MARIO VILLA

Sulle trasformazioni pseudocremoniane

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 4 (1933), p. 93-110

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__93_0>

SULLE TRASFORMAZIONI PSEUDOCREMONIANE

Nota di MARIO VILLA *a Milano*

SUNTO. — L'Autore si occupa di trasformazioni biunivoche della geometria iperalgebrica che mutano enti algebrici in enti iperalgebrici.

Nel gruppo delle trasformazioni iperalgebriche biunivoche - salvo per elementi eccezionali - fra gli elementi di due spazi lineari S_n vanno distinte tre specie di trasformazioni. Ricordiamo all'uopo (¹) che le rappresentazioni degli enti complessi sulle varietà reali Φ (sfera di RIEMANN, varietà di SEGRE, ecc.) si ottengono - sostanzialmente - sostituendo all'ente oggettivo F una delle due schiere coniugate di varietà particolari esistenti su Φ, e associando ad ogni elemento di quella schiera il coniugato dell'altra: si ha allora un ente reale che rappresenta l'elemento complesso di F. Ne viene che la corrispondenza algebrica reale immagine di una trasformazione *ipercremoniana* - così si dirà una trasformazione del gruppo - muta ogni schiera di Φ in sè stessa, o una nell'altra le due schiere di Φ, oppure non muta gli elementi delle due schiere in elementi della stessa natura. Le trasformazioni ipercremoniane per cui si presenta il primo caso sono le ordinarie cremoniane, mentre quelle che dànno luogo al secondo sono le anticremoniane del COMESSATTI (²) - che si ottengono dalle cremoniane moltiplicandole pel coniugio. È infine alle

(¹) C. SEGRE, *a*) *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* [Math. Ann., B. 40, p. 439, 1892].

(²) A. COMESSATTI: *Reelle Fragen in der algebraischen Geometrie* [Jahresbericht der D. M. V. B. 41, p. 110, 1931]; *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale* [Math. Ann., B. 73, p. 10, 1913].

trasformazioni del terzo caso – assai più numerose – che riservo il nome di *pseudocremoniane*.

Queste ultime sono caratterizzate nel gruppo dalla proprietà di trasformare enti algebrici in enti iperalgebrici. Una trasformazione pseudocremoniana Ω muta, in particolare, un iperpiano di S_n in un ente iperalgebrico φ di S'_n a $2n-2$ parametri reali. Al sistema lineare degli iperpiani di S_n corrisponde in S'_n una totalità di enti φ che può dirsi un sistema lineare omaloidico ∞^n.

Come per le trasformazioni cremoniane, la ricerca delle Ω si riduce a quella di sistemi lineari omaloidici ∞^n, giacchè per ottenere la Ω basterà riferire proiettivamente un tale sistema di S'_n al sistema degli iperpiani di S_n.

Le trasformazioni Ω hanno interesse sia perchè completano il gruppo delle trasformazioni ipercremoniane – gruppo della geometria iperalgebrica – sia per le applicazioni a cui dànno luogo. Ed è spontaneo di studiare dapprima le Ω piane che si ottengono con costruzioni analoghe a quelle delle collineazioni, delle anticollineazioni e delle trasformazioni quadratiche (3).

È ben noto che dati due piani π, π', ponendo una proiettività fra due fasci di rette A, A' – l'uno di π, l'altro di π' – e un'altra proiettività fra due altri fasci B, B' – l'uno di π e l'altro di π' – facendo corrispondere ad un punto P di π il punto P' di π' in cui si segano le rette omologhe (nelle proiettività) di AP, BP, nasce fra π, π' una collineazione o una trasformazione quadratica. Sostituendo le due proiettività con due antiproiettività si ha invece un'anticollineazione o una trasformazione antiquadratica. Ma sostituendo una sola delle due proiettività con un'antiproiettività, ecco che ci si presentano delle nuove trasformazioni: *le più semplici trasformazioni* Ω (4).

In quanto segue (nn. 1, 2) studio appunto quest'ultima trasformazione. Una retta viene qui mutata nell'ente generato dai punti comuni ai raggi omologi di due fasci antiproiettivi che de-

(3) Una particolare trasformazione pseudocremoniana fra rette trovasi in C. Segre, β) *Un nuovo campo di ricerche geometriche* [Atti di Torino, Vol. 25, 26, n. 26, 1890-1891].

(4) Vedi la mia Nota: *Sulle reti omaloidiche di pseudoconiche* [Boll. Unione Mat. Italiana, 12, p. 219, 1933].

nomino *pseudoconica.* Pervengo così (n. 3) ad una rete omaloidica di pseudoconiche, e a dei fasci di pseudoconiche. Da quest' ultimi deduco varie proprietà delle pseudoconiche stesse e il comportamento degli elementi singolari di Ω (n. 4). Nel n. 5 ottengo una nuova generazione delle pseudoconiche e, di conseguenza, determino Ω in altro modo. Trasformo (n. 6) con Ω una rete omaloidica di coniche in una rete omaloidica di catene piane che, con una rete di rette, dà la particolare Ω

$$x' = x, \qquad y' = \overline{y},$$

che ha particolare interesse nella geometria complessa affine (n. 7). Nel n. 8 considero l' ente trasformato da Ω in un' iperconica: il *quadrilatero iperalgebrico* ([5]). E chiudo con un teorema appartenente alla geometria sull' iperconica il cui inverso dà nuove generazioni delle iperconiche.

