzione positiva decrescente $\mu_1(\rho)$, che soddisfi le condizioni

$$\mu_1\left(\frac{\delta}{r}\right) \leq \lambda_r.$$

Ovviamente, ammessa la (4), e la (5) su D_r , dalle eguaglianze

$$f^{(n)}(a) = 0 \quad (n < n_r)$$

supposte verificate in un punto di I , segue

$$|f(x)| \leq \varepsilon_r + \sigma_r \leq 2\varepsilon_r$$

ovunque su I ; pertanto se la densità $|\varphi|$ verifica la (4), nonché la disequaglianza

$$|\varphi(x, y)| \leq \mu_1(\rho) e^{-\frac{1}{\rho}}$$

almeno per ρ sufficientemente piccolo, la funzione $f(x)$ non potrà annullarsi con tutte le derivate in un punto particolare di I senza risultare identicamente nulla su I .

Si supponga ora ripetuta la costruzione precedente, sostituendo successivamente, nel secondo membro della (4), $2M, 3M, \dots$ ad M , e si consideri la successione $\mu_1(\rho), \mu_2(\rho), \mu_3(\rho), \dots$ delle funzioni così ottenute. In virtù di un noto teorema di DU BOIS-REYMOND si potrà trovare una funzione $\nu(\rho)$ decrescente più rapidamente di ognuna di queste. Basterà allora che per

$$\omega(\rho) = \nu(\rho) e^{-\frac{1}{\rho}}$$

la (2) sia soddisfatta nell'intorno dello zero, perchè $f(x)$ non possa presentare uno sviluppo di TAYLOR identicamente nullo senza annullarsi ovunque su I . Più generalmente basterà che sia

$$(2') \quad |\varphi(x, y)| \leq k \omega(\rho)$$

con k costante qualunque.

La condizione (2') definisce una classe lineare (cioè contenente dei propri elementi ogni combinazione lineare a coefficienti costanti) di funzioni (1); due di queste coincidono non appena abbiano uno sviluppo di TAYLOR comune.

Si possono quindi assegnare, per ogni continuo I , funzioni decrescenti non nulle $\omega(\rho)$ tali che una funzione $f(z)$, definita dalla (1) in corrispondenza di una funzione φ verificante la (2') (da un certo valore di ρ in poi e con un'opportuna costante k), sia individuata su I da ogni suo sviluppo (formale) di TAYLOR, e quindi a maggior ragione dai valori assunti nell'intorno di un punto qualunque.

Per ogni siffatta funzione ω si avrà una classe di funzioni monogene generalizzate su I ; ad $\omega \equiv 0$ corrispondono le funzioni analitiche. Si può dire brevemente che le funzioni (1) sono quasi-analitiche sempre che la densità $|\varphi|$, astretta ad annullarsi solo su I , tenda a zero abbastanza rapidamente.

4. Le considerazioni che precedono si estendono senza difficoltà alle espressioni del tipo

$$(6) \quad f(x) = \int \frac{d\mu}{\zeta - x}$$

l'integrale essendo preso nel senso di STIELTJES, e μ dinotando una massa complessa (funzione additiva complessa di insieme) comunque distribuita, ma finita, cioè tale che converga l'integrale $\int |d\mu|$ esteso a tutto il piano. Basterà nelle diseguaglianze (2), (2') sostituire alla densità $|\varphi|$ la densità media su un generico cerchio Γ di raggio ρ e centro su I , cioè l'espressione

$$\frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\Gamma} |d\mu|;$$

e così pure nella (5), precisandovi inoltre per ρ un limite superiore $> \frac{\delta}{r}$, p. es. $\frac{2\delta}{r}$.

In questo caso il nostro risultato si enuncia come segue:

Si possono determinare, per ogni continuo I , funzioni decrescenti non nulle $\tau(\rho)$ tali che siano quasi-analitiche le funzioni (6) relative a masse μ verificanti la disuguaglianza

$$(7) \quad \frac{1}{\pi \rho^2} \int_I |d\mu| \leq k\tau(\rho)$$

(ognuna da un certo valore di ρ in poi e per un'opportuna costante k).

