

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIAN DOMENICO MATTIOLI

Ricerche sulla meccanica dei moti fluidi turbolenti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 4 (1933), p. 67-91

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__67_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

RICERCHE SULLA MECCANICA DEI MOTI FLUIDI TURBOLENTI

di GIAN DOMENICO MATTIOLI a Padova

Il problema della turbolenza si presenta sotto due aspetti diversi che, assieme considerati, si completano. La prima questione che sorge nella trattazione di siffatti movimenti, è la spiegazione dell'origine della turbolenza; cioè la ricerca della causa per la quale, oltrepassata una velocità critica - che, del resto, a parità di situazione geometrica dell'ambiente sede del moto fluido, non è affatto una costante - il movimento cessa di possedere i caratteri di regolarità che sono presupposti nelle equazioni dell'idrodinamica (relative al *moto laminare*) ed acquista quell'andamento complicato e confuso, di impossibile caratterizzazione locale precisa, che appunto denotasi *regime fluido turbolento*. Supposto che siffatto movimento si sia già formato, e, volendo, abbia anche raggiunto la situazione di permanenza, nasce il secondo problema: farne la teoria dinamica.

La considerazione teorica dei moti turbolenti risale a REYNOLDS ⁽¹⁾; e da allora una folla d'autori (LORD RAYLEIGH, LORENTZ, HOPF, v. MISES, PRANDTL, KARMAN, per citare qualche nome fra i più eminenti) se ne è occupata, e quasi esclusivamente nei riguardi del primo problema presentandolo come una questione di stabilità (di fronte alle piccole oscillazioni) del preesistente moto regolare. Poichè qui mi occupo del secondo aspetto della teoria

(¹) Una bibliografia essenziale è contenuta nel bel rapporto di W. TOLLMIEEN, *The present state of the turbulence problem*, pubblicazione N. 19 del « California Institute of Technology » Pasadena.

della turbolenza, non è questo il posto per analizzare negli aspetti comuni le precedenti trattazioni; un'osservazione critica mi sembra però necessaria per spiegare i risultati finora ottenuti, *sempre negativi*, cioè favorevoli alla stabilità, e quindi affermantici l'impossibilità del sorgere della turbolenza! In tutte quelle ricerche di stabilità non veniva mai abbandonata la presunzione della regolarità del moto, più particolarmente nei riguardi di una possibile disgregazione della massa fluida. Ora nella teoria qui esposta l'affermazione di una siffatta disgregazione costituisce il fondamento essenziale; e tale ipotesi trova effettivo riscontro nella realtà fisica del movimento, come elementari esperienze lo indicano. È probabile quindi che anche la teoria della turbolenza iniziale debba rifarsi all'ipotesi della disgregazione, ed assumere così l'aspetto di « *teoria dell'origine della disgregazione* »: problema chiaramente assai complesso.

I fondamenti di una teoria dinamica della turbolenza già formata, sono stati da me posti in alcuni recenti lavori ⁽¹⁾ con referenza a questi due campi di velocità: tubi cilindrici a sezione circolare, canali a pareti parallele. L'accordo, veramente notevole tra le formule finali e i dati empirici, mi spinge a saggiare la stessa impostazione teorica su altri tipi di movimento: procedendo per gradi, è il problema piano che si presenta per primo, particolarmente quello del: *moto fluido turbolento all'esterno di un ostacolo, con velocità asintotica costante*. È questo il problema della scia turbolenta che prendo a considerare nella seconda parte di questa Memoria, come prima applicazione delle equazioni del moto piano turbolento, la cui determinazione forma oggetto della prima parte.

⁽¹⁾ *Teoria della turbolenza*, Rendiconti dei Lincei, vol. XVII, 1933, pag. 217.

Teoria della turbolenza - Conseguenze analitiche e confronto con l'esperienza, ibidem, pag. 293.

Sopra una condizione alla parete per l'equazione della turbolenza nei tubi, ibidem, (in corso di stampa).

Sur la théorie de la turbulence dans les canaux, Comptes rendus, vol. 196, 1933, pag. 1282.

PARTE I.