1. – Consideriamo due fasci di rette A, B di un piano π, e due altri fasci A', B' di un altro piano π', riferiamo proiettivamente i fasci A, A' e antiproiettivamente i fasci B, B' e ad un punto di π comune a due raggi di A, B facciamo corrispondere il punto di π' comune ai raggi omologhi di A', B'. Mettiamoci dapprima nel caso più generale, supponiamo cioè che nella proiettività ω_1 fra A, A' come nella antiproiettività $\overline{\omega}_2$ fra B, B' ad $A\,B$ non corrisponda $A'\,B'$ ([6]). In ω_1, $\overline{\omega}_2$ siano $A'\,C'$, $B'\,C'$ le omologhe di $A\,B$ e $A\,C$, $B\,C$ le omologhe di $A'\,B'$. I vertici e i lati dei triangoli (A, B, C), (A', B', C') sono gli elementi singolari della trasformazione, e si diranno gli *elementi fondamentali* di questa.

Ad ogni punto di π (di π') – non appartenente al triangolo fondamentale – corrisponde un punto di π' (di π) – pure non appartenente al triangolo fondamentale – e la corrispondenza è

([5]) Anticipando le nozioni fondamentali sulle varietà iperalgebriche di dimensione massima acquisite nel mio lavoro «*Connessi algebrici, iperalgebrici e varietà iperalgebriche di dimensione massima*» si può dire, in particolare, che il quadrilatero iperalgebrico è una trivarietà di 2° ordine e di genere algebrico 1. Le trivarietà di 1° ordine e di genere algebrico 2 sono invece le iperconiche.

([6]) Più tardi (nn. 6, 7) perverrò al caso in cui nelle ω_1, $\overline{\omega}_2$ ad $A\,B$ corrisponde $A'\,B'$. Pel caso intermedio, vedi il mio lavoro citato nella nota (4).

biunivoca. Ad un punto delle rette $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ corrisponde rispettivamente A, B, C e similmente scambiando i due piani che sono nelle stesse condizioni [7]. Ma esamineremo poi più da vicino (n. 4) il comportamento degli elementi fondamentali. Vediamo qui invece qual'è l'ente omologo di una retta generica di π'.

Considerando come corrispondenti due raggi di A', B' che proiettano uno stesso punto di una retta, i fasci stessi vengono riferiti prospettivamente. Essendo A' proiettivo ad A, B' antiproiettivo a B, nasce fra A, B una antiproiettività. Ad una retta di π' corrisponde dunque un ente Q che è il luogo dei punti comuni ai raggi omologhi di due fasci antiproiettivi, cioè una *pseudoconica* [8].

2. - Assumiamo i triangoli (A, B, C), (A', B', C') come triangoli di riferimento in sistemi di coordinate proiettive omogenee x_1, x_2, x_3 per π, y_1, y_2, y_3 per π'. Più precisamente poniamo in A, A' i punti $(1, 0, 0)$ e in B, B' i punti $(0, 1, 0)$. La proiettività ω_1 è data allora da

$$y_2 = x_3\,, \qquad y_3 = x_2\,,$$

avendo assunte come omologhe le rette $x_2 - x_3 = 0$, $y_2 - y_3 = 0$. Analogamente l'antiproiettività $\overline{\omega}_2$ - assumendo come omologhe $x_1 - x_3 = 0$, $y_1 - y_3 = 0$ $(\overline{y}_1 - \overline{y}_3 = 0)$ [9] - è

[7] Se un ente iperalgebrico passa per un punto fondamentale, esisterà quindi una retta fondamentale che fa parte del trasformato. Da tale retta si farà però astrazione.

[8] L'ente Q è ∞^2, cioè una tela, ed è base di un fascio d'iperconiche. Si avverta però che Q si presenta solo quando nel fascio di antireciprocità (che contiene il fascio di antipolarità generatrici delle iperconiche del fascio) una sola delle tre antireciprocità degeneri è un'antipolarità. I punti singolari delle altre due antireciprocità degeneri sono i centri (A, B) dei due fasci antiproiettivi generatori di Q, mentre quello dell'antipolarità è il punto - che denoteremo con H - comune alle rette omologhe alla AB nell'antiproiettività fra A, B. Mentre in un punto generico di Q le tangenti a Q formano una catena semplice, le tangenti a Q in A, e in B sono le rette AH, BH (Cfr.: Segre: β, nn. 42, 45; α, pp. 435, 437). Si dirà che A, B sono i ***punti singolari*** di Q.

[9] In generale si indicherà con $\overline{\varphi}$ la funzione che si ottiene ponendo

$$y_1 = \overline{x}_3, \qquad y_3 = \overline{x}_1 .$$

A due rette di A, B incrociantisi in (x_1, x_2, x_3) corrispondono quindi in ω_1, $\overline{\omega}_2$ due rette di A', B' che si segano nel punto

$$(1) \qquad y_1 = x_2 \overline{x}_3, \qquad y_2 = \overline{x}_1 x_3, \qquad y_3 = \overline{x}_1 x_2 .$$

E queste sono le relazioni analitiche che definiscono Ω. Si deducono subito le relazioni inverse

$$x_1 = y_2 \overline{y}_3, \qquad x_2 = \overline{y}_1 y_3, \qquad x_3 = \overline{y}_1 y_2 .$$

Alla rete di rette di π'

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0 ,$$

– i λ essendo parametri – corrisponde dunque in Ω la rete omaloidica di pseudoconiche

$$\lambda_1 x_2 \overline{x}_3 + \lambda_2 \overline{x}_1 x_3 + \lambda_3 \overline{x}_1 x_2 = 0 \quad [10].$$

Le pseudoconiche di questa rete che sono omologhe delle rette di un fascio di π' si dirà pure che formano un *fascio*. Ne viene che per un punto del piano – non comune a tutte le pseudoconiche di un fascio – passa una sola pseudoconica del fascio.