Anche qui si può dire che la densità, nulla su I , è tenuta inoltre ad annullarvisi abbastanza rapidamente, nel senso che l'infinitesimo che la definisce deve essere di un tipo convenientemente elevato. Per $\tau \equiv 0$ si ottengono le funzioni analitiche rappresentate dagli ordinari integrali di CAUCHY.

Il risultato generale conseguito si completa subito osservando che le classi di funzioni monogene generalizzate di cui abbiamo dimostrata l'esistenza contengono effettivamente funzioni non olomorfe su I . Infatti rientra nel tipo (6) ogni funzione somma di una serie di frazioni semplici, cioè della forma

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{x - a_n},$$

dove supponiamo che la serie $\Sigma |A_n|$ converga, e che la successione a_1, a_2, a_3, \dots tenda ad un punto a di I . Ora questa funzione è certamente non olomorfa in a , e d'altra parte si può farla rientrare in una qualunque delle classi anzidette, scegliendo una successione A_1, A_2, \dots che tenda abbastanza rapidamente a zero (⁴).

(⁴) Si sostituirebbe poi facilmente all'integrale (6) un integrale ordinario del tipo (1).

Stabilita così l'esistenza di classi quasi-analitiche in dipendenza da opportuni tipi infinitesimali per la densità intorno al continuo considerato, si pone il problema della effettiva determinazione di questi tipi, e del loro grado di generalità. Ricordiamo che BOREL ha studiato il caso di un segmento rettilineo, giungendo per le funzioni ω , τ all'espressione

$$e - e^{\frac{1}{p^p}}$$

dove p è un qualunque numero > 1 ; sotto questa condizione uno sviluppo di TAYLOR della $f(x)$ risulta sommabile sul segmento col metodo di MITTAG-LEFFLER, ciò che prova naturalmente senz'altro la quasi-analiticità.

Per trattare il caso di un continuo qualunque ci basterà precisare quantitativamente l'analisi che precede.

5. Torniamo a considerare le funzioni definite dalla (1), con massa nulla internamente a D_1 e verificante la limitazione (4); proponiamoci l'effettiva determinazione di un indice n_1 e di un numero σ_1 tali che le diseguaglianze

$$|f(a)| \leq \sigma_1, \quad |f'(a)| \leq \sigma_1, \dots, \quad |f^{(n_1-1)}(a)| \leq \sigma_1$$

implichino $|f(x)| \leq \varepsilon_1$ su I .

Siano $x_0 = a$, $x_1, x_2, \dots, x_N = x$ i vertici di una poligonale, iscritta in I , di lati tutti non superiori in lunghezza a $\frac{\delta}{e}$ ($\delta < 1$).

Se σ è un limite superiore per i moduli di f e delle sue prime $n-1$ derivate in x_{N-1} , si avrà

$$|f(x)| < e\sigma + \frac{M}{e^{n-1}\delta},$$

come subito dalla (3) che fornisce, nelle ipotesi fatte

$$|f^{(m)}| \leq \frac{M m!}{\delta^{m+1}}$$

ovunque su I ; basta applicare la serie di TAYLOR, che converge nel cerchio di centro x_{N-1} e raggio δ ⁽⁵⁾. Si ha dunque certamente $|f(x)| < \varepsilon_1$ se si verificano le due disequaglianze

$$e\sigma \leq \frac{\varepsilon_1}{e}, \quad \frac{M}{e^{n-1}\delta} \leq \frac{\varepsilon_1}{e},$$

ossia

$$(8) \quad \sigma \leq \frac{\varepsilon_1}{e^2}, \quad n \geq \log \frac{M}{\varepsilon_1} + \log \frac{1}{\delta} + 2.$$

Scelto per n un valore soddisfacente a quest'ultima condizione, cerchiamo di determinare un indice $n' > n$ e un numero σ' tali che le disequaglianze

$$|f(x_{N-1})| \leq \sigma, \dots, |f^{(n-1)}(x_{N-1})| \leq \sigma$$

abbiano luogo non appena i moduli di f e delle sue prime $n' - 1$ derivate in x_{N-2} ammettano il limite superiore σ' . Osserviamo all'uopo che in x_{N-1} le derivate di f , di indici $0, 1, \dots, n-1$ sono maggiorate in modulo da

$$e\sigma' + \frac{M}{\delta^n} \left[n'(n'-1) \dots (n'-n+2) \left(\frac{1}{e}\right)^{n'-n+1} + \right. \\ \left. + (n'+1)n' \dots (n'-n+3) \left(\frac{1}{e}\right)^{n'-n+2} + \dots \right]$$