Teoria dinamica della turbolenza.**1. - IPOTESI DEL TRASPORTO DISCONTINUO DI MASSA.**

Le apparenze cinematiche del moto fluido turbolento sono ben note: esperienze elementari indicano, ad es., che un filetto colorato iniettato nella massa turbolenta si diffonde rapidamente; molto di più di quanto sarebbe da aspettarsi a causa del fenomeno molecolare della diffusione. L'indicazione che questa esperienza fornisce è imperativa: *la massa fluida turbolenta è disgregata e i suoi elementi si mescolano caoticamente*. Volendo passare alla interpretazione meccanica di questo quadro cinematico, è chiaro che bisogna rinunciare all'intenzione di inseguire ogni particella nel suo moto effettivo: forma e grandezza loro non sono note; ed inoltre si otterrebbe una costruzione artificiosa qualora si pretendesse di formulare ipotesi sulla natura intima del mescolamento turbolento e sulle forze che lo determinano. Non è escluso che a qualche conoscenza in questo campo si arrivi prospettando il problema della turbolenza iniziale nel senso indicato nell'introduzione; ma poichè qui ci occupiamo dello stato di regime della turbolenza, è sugli aspetti globali, immediatamente rilevabili sulla massa in movimento che occorre localizzare la nostra attenzione. Questo punto di vista impone alcune precisazioni, che costituiscono le ipotesi qualitative della teoria.

1. - In regime turbolento entro la massa fluida va perduto il concetto di continuità, nella forma che esso assume nella cinematica dei fluidi perfetti o viscosi: vale a dire, a particelle fluide a contatto in un istante non s'impone affatto di esserlo indefinitamente. L'ipotesi della continuità casca avanzando quella della *disgregazione* della massa: precisandola, ammetteremo che dalla massa fluida si staccino continuamente delle particelle elementari, di forma e grandezza imprecisate, ma, in regime permanente, in modo statisticamente costante attorno ad ogni punto del campo del moto. L'ignorazione dei dettagli della disgregazione impone naturalmente un criterio di valutazione statistica, che interviene anche nelle successive ipotesi.

2. - La velocità (vettoriale) locale è la media calcolata in

una regione dell'intorno del punto considerato abbastanza piccola, ma tale da contenere un numero rilevante di particelle elementari. Ciò equivale a dire che la velocità nel punto P è il rapporto tra la quantità di moto della massa contenuta in un intorno di P e la massa stessa. Si ammette che tale rapporto non vari nel tempo, o, se si vuole, che sia inoltre una media temporale.

Questa valutazione statistica della velocità è imposta dalla natura dell'ambiente fluido turbolento; il quale si presenta, ad ogni istante, come una massa aggregata nella quale sono conglobati elementi di ugual materia bensì, ma cinematicamente individualizzati: il campo di velocità entro ciascuno non si riattacca con continuità a quello della massa aggregata.

3. - La terza ipotesi precisa il meccanismo della turbolenza, ed è l'*ipotesi del mescolamento turbolento*. È ammesso cioè che le particelle fluide nell'istante in cui si disgregano ricevano delle impulsioni - dominate dal caso, quanto a grandezza e direzione - per cui si trasportano dalla loro posizione iniziale ad altra prossima dove sono riassorbite dalla massa fluida. Le conseguenze dinamiche di un tale processo saranno considerate più innanzi; è ora necessaria qualche osservazione critica.

È anzitutto ovvio che nella valutazione quantitativa del mescolamento turbolento bisognerà ancora adottare il punto di vista statistico; cioè considerare la massa complessiva che si trasporta in ogni direzione a partire da un volume elementare, senza porre mente alla legge con cui è distribuita nei singoli elementi disgregati. Inoltre - ed è qui una questione pregiudiziale assai importante - tutte le direzioni devono ritenersi equivalenti od alcune sono privilegiate? L'osservazione dei movimenti reali non ci illumina in proposito; cosicchè il criterio di scelta non può essere se non un criterio di plausibilità o di semplicità formale. Nei lavori precedenti questa questione non si presentava, perchè nei casi finora considerati (tubi e canali) le traiettorie della velocità media erano rette parallele, ed in tale circostanza è ovvio che il trasferimento di una massa elementare parallelamente alla velocità non ha nessuna conseguenza dinamica, passando quella massa da una regione ad un'altra statisticamente identica. Soltanto il trasporto ortogonale alla velocità ha in tali casi funzione dinamica: ed in questo senso era ivi precisato il trasferimento

turbolento di massa. Ma quando le traiettorie sono curve, anche il trasporto secondo le linee di flusso ha effetti dinamici. L'intuizione fisica del fenomeno turbolento ci conduce a scegliere tra due possibilità: ammettere che a partire da ogni punto il trasporto turbolento avvenga ugualmente in tutte le direzioni; oppure che esso sia limitato alle direzioni ortogonali alla velocità.

Nei problemi concreti le differenze tra le due impostazioni non sono rilevanti. Infatti è in vicinanza di pareti rigide che la turbolenza si rende manifesta in modo eminente mediante un gradiente normale di velocità che può assumere anche valori grandissimi, mentre tangenzialmente le variazioni di velocità sono relativamente assai piccole. Ne viene che le differenze di ambiente cinematico che incontra una particella che si trasporta trasversalmente alla velocità sono enormemente più grandi di quelle relative a spostamenti tangenziali. Perciò, come indicherà lo sviluppo formale della teoria, quantitativamente predominerà in ogni caso il trasporto normale alla velocità, sia considerato o no il trasporto parallelo. Ed allora conviene lasciarci guidare da un criterio di convenienza formale: per cui ammetteremo che il trasporto turbolento sia statisticamente costante in tutte le direzioni attorno ad un punto.