3. – Occupiamoci ora della rete omaloidica Δ a cui siano pervenuti. Dati due fasci di rette A, B e un punto C (non appartenente ad AB), ogni pseudoconica generata da un'antiproiettività fra i fasci A, B in cui sono omologhe le rette AC, BC appartiene a Δ. Si può quindi dire (n. 1) che *la rete* Δ *è for-*

per ogni coefficiente e per ogni variabile di una funzione ϕ il numero complesso coniugato.

[10] Osserviamo che se F è una funzione iperalgebrica di ordini fra loro uguali, e non reale – vale a dire $F \neq \overline{F}$ – l'ente di equazione $F = 0$ ammette anche l'equazione $F + \rho \overline{F} = 0$, con ρ costante di modulo $\neq 1$. Ciò vale, in particolare, per una pseudoconica. Appare così che una pseudoconica è anche il luogo dei punti uniti di antireciprocità non degeneri.

mata dalle pseudoconiche aventi in comune i due punti singolari e un terzo punto. È da osservare che i tre dati punti A, B, C sono i soli comuni a tutte le pseudoconiche della rete: si diranno i *punti base di* Δ.

Secondo la definizione del n. 2, si hanno cinque tipi di fasci di Δ corrispondenti ai fasci di rette di π' aventi il centro · 1) fuori dei lati del triangolo (A', B', C'); 2) su $B'C'$ (o su $A'C'$); 3) in C'; 4) in A' (o in B'); 5) su $A'B'$.

Dànno luogo alle pseudoconiche di un fascio dei primi quattro tipi le antiproiettività fra i fasci A, B aventi in comune oltre alla coppia AC, BC un'altra coppia di rette omologhe, mentre i fasci di Δ del quinto tipo sono le totalità di psendoconiche di Δ per le quali il punto H ad esse relativo (n. 1) appartiene ad una prefissata catena piana passante per C e rispetto alla quale A, B sono armonici ([11]).

Si hanno cioè i cinque fasci:

1) Il fascio formato dalle pseudoconiche generate dalle antiproiettività fra i fasci A, B in cui sono omologhe, oltre alle rette AC, BC, le rette AD, BD – essendo D un punto assegnato esternamente ai lati del triangolo (A, B, C). Quindi *il fascio è formato dalle pseudoconiche aventi in comune i due punti singolari e altri due punti.*

2) Il fascio formato dalle pseudoconiche generate dalle antiproiettività fra i fasci A, B in cui sono omologhe, oltre alle rette AC, BC, la retta AB ed una prefissata retta t uscente da

([11]) Converrà ricordare (Segre, β, nn. 19, 20, 21) che una catena piana è la tela luogo dei punti uniti di un' antinvoluzione del piano, e che sono due punti omologhi in questa antinvoluzione che si dicono armonici rispetto alla catena. Il luogo dei punti comuni ai raggi omologhi di due fasci antiprospettivi è pure una catena piana rispetto alla quale i centri dei due fasci sono armonici (vedi anche: Segre, α, p. 431). Ciò posto, consideriamo in π' un fascio di rette col centro su $A'B'$. Sia $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \mu y_3 = 0$ l'equazione di questo fascio – le λ sono qui costanti e μ parametro – Le tangenti alle Q del fascio omologo in A, B sono (nn. 1, 2) $\mu x_2 + \lambda_2 x_3 = 0$, $\bar{\mu} x_1 + \bar{\lambda}_1 x_3 = 0$, e sono quindi omologhe nell'antiprospettività fra A, B in cui si corrispondono AC, BC. Il punto H comune a queste due tangenti genera perciò – come si è affermato nel testo – una catena piana passante per C e rispetto alla quale A, B sono armonici.

A (o da B) non coincidente con alcun lato di (A, B, C). Ne viene che t è tangente in A ad ogni pseudoconica del fascio (n. 1), e quindi *il fascio è composto dalle pseudoconiche aventi in comune i due punti singolari, un terzo punto, e la tangente in uno dei punti singolari.*

3) Il fascio formato dagli enti generati dalle antiproiettività fra i fasci A, B in cui sono omologhe le rette AC, BC e in cui la AB è unita. I fasci A, B sono cioè antiprospettivi, e quindi: *il fascio è formato dalle catene piane aventi in comune un punto* (C) *e rispetto alle quali due dati punti* (A *e* B) *sono armonici* [12].

4) *Il fascio formato dalle coniche degeneri composte della retta* AC (BC) *e di una retta del fascio di centro* B (A). Questi due fasci sono dati dalle antiproiettività degeneri fra A, B in cui sono omologhe AC, BC.