(come si vede ancora ricorrendo alla serie di TAYLOR); la parentesi è maggiorata a sua volta da

$$\frac{n(n')^{n-1}}{e^{n'-n}},$$

⁽⁵⁾ Questa disequaglianza ed altre che applicheremo in seguito potranno sembrare grossolane; ma non v'è motivo di servirsi di raffinamenti dei quali non resterebbe traccia nel risultato finale, che è per così dire di altro ordine.

sicchè basta che sia soddisfatta la diseguaglianza

$$e\sigma' + \frac{Mn(n')^{n-1}}{e^{n'-n}\delta^n} \leq \sigma.$$

Possiamo pertanto affermare che se

$$(9) \quad \sigma' \leq \frac{\varepsilon_1}{e^4}, \quad n' \geq \log \frac{M}{\varepsilon_1} + n \log \frac{1}{\delta} + (n-1) \log n' + n + \log n + 3$$

$|f(x)|$ risulterà $< \varepsilon_1$.

Supponiamo ora ε_1 abbastanza piccolo perchè sia

$$(10) \quad \log \log \frac{M}{\varepsilon_1} \geq \log \frac{1}{\delta} + 3;$$

nella seconda delle (9) si può sostituire $\log n'$ a $\log n$, e, per la seconda delle (8), n a $\log \frac{M}{\varepsilon_1} + 1$, ottenendo così

$$n' \geq n \log n' + n \log \frac{1}{\delta} + 2n + 2;$$

di qui, tenuto conto della (10) che implica

$$\log n > \log \frac{1}{\delta} + 3,$$

passeremo ancora alla diseguaglianza

$$n' \geq n \log n' + n \log n,$$

donde alle condizioni definitive

$$n' > n, \quad n' > 2n \log n'.$$

Analogamente si dimostra, passando a stabilire un limite superiore σ'' per

$$|f(x_{N-3})|, \dots |f^{(n''-1)}(x_{N-3})|$$

che $|f(x) \leq \varepsilon_1$ si può dedurre dalle condizioni

$$\sigma' \leq \frac{\varepsilon_1}{e^\delta}, n'' \geq \log \frac{M}{\varepsilon_1} + n' \log \frac{1}{\delta} + (n'-1) \log n'' + n' + \log n' + 5,$$

di cui la seconda è conseguenza delle altre

$$n'' > n', n'' > 2 n' \log n'';$$

e così si continua fino a raggiungere il punto $x_0 = a$. In definitiva si trova per σ_1 la condizione

$$\sigma_1 = \sigma^{(N-1)} \leq \frac{\varepsilon_1}{e^{2N}}$$

in cui ci si può attenere anche all'eguaglianza.

Si tratta ora, per trovare n_1 , di determinare una successione crescente n', n'', n''', \dots di indici verificanti la condizione ricorrente

$$(11) \quad n^{(h+1)} > 2 n^{(h)} \log n^{(h+1)}.$$

A ciò si perviene molto semplicemente attraverso la considerazione della funzione

$$\nu(t) = e^{(\log n + t)^p},$$

dove p dinota un arbitrario numero reale > 1 . Si può scrivere, ovviamente

$$\nu(t+1) > \nu(t) e^{p(\log n + t)^{p-1}};$$

d'altra parte

$$\log \nu(t+1) = (\log n + t + 1)^p.$$

Ma, per valori convenientemente elevati di n ,

$$p(\log n + t)^{p-1} > p \log(\log n + t + 1) + \log 2,$$

sicchè

$$v(t+1) > 2v(t) \log v(t+1);$$

ed è senz'altro evidente che si può fare assegnamento anche sulla diseguaglianza

$$v(t+1) - 1 > 2[v(t) + 1] \log[v(t+1) + 1].$$

Come valore di $n^{(h)}$ può dunque prendersi uno degli interi prossimi a $v(h)$; nella espressione di $v(t)$ si può poi sostituire

$$\log \log \frac{Me^2}{\varepsilon_1 \delta}$$

a $\log n$, ed n sarà allora il primo intero soddisfacente alla seconda delle (8). La limitazione inferiore dianzi richiesta per n si tradurrà in una limitazione superiore per ε_1 .