5) Il fascio è composto delle pseudoconiche di Δ per le quali il punto H ad esse relativo appartiene ad una prefissata catena piana γ passante per C e rispetto alla quale A, B sono armonici. Ciò equivale a dire che il fascio è formato dalle pseudoconiche di Δ aventi in C le stesse tangenti – le quali formano una catena semplice (n. 1). Infatti le tangenti a Q in C sono le tangenti in C alle iperconiche del fascio di cui Q è base, ossia sono le rette polari di C rispetto alle antipolarità del fascio d'iperconiche. E queste rette sono quelle uscenti da C e appartenenti alla catena piana passante per C e per la quale il triangolo (A, B, H) è unito di 2ª specie [13], il che significa essere H sulla catena e A, B punti armonici rispetto ad essa. È quindi manifesto che le pseudoconiche di Δ per le quali il relativo H appartiene a γ abbiano in C le stesse tangenti (e viceversa) perchè queste appartengono alla catena (γ) che passa appunto per C, H e rispetto

(12) Sotto il nome di zone e di fascio iperbolico di zone del secondo tipo le catene e il fascio di cui sopra furono studiati da Polidori, *Ricerche sulle omografie e antiomografie piane* [Feltre, Castaldi, 1912, p. 5].

(13) Cfr.: Segre, β) nn. 42, 45. Non è superfluo ricordare che una retta del piano incontra una catena piana o in un punto solo, oppure in ∞^1 punti formanti una catena rettilinea. In quest' ultimo caso si dice che la retta appartiene alla catena. Similmente per un punto del piano passa una retta sola della catena o ∞^1 (formanti una catena semplice) secondo che il punto non sta o sta sulla catena.

alla quale A, B sono armonici. Concludendo: *il fascio è formato dalle pseudoconiche aventi in comune i due punti singolari, un terzo punto e le tangenti in questo.*

Raccogliendo:

Le pseudoconiche che hanno gli stessi punti singolari, e che hanno in comune un terzo punto formano una rete omoloidica Δ. *Sono fasci di* Δ *quelli formati dalle pseudoconiche di* Δ *che hanno in comune un quarto punto o le tangenti in uno dei tre punti base di* Δ (14).

I punti e le varietà tangenti comuni a tutti gli enti di un fascio si diranno gli elementi *base* di questo.

Osserviamo che:

Una pseudoconica è individuata da cinque punti, due dei quali siano i suoi punti singolari, o da quattro punti, due dei quali siano i suoi punti singolari, e dalle tangenti in uno di essi, o ancora da tre punti, due dei quali siano i punti singolari, e dalle tangenti in due di essi (15).

Per le pseudoconiche si presentano cioè fatti analoghi a quelli delle coniche.

4. – Riprendiamo la Ω. Essa può stabilirsi in altro modo: ponendo una proiettività fra la rete Δ di π e la rete delle rette di π'. Viene allora determinata anche una rete Δ di π' riferita proiettivamente alla rete delle rette di π. Ad un punto P' di π' corrisponderà in π l'elemento base – diverso dai tre punti base di Δ – del fascio di pseudoconiche omologo (nella proiettività) del fascio di rette di centro P'.

Ne deriva (n. 3, caso 2) che ai punti di $B'C'$ corrispondono le direzioni uscenti da A. E tale corrispondenza è la proiettività che risulta dalla ω_1 segando il fascio A' con la $B'C'$.

Similmente (n. 3, caso 2) ai punti di $A'C'$ corrispondono

(14) Avvertiamo che per due enti iperalgebrici una tangente comune in un punto P non implica – come ordinariamente – che gli enti abbiano un punto comune infinitamente vicino a P, giacchè sopra una retta (completa) esistono ∞^1 punti infinitamente vicini ad un dato punto P. Per isolare un punto P_1 infinitamente vicino a P basta considerare una catena rettilinea passante per P e P_1.

(15) Vedi anche la nota (25).

le direzioni uscenti da B, solo che qui la corrispondenza è un'antiproiettività: quella che risulta dalla $\overline{\omega}_2$ segando il fascio B' con la $A'\,C'$.

E infine (n. 3, caso 5): ai punti P' di $A'B'$ corrispondono le catene di direzioni uscenti da C e appartenenti alle catene piane che passano per C e rispetto alle quali A, B sono armonici, ossia che separano armonicamente ([16]) le direzioni CA, CB. Per precisare la natura di questa corrispondenza osserviamo che alla retta $P'\,C'$ corrisponde in Ω una catena piana Θ che fa parte del fascio omologo del fascio P'. Questa catena Θ deve quindi avere per tangenti in C le direzioni omologhe di P', vale a dire ([17]) queste rette sono quelle uscenti da C e appartenenti a Θ. D'altra parte variando il punto P' su $A'\,B'$ le Θ generano quel fascio di catene piane di cui abbiamo già parlato nel n. 3 (caso 3) e che è proiettivo al fascio di rette di centro C'. Si può quindi affermare che la corrispondenza fra i punti di $A'\,B'$ e quelle catene di direzioni uscenti da C è la proiettività ottenuta dalla precedente proiettività segando il fascio C' con $A'\,B'$ e sostituendo ad ogni catena piana del fascio la catena semplice delle rette uscenti da C e appartenenti ad essa.

Sugli elementi fondamentali di Ω si può dunque asserire:

Ai punti di $B'\,C'$ corrispondono proiettivamente le direzioni uscenti da A, e la proiettività è subordinata a ω_1, mentre ai punti di $A'\,C'$ corrispondono antiproiettivamente le direzioni uscenti da B e l'antiproiettività è subordinata a $\overline{\omega}_2$. Ai punti di $A'\,B'$ corrispondono invece proiettivamente le catene di direzioni uscenti da C - che separano armonicamente le direzioni CA, CB - e la proiettività è subordinata alla proiettività - determinata da Ω - fra le rette uscenti da C' e le catene piane omologhe.

E ciò vale anche scambiando le lettere con gli apici con quelle senza apici e viceversa.

5. – Volendo utilizzare le trasformazioni pseudocremoniane, i primi enti iperalgebrici da studiare sono i trasformati di enti

([16]) Cfr.: SEGRE, β, n. 16.
([17]) Cfr.: SEGRE, β, n. 15.

algebrici. In particolare, da una generazione dell' ente algebrico si può dedurne una dell'ente iperalgebrico omologo.

Consideriamo, ad esempio, una retta (generica) q di π'. Dicendo corrispondenti due raggi dei fasci A', C' che proiettano uno stesso punto di q, nasce tra A', C' una proiettività. Ora: la Ω trasforma il fascio A' nel fascio di rette A, e il fascio C' nel fascio φ di catene formato dalle catene piane passanti per C e rispetto alle quali A, B sono armonici (n. 3, caso 3). La proiettività fra A', C' determina una proiettività fra il fascio A e il fascio φ, e il luogo dei punti comuni a retta e catena omologa è l'ente trasformato di q da Ω, cioè una pseudoconica.

Si è così pervenuti alla nuova generazione delle pseudoconiche:

Dato un fascio di catene piane – cioè la totalità delle catene piane passanti per un dato punto C e rispetto alle quali due dati punti A, B son armonici – e un fascio di rette di centro A, riferendo proiettivamente i due fasci in guisa che alla retta AB corrisponda la catena degenerata nella retta BC, il luogo dei punti comuni a retta e catena omologa è una pseudoconica.

Ciò si collega al fatto che Ω si può ottenere anche in modo diverso da quello con cui siamo partiti, sostituendo cioè a uno dei quattro fasci di rette (di cui due in π e gli altri due in π') un fascio di catene. Più precisamente:

Dati in π due fasci di rette A, C e in π' un fascio di rette A' e un fascio di catene φ' – formato dalle catene passanti per un punto assegnato C' e rispetto alle quali A' e un dato punto B' sono armonici – ponendo una proiettività fra A, A' e una proiettività fra C, φ', la trasformazione che si ottiene è la Ω.

6. – Come già si è affermato la ricerca di trasformazioni pseudocremoniane si riduce a quella di reti omaloidiche iperalgebriche.

Conoscendo una trasformazione pseudocremoniana (la Ω), possiamo ottenere reti di quella natura trasformando con Ω reti R omaloidiche algebriche. Ognuna delle reti ottenute, riferita proiettivamente a una rete di rette, dà una trasformazione pseudocremoniana che è il prodotto di Ω e della trasformazione cremoniana determinata da R ([18]).

Supponiamo - ad esempio - che R sia la rete delle coniche passanti per tre dati punti. Se questi tre punti base si pongono nei vertici del triangolo fondamentale di Ω in π', l'equazione di R è

$$\lambda_1 y_2 y_3 + \lambda_2 y_1 y_3 + \lambda_3 y_1 y_2 = 0 .$$

La rete R' trasformata di R da Ω è quindi (n. 2)

$$\lambda_1 \bar{x}_1 x_3 + (\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \bar{x}_3 = 0 \quad ([19]),$$

cioè una rete di catene piane – come si poteva prevedere geometricamente. Dunque: *le catene piane rispetto alle quali due dati punti A, B sono armonici formano una rete omaloidica.* Ossia:

Dati due fasci A, B, ogni antiprospettività fra A, B genera una catena della rete. Si ha anche:

Ponendo una proiettività fra una rete omaloidica di coniche e una rete di catene piane, la trasformazione che risulta è la Ω.

E ancora:

Ponendo una proiettività fra la rete di catene e una rete di rette, la trasformazione che risulta è quella che si ottiene quando (n. 1) *sia nella proiettività* ω_1 *fra i fasci A, A' che nell'antiproiettività* $\bar{\omega}_2$ *fra i fasci B, B', ad $A B$ corrisponde $A' B'$.*

Consideriamo infatti una retta r' di π', e diciamo corrispondenti due raggi di A', B' che s'incrociano in uno stesso punto di r'. A', B' risultano così prospettivi. Essendo A' proiettivo ad A, B' antiproiettivo a B – in entrambe queste corrispondenze

([18]) Più in generale si potrebbe pensare alla trasformazione pseudocremoniana che è prodotto di una trasformazione cremoniana e di una potenza di Ω.

([19]) Nell'equazione di una catena piana si presenta sempre una retta ($x_3 = 0$) che va scartata.

ad $A\,B$ corrispondendo $A'\,B'$ – A', B' sono antiprospettivi. Di conseguenza in questa trasformazione Ω_0 a r' corrisponde una catena piana rispetto alla quale A, B sono armonici. Variando r' otteniamo poi tutte le catene piane per le quali A, B sono armonici, il che prova l'asserto.