Siamo così pervenuti alle seguenti valutazioni per ε_1 ed n_1 :

$$(12) \quad \varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon_1}{e^{2N}}, \quad \log n_1 \geq \left(\log \log \frac{Me^2}{\varepsilon_1 \delta} + N \right)^p;$$

queste condizioni implicano

$$|f(x_n)| = |f(x)| < \varepsilon_1$$

non appena ε_1 sia abbastanza piccolo.

6. Resta ora da limitare inferiormente l'intero N , per posizioni arbitrarie dei punti $x_0 = a$ e $x_N = x$ su I . La limitazione più ovvia, quando non si faccia alcuna ipotesi particolare sul continuo I , è la seguente ⁽⁶⁾

⁽⁶⁾ V. oltre, n. 9.

$$(13) \quad N \leq \frac{K}{\delta^2},$$

con K costante; possiamo dunque sostituire alla seconda delle (12) la condizione

$$\log n_1 \geq \left(\log \log \frac{M e^2}{\epsilon_1 \delta} + \frac{K}{\delta^2} \right)^2.$$

Osserviamo ora che l'unica relazione fra ϵ_1 e δ di cui abbiamo fatto uso è la (10); che dunque le conseguenze della disuguaglianza precedente sussistono se si prende

$$\log \epsilon_1 = \log M - \frac{e^2}{\delta},$$

ciò che permette di ridurre arbitrariamente ϵ_1 (che va anche limitato, come detto, in vista dell'iterazione della disuguaglianza (11)) riducendo δ .

Con tale scelta di ϵ_1 si può ulteriormente semplificare la condizione per n_1 , questa risultando immediata conseguenza dell'altra

$$(14) \quad \log n_1 \geq \frac{H}{\delta^{2p}},$$

dove H indica un'opportuna costante; si supporrà solo δ convenientemente piccola.

Quanto a σ_1 , sostituendo nella prima delle (12) $\frac{K}{\delta^2}$ ad N , e prendendo il segno di eguaglianza, otterremo

$$(15) \quad \log \sigma_1 = \log \epsilon_1 - \frac{2K}{\delta^2} = \log M - \frac{e^2}{\delta} - \frac{2K}{\delta^2}.$$

Del tutto analogamente valuteremo σ_2 e n_2 , σ_3 e n_3 , sostituendo a δ successivamente $\frac{\delta}{2}$, $\frac{\delta}{3}$, e scegliendo ϵ_n in base alla formola

$$\log \varepsilon_m = \log M - \frac{m e^3}{\delta}.$$

Passiamo ora a determinare la successione $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$.
Supposto $\varphi = 0$ fuori di D_1 , e la (5) verificata per $r = 1$, risulta su I

$$|f^{(n)}| < 2\pi\lambda_1(n!)^2$$

come subito dalla (3). Affinchè dunque si abbia $|f^{(n)}| \leq \sigma_1$, per $n < n_1$, basterà che sia $(n_1 > 2)$

$$\lambda_1 n_1^{2n_1} \leq \sigma_1.$$

Se per n_1 scegliamo il primo valore intero determinato dalla (14), possiamo passare alla disequaglianza

$$\log \lambda_1 \leq -2 \left(\frac{H}{\delta^{2p}} + 1 \right) \left[e^{\frac{H}{\delta^{2p}}} + 1 \right] + \log \sigma_1,$$

ossia, per la (15),

$$\log \lambda_1 \leq -2 \left(\frac{H}{\delta^{2p}} + 1 \right) \left[e^{\frac{H}{\delta^{2p}}} + 1 \right] + \log M - \frac{e^3}{\delta} - \frac{2K}{\delta^2}.$$

Dopo ciò è evidente che per valori sufficientemente piccoli di δ si può porre

$$\log \lambda_1 = -e^{\frac{L}{\delta^{2p}}},$$

L essendo una costante conveniente.