Possiamo pure affermare: Ω_0 *è il prodotto di* Ω *e di una conveniente trasformazione quadratica.*

7. – Per quanto l'ultima proposizione enunciata svalorizzi lo studio di Ω_0, vediamo qui qualche proprietà di questa trasformazione ([20]) e della rete di catene.

Si è visto che alla rete di rette di π'

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$$

corrisponde la rete di catene

$$\lambda_1 \overline{x}_1 x_3 + (\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\,\overline{x}_3 = 0\,,$$

sicchè la Ω_0 è definita analiticamente dalle relazioni

$$y_1 = \overline{x}_1 x_3\,, \qquad y_2 = x_2 \overline{x}_3\,, \qquad y_3 = x_3 \overline{x}_3\,.$$

Si deducono subito le inverse

$$x_1 = \overline{y}_1 y_3\,, \qquad x_2 = y_2 \overline{y}_3\,, \qquad x_3 = y_3 \overline{y}_3$$

dalle quali appare che alla rete delle rette di π corrisponde una rete di catene di π'. I due piani sono cioè nelle stesse condizioni. Gli elementi singolari della trasformazione sono i soli punti della retta $A\,B$ $(A'B')$. Come appare anche dalla costruzione di Ω_0 (n. 6), ad ogni punto di uno dei piani – non appartenente alla retta singolare – corrisponde un punto dell'altro piano – pure non appartenente alla retta singolare – e la corrispondenza è biunivoca. Dicendo *fascio* delle rete R' la totalità delle catene di R' che sono omologhe in Ω_0 delle rette di un

([20]) La Ω_0 potrebbe dirsi *pseudocollineazione* per l' analogia che la sua costruzione presenta con quella delle collineazioni, e delle anticollineazioni.

fascio, si ha: *i fasci di R' sono formati dalle catene di R' che hanno in comune un punto P*. Se P non appartiene ad AB le catene del fascio hanno in comune il solo punto P, e – in sostanza – il fascio è quello del n. 3 (caso 3). Se invece P appartiene ad AB le catene del fascio hanno in comune tutti (e soli) i punti della catena rettilinea di AB passante per P e rispetto alla quale A, B sono armonici. Se però $P \equiv A\,(\equiv B)$ il fascio degenera nel fascio di rette di centro $A\,(B)$. Non enuncio il comportamento degli elementi singolari di Ω_0 che si deduce immediatamente dalle proposizioni ora stabilite.

Voglio invece dare rilievo al fatto che la Ω_0 è biunivoca senza eccezioni per i punti situati fuori della retta singolare. Ciò invero dà particolare importanza alla trasformazione per quei piani in cui si prescinde da una retta, ad esempio per quelli in cui si fa astrazione dalla retta impropria – come nella geometria affine – cioè per i piani propri. Assumendo la retta che si scarta come retta singolare di Ω_0 *la nostra trasformazione è allora biunivoca senza eccezioni.* Ciò appare anche togliendo l'omogeneità (ponendo $x_3 = 1$), giacchè allora le relazioni analitiche che definiscono Ω_0 possono scriversi

$$(2) \qquad x' = \bar{x}, \qquad y' = y \text{ [21] [22]}.$$

8. – Apparirà nel mio lavoro citato nella nota (5) che ogni ente iperalgebrico, suscettibile di essere rappresentato analiticamente con una sola equazione, si genera con due sistemi lineari antireciproci di forme algebriche. Da una tale generazione dell'ente se ne deduce una – di natura diversa – per il trasformato.

Consideriamo – ad esempio - fra le coniche di un fascio

[21] Se i due piani propri sono sovrapposti, quando Ω_0 è involutoria potrebbe dirsi *pseudoconiugio*.

[22] Si è finora tacitamente ammesso che le Ω, Ω_0 siano trasformazioni iperalgebriche (e quindi pseudocremoniane), ma ciò si vede facilmente. In virtù dell'ultima proposizione del n. 6, basta far vedere che ciò si verifica per la Ω_0. Scindendo infatti ogni coordinata complessa nelle sue componenti reali, le (2) definiscono una trasformazione algebrica fra gli spazi S_4 dove si rappresentano queste componenti, il che prova uppunto che Ω_0 è iperalgebrica.

un' antinvoluzione nella quale siano unite due coniche degeneri del fascio. Dirò *quadrilatero iperalgebrico* l' ente Γ luogo dei punti che appartengono a coniche del fascio unite in quell'antinvoluzione, coniche che, entro il fascio, formano una catena semplice ([23]).

Essendo a, b, c, d forme algebriche lineari in y_1, y_2, y_3, i due fasci sovrapposti siano

$$ab + \lambda cd = 0, \qquad ab + \mu cd = 0 .$$

Nell' ipotesi ammessa, l' antinvoluzione è

$$k\lambda + \bar{k}\,\bar{\mu} = 0 \quad (k = \text{cost.}).$$

Γ si ottiene eliminando i parametri λ, μ fra le precedenti equazioni, il che dà - conglobando il k in a:

$$ab\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,cd = 0 .$$

Avvertiamo che Γ, oltre ad essere generato dai fasci di coniche

$$ab + \lambda cd = 0 , \qquad ab - \bar{\lambda}\, cd = 0 , \tag{3}$$

è generato anche dai fasci sovrapposti di pseudoconiche

$$a\bar{c} + \lambda \bar{b} d = 0 , \qquad a\bar{c} - \bar{\lambda}\, \bar{b} d = 0 \tag{4}$$

in quanto è la catena semplice delle pseudoconiche unite nell' antinvoluzione che si ha fra questi fasci chiamando omologhe due pseudoconiche relative ad uno stesso valore di λ. Γ è similmente generato anche dai fasci sovrapposti di pseudoconiche

$$a\bar{d} + \lambda \bar{b} c = 0 , \qquad a\bar{d} - \bar{\lambda}\, \bar{b}\, c = 0 . \tag{5}$$

I punti base del fascio (3) sono i quattro vertici del quadrilatero

([23]) In relazione alla nota ([5]), aggiungo che la proprietà che due coniche degeneri del fascio siano unite nell' antinvoluzione caratterizza il quadrilatero iperalgebrico fra le trivarietà di 2° ordine e di genere algebrico 1.

(a, b, c, d) diversi da (a, b), (c, d) (cioè dai punti doppi delle coniche degeneri del fascio unite nell'antinvoluzione). Il fascio (4) è formato dalle pseudoconiche aventi per punti singolari (a, d), (b, c) e passanti per (a, b), (c, d), mentre il fascio (5) è formato dalle pseudoconiche passanti ancora per (a, b), (c, d), ma aventi per punti singolari gli altri due vertici opposti – (a, c), (b, d) – del quadrangolo semplice dei quattro punti base del fascio (3) (cfr. : n. 3, caso 1).

Si ha dunque:

Sopra un quadrilatero iperalgebrico

$$a b \bar{c} \bar{d} + \bar{a} \bar{b} c d = 0$$

esistono ∞^1 *coniche appartenenti al fascio di punti base* (a, c), (a, d), (b, c), (b, d) *e formanti nel fascio una catena. Esistono anche* ∞^1 *pseudoconiche appartenenti al fascio di punti base* (a, c), (b, d), (a, b), (c, d) – *i punti singolari essendo* (a, c), (b, d) – *e formanti nel fascio una catena. Esistono infine altre* ∞^1 *pseudoconiche appartenenti al fascio di punti base* (a, d), (b, c), (a, b), (c, d) – *i punti singolari essendo* (a, d), (b, c) – *e formanti nel fascio una catena. Per un punto del quadrilatero diverso dai vertici di* (a, b, c, d) *passa una sola di quelle coniche, una sola delle pseudoconiche della prima catena, e una sola di quelle della seconda.*

Ma si ha inoltre:

Ogni quadrilatero iperalgebrico è trasformato da Ω – *presa opportunamente – in un' iperconica.*

Prendiamo tre delle quattro rette $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$ come lati del triangolo di Ω, prendendo fra queste tre, come lato $A'B'$, quella che, con la quarta retta che si è esclusa, forma una conica degenere del fascio (3). Assumiamo cioè, ad esempio:

$$a \equiv y_1 = 0\,, \qquad b \equiv y_2 = 0\,, \qquad c \equiv y_3 = 0\,,$$

$$d \equiv a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0\,.$$

Γ è allora

$$y_1 y_2 \bar{y}_3 (\bar{a}_1 \bar{y}_1 + \bar{a}_2 \bar{y}_2 + \bar{a}_3 \bar{y}_3) + \bar{y}_1 \bar{y}_2 y_3 (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) = 0,$$

e il trasformato da Ω [vedi le (1) del n. 2] – prescindendo dalle rette $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ contate due volte – è

$$(6) \qquad a_1 x_2 \bar{x}_3 + a_2 \bar{x}_1 x_3 + a_3 \bar{x}_1 x_2 + \bar{a}_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{a}_2 x_1 \bar{x}_3 + \bar{a}_3 x_1 \bar{x}_2 = 0,$$

che è appunto una generale iperconica passante per $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ([24]).

D'altra parte i fasci (3), (4), (5) sono trasformati da Ω nelle totalità (fasci) di pseudoconiche

$$(7) \qquad x_i \bar{x}_i + \lambda (a_1 x_2 \bar{x}_3 + a_2 \bar{x}_1 x_3 + a_3 \bar{x}_1 x_2) = 0 ,$$

dove per $i = 1$ si ha l'omologo di (5), per $i = 2$ l'omologo di (4), per $i = 3$ l'omologo di (3). Eliminando il λ fra la (7) e quella che si ottiene dalla (7) ponendo $-\bar{\lambda}$ in luogo di λ, si ottiene invero la (6). Esaminiamo i fasci (7) e all'uopo teniamo presente che $A' \equiv (b, c)$, $B' \equiv (a, c)$, $C' \equiv (a, b)$. Una conica generica di (3) passa per (a, c) (a, d), (b, c), (b, d). Ora: in Ω ad (a, c), (b, c) corrispondono due rette fondamentali da cui si prescinde, mentre ad (a, d), (b, d) corrisponde rispettivamente una direzione uscente da A, da B. Dunque: il fascio (7) – per $i = 3$ – si compone delle pseudoconiche aventi per punti singolari A, B – cioè $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ – e aventi in questi punti le tangenti

$$a_2 x_3 + a_3 x_2 = 0 , \qquad \bar{a}_1 x_3 + \bar{a}_3 x_1 = 0 ,$$

ossia le tangenti nei punti stessi all' iperconica (6).