Analogamente si determina λ_r , sostituendo $\frac{\delta}{r}$ a δ ; così la funzione $\mu_1(\rho)$ è calcolata, e si ha

$$\log \mu_1(\rho) = -e^{\frac{L}{\rho^{2p}}}.$$

La stessa espressione si trova per le altre funzioni $\mu_2(\rho)$, $\mu_3(\rho)$, ... cambiando solo il valore della costante L . Per passare allora alla funzione $\nu(\rho)$, decrescente più rapidamente di tutte le μ , basterà aumentare p di una quantità arbitrariamente piccola, e fissare per L un valore qualunque, p. es. l'unità; ed ovviamente si otterrà così un'espressione valevole anche per la funzione $\omega = \nu e^{-\frac{1}{\rho}}$. Ma p è numero qualunque maggiore dell'unità; dunque si può prendere

$$(16) \quad \omega(\rho) = e^{-e^{\rho^q}}$$

con q arbitrario > 2 .

Dunque quale che sia il continuo I le funzioni (1) risultano quasi-analitiche sotto la condizione (2'), dove ω sia data dalla (16) con $q > 2$.

7. Dovremmo ora passare alla trattazione del caso generale dell'integrale (6). Ma questa è già sostanzialmente contenuta in quanto precede: qualche modificazione non subentra che nel calcolo delle λ , dove alla (3) bisogna sostituire la formola

$$(17) \quad \frac{d^n f}{dz^n} = n! \int_{D_r} \frac{d\mu}{(\xi - z)^{n+1}},$$

facendo l'ipotesi

$$\frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\Gamma} |d\mu| \leq \lambda_r e^{-\frac{1}{\rho}},$$

dove ρ , raggio di Γ , sia $\leq \frac{2\delta}{r}$ (v. n. 4).

L'integrale (17), esteso alla parte di D_r contenuta nel cerchio Γ di centro z e raggio 2δ , è maggiorato da

$$n! \int_{\Gamma} \frac{|d\mu|}{\rho^{n+1}} < 2^{2n+2} \pi (n!)^2;$$

osserviamo poi che D_r si può ricoprire completamente mediante cerchi di centro su I e raggio 2δ , in numero di $\frac{K'}{\delta^2}$, con K' costante. Si può quindi scrivere per $n < n_1$

$$|f^{(n)}| < 2^{2n_1+2} \pi (n_1!)^2 \lambda_1 \frac{K'}{\delta^2} < (2n_1)^{2n_1} \lambda_1 \frac{K'}{\delta^2}.$$

Si vede così subito che per le λ e per le funzioni μ sussistono ancora le determinazioni precedenti; sicchè alla funzione τ che compare nella (7) si può attribuire la stessa forma (16) che ad ω , sempre con $q > 2$.

Dunque le funzioni (6) risultano quasi-analitiche su I per distribuzioni di masse finite verificanti nell'intorno di I una condizione del tipo

$$(18) \quad \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\Gamma} |d\mu| \leq k e^{-e^{\frac{1}{\rho^q}}}$$

($q > 2$) e d'altronde arbitrarie.

È evidente che questo teorema contiene il precedente come caso particolare.

8. Giungiamo ora al punto più delicato della nostra ricerca: quale *generalità* si deve riconoscere al risultato? È certo che lo si potrebbe perfezionare, per quanto forse a detrimento della semplicità; ma v'è luogo della condizione trovata a cercare un'attenuazione *essenziale*, cioè per così dire dello stesso ordine? La prima e più semplice riduzione che si può tentare è quella del numero q : e sappiamo anzi già che almeno in un caso particolare, quello del segmento rettilineo, è lecito alla diseguaglianza $q > 2$ sostituire l'altra $q > 1$. Se ora p. es. si potesse abbassare

indefinitamente il valore di q , sarebbe da sospettare eccessiva la sovrapposizione dei due esponenziali nella (16). Ma un esempio ci convincerà che se $q < 1$, la (18) non implica più la quasi-analiticità nemmeno nel caso che I sia un segmento rettilineo.

Prendiamo come insieme I il segmento $(-a, a)$ dell'asse reale x , e nel semipiano delle x positive consideriamo una curva semplice chiusa C , passante per l'origine nel cui intorno presenti l'equazione

$$y = \pm x^{n+2} \quad (n \text{ intero positivo}),$$

regolare altrove, e racchiudente il segmento $(0, a)$ di I .

Nel tipo (6) rientra l'integrale curvilineo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-e^{\zeta-n}}}{\zeta - x} d\zeta,$$

in cui la funzione a numeratore dell'integrando è continua sul contorno C e ivi infinitesima per $\zeta \rightarrow 0$. Più precisamente, se $\zeta = \xi + i\eta$ tende allo zero senza abbandonare il campo racchiuso da C , la parte reale di $e^{\zeta-n}$ tende all'infinito positivo, più rapidamente di

$$e^{k\xi-n} \quad (k < 1)$$

sicchè per ζ sufficientemente piccolo si ha

$$\left| e^{-e^{\zeta-n}} \right| < e^{-e^{k\xi-n}};$$

e di qui segue innanzi tutto che, per x su I ,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-e^{x-n}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Inoltre, perchè un cerchio Γ di centro b su I e raggio sufficientemente piccolo ρ abbia punti comuni con C deve essere

$$|b| < k' \rho^{\frac{1}{n+2}} \quad (k' > 1);$$

su $C \Gamma$ risulterà allora

$$\left| e^{-e^{\zeta^n}} \right| < e^{-e^{k(|b|+\rho)^{-n}}},$$

ed all' esponente $k(|b| + \rho)^{-n}$ si potrà sostituire $k'' \rho^{-\frac{n}{n+2}}$, con k'' costante. Se ne deduce senz'altro che la distribuzione di massa relativa alla data $f(x)$ verifica intorno ad I la condizione

$$\frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\Gamma} |d\mu| < e^{-e^{\rho^{-q}}}$$

purchè $q < \frac{n}{n+2}$. Quindi q si può supporre arbitrariamente prossimo all'unità, n potendosi scegliere grande a piacere.

Riassumendo i risultati sin qui ottenuti, scriviamo la (18) sotto la forma

$$(19) \quad \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{\Gamma} |d\mu| \leq k e^{-e^{\alpha(\rho) \rho^{-\varepsilon}}};$$

ε è un numero positivo *arbitrario*, $\alpha(\rho)$ un infinito di cui va considerato l'ordine rispetto a $\frac{1}{\rho}$.

Affinchè la (19) sia condizione di quasi-analiticità su I , basta che l'ordine di α sia 2, ed occorre che non sia < 1 ; se I si riduce ad un segmento rettilineo, basta che l'ordine sia 1.

Ci rimane ora da vedere come si possa precisare ulteriormente l'ordine di α , in dipendenza da particolari proprietà di I , - ritrovando in particolare il risultato di BOREL dianzi ammesso.

9. Torniamo alla determinazione della funzione ω , completata nel n. 6, e propriamente alla limitazione (13) dell'intero N .

Dividiamo il piano in quadrati di lato $\gamma = \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$, e indichiamo con $Q(\gamma)$ uno generico di questi, contenente punti di I . Dati ad arbitrio due punti x_0 e x di I , consideriamo una catena di $N + 1$ quadrati $Q(\gamma)$, aventi ognuno almeno un vertice in comune col precedente, e contenente il primo x_0 e l'ultimo x : una poligonale iscritta in I , congiungente x_0 con x ed avente l' i^{mo} vertice sull' i^{mo} di tali quadrati, avrà i suoi N lati tutti di lunghezza $\leq \delta$. Ora se $S(\gamma)$ indica la somma delle aree di tutti i quadrati $Q(\gamma)$, si avrà

$$N \leq \frac{S(\gamma)}{\gamma^2} = \frac{8 S(\gamma)}{\delta^2}.$$

Osservando che le aree $S(\gamma)$ sono uniformemente limitate, si giunge alla (13) (previa sostituzione di $\frac{\delta}{e}$ a δ). E di questa osservazione bisogna in generale contentarsi; ma ora che ci proponiamo di precisare il nostro risultato per continui particolari, ci atterremo alla disequaglianza precedente, considerando che $S(\gamma)$ può risultare infinitesima con γ (di ordine ≤ 1).