([24]) Per varie nozioni sulle iperconiche, vedi SEGRE, α, p. 432; β, n. 27. Ricordiamo qui solo la proprietà, fondamentale di questi enti, e cioè che la (6) è il luogo dei punti uniti dell' antipolarità

$$a_1 x_2 \bar{z}_3 + a_2 \bar{z}_1 x_3 + a_3 \bar{z}_1 x_2 + \bar{a}_1 \bar{z}_2 x_3 + \bar{a}_2 x_1 \bar{z}_3 + \bar{a}_3 x_1 \bar{z}_2 = 0 .$$

Le tangenti alla (6) in $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ – cioè le rette polari di questi punti nell'antipolarità – sono quindi $a_2 x_3 + a_3 x_2 = 0$, $\bar{a}_1 x_3 + \bar{a}_3 x_1 = 0$.

Veniamo al fascio (7) - per $i=2$. Una pseudoconica genenerica di (4) passa per (a, d), (b, c), (a, b), (c, d). In Ω ad (a, b), (b, c) corrispondono due rette fondamentali da cui si prescinde, mentre ad (a, d) corrisponde una direzione uscente da A. Al punto (d, c) corrisponde invece una catena di direzioni uscenti da C dalla quale CA, CB sono separate armonicamente. Il fascio (7) $(i=2)$ si compone quindi delle pseudoconiche dotate di punto singolare in A e aventi in questo punto per tangente la tangente in A all' iperconica, e inoltre passanti per C e aventi in C per tangenti le rette che escono da C e appartengono alla catena piana passante per C, pel punto comune alle tangenti in A, B all'iperconica, e rispetto alla quale A, B sono armonici (cfr.: n. 4). A conclusione affatto analoga si arriva pel fascio (7) per $i=1$ ([25]).

Siccome A, B, C sono tre punti generici - non in linea retta - dell' iperconica, concludiamo col teorema:

Sopra un' iperconica presi tre punti A, B, C - non appartenenti ad una stessa retta - si considerino le rette a, b tangenti in A e in B all' iperconica, e la catena semplice W formata dalle rette uscenti da C e appartenenti alla catena piana passante per C e per (a, b) e rispetto alla quale A, B sono armonici.

Vengono così determinati tre fasci di pseudoconiche:

1. *Il fascio φ_1 formato dalle pseudoconiche aventi per punti singolari A, B e per tangenti in questi a, b.*

2. *Il fascio φ_2 formato dalle pseudoconiche aventi per punto singolare A e a per tangente in A, e passanti per C, W essendo la catena delle rette tangenti in C.*

3. *Il fascio φ_3 (analogo di φ_2) formato dalle pseudoconiche aventi per punto singolare B e b per tangente in B, e passanti per C, W essendo la catena delle rette tangenti in C.*

Ebbene in ciascuno dei fasci φ_i esistono ∞^1 pseudoconiche

([25]) Per ogni punto del piano - non comune a tutte le pseudoconiche del fascio (7) per $i=1$, ad es. — passa manifestamente una sola pseudoconica di questo fascio. Scende che: *una pseudoconica è individuata da un suo punto singolare, e dalla tangente in esso, da due altri punti, e dalla catena delle tangenti in uno di questi.*

appartenenti all' iperconica e formanti in φ_i *una catena semplice* γ_i, *e per un punto dell'iperconica* ($\ddagger$ *A*, *B*, *C*) *passa una sola delle pseudoconiche di* γ_i, *sicchè ogni pseudoconica di* φ_i *non appartenente all' iperconica non ha con questa alcun punto in comune* $\ddagger$ *A*, *B*, *C* (26).

Possiamo anche dire, limitandoci - ad esempio - a pseudoconiche del fascio φ_1:

Se un' iperconica e una pseudoconica hanno tre punti in comune - due dei quali siano i punti singolari della pseudoconica - e le tangenti in questi due, la pseudoconica giace sull' iperconica.

L' inverso del teorema precedente dà infine:

Dato un fascio formato dalle pseudoconiche aventi in comune i due punti singolari A, B e le tangenti in questi (oppure aventi in comune un punto singolare A e la tangente in A, un punto C e le tangenti in C), il luogo dei punti che appartengono alle pseudoconiche che entro quel fascio formano una data catena - alla quale appartenga la retta AB (o *AC*) *contata due volte - è un' iperconica.*

(26) Nella geometria dello spazio di due variabili complesse (geometria pseudoconforme) l' iperconica prende il nome di ipersfera, e, nell' indirizzo differenziale, la geometria sull' ipersfera fu iniziata recentemente da E. Cartan, *Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l' espace de deux variables complexes* [Ann. Scuola Normale di Pisa, S. 2, V. 1, p. 342, 1932]. Questo Autore introduce la nozione di *catena* (chaîne) e di *cerchio* dell'ipersfera che non sono altro, nel piano proiettivo complesso, che l' intersezione dell' iperconica con una retta segante, e il luogo dei punti reali dell' iperconica (o ogni altra linea trasformata di questa per mezzo di una trasformazione del gruppo delle omografie dell' iperconica). Il teorema che ho sopra stabilito va posto accanto a questi risultati di Cartan. Mentre le catene e i cerchi dell' ipersfera sono fili (enti ∞^1) gli enti da me introdotti sono *tele* (enti ∞^2) che si potrebbero chiamare, nella geometria sull' ipersfera, le *zone* di questa.