Convieni sostituire all'area $S(\gamma)$ un'altra di più semplice definizione, quella $A(\gamma)$ del dominio $D(\gamma)$ luogo dei punti aventi da I distanza non superiore a γ . È affatto elementare che le quantità $S(\gamma)$, $A(\gamma)$, $A(\delta)$ hanno fra loro rapporti compresi tra limiti positivi. Ammetteremo quindi per N , anzichè la (13), la limitazione

$$(20) \quad N \leq K \frac{A(\delta)}{\delta^2}.$$

Partendo dalla (20), e ripetendo il ragionamento del n. 6, si giunge, anzichè alla (14), alla diseuguaglianza

$$\log n_1 \geq H \left[\frac{A(\delta)}{\delta^2} \right]^p,$$

o meglio a quest'altra

$$\log n_1 \geq H \frac{A(\delta)}{\delta^{2+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

che equivale sostanzialmente alla precedente, atteso che p è un numero arbitrario > 1 .

Il risultato finale si modifica in questo, che nell'espressione (16) delle funzioni ω e τ subentra all'esponente $\frac{1}{\rho^2}$ l'altro $\frac{A(\rho)}{\rho^{2+\varepsilon}}$, il cui ordine d'infinito è compreso fra $1 + \varepsilon$ e $2 + \varepsilon$, perchè $A(\rho)$ non può risultare in nessun caso infinitesimo di ordine > 1 . Così si trova completata la (19) con la determinazione di α :

$$\alpha(\rho) = \frac{A(\rho)}{\rho^2}.$$

Possiamo ora riassumere i nostri risultati nel teorema seguente: *Sia $A(\rho)$ l'area del dominio $D^{(\rho)}$ luogo dei punti aventi distanza $\leq \rho$ da un continuo I , e sia μ una generica massa complessa finita, avente densità asintoticamente minore di $k\omega(\rho)$ su I , cioè soggetta alla condizione*

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \int_{\Gamma} |d\mu| \leq k\omega(\rho)$$

dove ω è un'assegnata funzione decrescente, k una costante indeterminata, Γ un qualunque cerchio con centro su I e raggio sufficientemente piccolo ρ . Se

$$\log(-\log \omega(\rho)) \geq \frac{A(\rho)}{\rho^{2+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

la classe delle funzioni

$$f(z) = \int \frac{d\mu}{\zeta - z}$$

è quasi-analitica su I .

Si scorge ora chiaramente di che tipo siano le proprietà di I che consentono di attenuare le primitive condizioni di quasi-analiticità: sono proprietà che possono dirsi *dimensionali* ⁽⁷⁾. L'infinito $\alpha(\rho)$ ha l'ordine massimo 2 quando p. es. I ha misura positiva; l'ordine minimo 1 se p. es. I è una poligonale, o una curva rettificabile, ecc. Il citato teorema di BOREL rientra dunque come caso particolarissimo nel precedente.

Se $\alpha(\rho)$ ha l'ordine intermedio d , si può dire che I ha l'*ordine dimensionale* d : peraltro, ai fini della nostra quistione, basta definire d come l'estremo inferiore dei numeri m per i quali $\lim \alpha(\rho)\rho^m = 0$. Non dovremo dunque preoccuparci del caso che l'ordine dimensionale non si lasci definire per mezzo di un numero reale.

Abbiamo ora tutto quanto occorre per una formulazione definitiva e semplice al possibile del nostro teorema, che abbiamo voluto prima enunciare riassumendo le considerazioni precedenti e mettendo in evidenza la nozione di *decrescenza asintotica della densità sur un insieme*. Riducendo ε di un'aliquota arbitrariamente piccola, si può sopprimere nella (19) il fattore k , senza restringere, anzi ampliando la classe considerata, anche se si impone al primo membro di risultare infinitesimo rispetto al primo (conservando così alla classe il carattere lineare); del pari si può prescindere dal fattore $\frac{1}{\pi \rho^2}$. Sempre tenuto conto dell'ar-

(7) V. BOULIGAND, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, Bull. des Sciences Math. 52 (1928).

bitrarietà di ϵ , si può sostituire alla *massa totale* su Γ , $\int_{\Gamma} |d\mu|$,

la massa totale su tutto il dominio $D(\rho)$ riempito da tutti i cerchi Γ di raggio ρ : invero $D(\rho)$ si ricopre mediante un aggregato di cerchi Γ di raggio 2ρ , il numero dei quali è solo dell'ordine di $\frac{1}{\rho^d}$. Infine, come or ora detto, basta scrivere $\frac{1}{\rho^d}$ in luogo di $\alpha(\rho)$. Ad ogni valore di ϵ corrisponde una classe quasi-analitica, e le funzioni di tutte queste classi sono ancora nel loro complesso quasi-analitiche.

Ecco dunque la nuova forma del teorema generale:

La classe delle funzioni

$$f(x) = \int \frac{d\mu}{\zeta - x}$$

relative a masse μ distribuite intorno ad I in modo da verificare la condizione

$$(21) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} e^{e\rho^{-d-\epsilon}} \int_{D(\rho)} |d\mu| = 0$$

essendo d l'ordine dimensionale di I (definito come estremo inferiore) ed ϵ un numero positivo indeterminato, è quasi-analitica su I .

Se le masse μ hanno densità continue $\varphi(\xi, \eta)$, la condizione può scriversi

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} e^{e\rho^{-d-\epsilon}} \varphi(\xi, \eta) = 0,$$

ρ dinotando la distanza di (ξ, η) da I .

10. La definizione, cui siamo pervenuti, di classi di funzioni monogene sopra continui arbitrari, permette di estendere notevolmente la nozione di *prolungamento analitico generalizzato* lungo una retta, data da BOREL per mezzo degli sviluppi di MITTAG-LEFFLER. Supposto I dotato di punti interni, decomponiamolo nel suo interno I_1 e nella frontiera I_2 . Se $f(x)$ è definita su I mediante la (1) o la (6), e le masse sono nulle su I , f coincide in ogni porzione connessa di I_1 con una funzione analitica; ma le varie funzioni analitiche così definite sono in generale *diverse* fra loro. Ora, se f rientra in una classe quasi-analitica su I , i suoi valori su una porzione di I_1 sono individuati, fra quelli di tutte le funzioni della stessa classe, dai valori relativi ad un'altra di queste porzioni: e si può dire che mediante *prolungamenti* su I_2 le dette funzioni analitiche si deducono l'una dall'altra. Un siffatto prolungamento è condizionato da una funzione ω del tipo precedentemente esaminato: ad $\omega \equiv 0$ corrisponde il prolungamento analitico ordinario.

Se l'insieme I , sempre connesso, non è però chiuso, diciamone I_1 , l'interno, e indichiamo con I_2 una parte dell'involucro (*) di I , contenente punti interni alle varie porzioni di I_1 . Ove su I_2 sia soddisfatta una condizione di quasi-analiticità, sarà ancora possibile il prolungamento generalizzato.

P. es. è possibile il prolungamento da un campo aperto ad un altro, lungo un arco rettificabile su cui sia verificata la (21) con $d = 1$.

In particolare le frontiere dei due campi potrebbero avere un punto comune ed il prolungamento avvenire attraverso questo punto, con una densità asintoticamente $< \omega$, e con $\log(-\log \omega) = \rho^{-1-\epsilon}$.

Osserviamo ancora che in taluni casi potrà l'insieme I_2 constare di più parti aventi ordini dimensionali diversi, implicanti nella condizione di quasi-analiticità funzioni ω diverse.

Terminando, faremo notare che al caso, sin qui escluso, di un insieme I non limitato, la nostra trattazione si estende im-

(*) L'involucro di un insieme si ottiene aggregando a questo tutti i suoi punti limiti.

mediatamente. Basta enunciare le condizioni di quasi-analiticità separatamente per ogni porzione limitata di I , e per un intorno dell'infinito ricondotto al finito mercè un'inversione. Più semplicemente, se si prendono le distanze ρ sulla *sfera complessa*, gli enunciati precedenti si conservano inalterati.

Le funzioni $f(z)$ saranno in questo caso tutte nulle all'infinito. Si potrà completarne la classe, aggiungendo loro delle costanti arbitrarie.