2. - PERCORSO DI MESCOLAMENTO.

Veniamo ora alla formulazione analitica della teoria che scende dalle precedenti ipotesi. Il mescolamento di masse, quale meccanismo cinematico della turbolenza, è la naturale generalizzazione dell'ipotesi sulla quale MAXWELL ⁽¹⁾ costruì la teoria cinetica della viscosità. In questa teoria le tensioni tangenziali viscose risultano come conseguenza del trasferimento di quantità di moto fra strati adiacenti, operato dall'agitazione molecolare; le masse che si trasportano sono molecole, le quali, per la loro piccolezza e per l'ignorazione del loro eventuale moto di rotazione, sono da trattarsi come *masse puntuali caratterizzate dinamicamente dalla sola quantità di moto.*

(1) *Proc. Lond. Math. Soc.* 1871.

Il fenomeno turbolento è dello stesso tipo: solamente avviene ad una scala maggiore; *cosicchè* - ed è questo il punto fondamentale della presente teoria - *le particelle elementari*, fatta una semplice ed ovvia ipotesi sul campo interno di velocità, *si debbono considerare definite dinamicamente dalla quantità di moto e dal momento baricentrale di quantità di moto.*

I teoremi fondamentali della dinamica saranno quindi senz'altro applicabili al processo turbolento ove solo si precisi la grandezza e l'intensità del mescolamento.

Nella realtà i percorsi delle singole particelle saranno diversissimi: tener conto di questa circostanza è materialmente impossibile, non solo, ma anche non necessario, perchè l'intervento di una acconcia funzione di distribuzione *costante nel campo del moto* (ipotesi più probabile) condurrebbe agli stessi risultati formali che si hanno presupponendo forma e dimensioni delle particelle disgregate costanti in tutta la massa, e così pure costante, per un punto, lo spostamento di ogni particella. Inoltre, come si è detto, ammettiamo che l'espulsione di massa sia uniforme in tutte le direzioni; consegue allora che attraverso ad ogni elemento piano condotto per il generico punto P la massa proiettata dall'elemento di volume attorno a P è costante, ed è pure costante il valor medio delle proiezioni sulla normale esterna ad ogni piano degli spostamenti delle singole particelle che in P attraversano quel piano.

Indichiamo con l quest'ultima quantità: in relazione ai 3 gradi di libertà di traslazione, il processo di mescolamento turbolento si può dunque schematizzare ammettendo che da ogni elemento di volume P le particelle disgregate siano espulse secondo tre direzioni ortogonali (ma del resto qualunque), ugualmente nei due versi, ed ognuna percorra una lunghezza l (funzione di P) prima di conglobarsi nella massa fluida del punto di arrivo, dove cede la quantità di moto e il momento di quantità di moto posseduti. È introdotta inoltre una funzione $k(P)$, avente le dimensioni di una frequenza, tale che se ρ è la densità (costante) del fluido, sia $\rho k dt dS$ la massa che nel tempo dt viene espulsa, in ciascuna delle tre direzioni e nei due versi, dal volume dS .

La lunghezza l è il percorso di mescolamento, e fu intro-

dotta da PRANDTL (1) che la chiamò appunto « Mischungsweg », con lo stesso significato qui adottato, ma determinabile, nelle sue teorie, solamente sui dati empirici. La l nei calcoli di Prandtl, ha quindi una funzione puramente interpretativa dei risultati d'esperienza; e la ragione di ciò è da vedersi in questa circostanza primordiale: il Prandtl considera il mescolamento solamente nei riguardi della quantità di moto; ciò che va bene nell'ambito molecolare, ma che non esaurisce il problema dinamico alla scala del mescolamento turbolento. Questo avviene per elementi materiali piccoli bensì, ma non tanto da poterne trascurare la componente rotazionale del movimento: si capisce allora come l'intervento del teorema del momento della quantità di moto fornisca un'equazione in più che consente di determinare, come vedremo, il prodotto $l^2 k$ che, più di l e k separatamente, è la grandezza caratteristica dell'agitazione turbolenta.

3. - IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA PIANO. - TRASPORTO DISCONTINUO E CONSEGUENTE TRASPORTO CONTINUO DI MASSA.

Limitiamoci per ora al problema piano: saranno quindi due le direzioni di trasporto da considerare, che assumiamo come assi coordinati x, y . Siano u, v le componenti della velocità.

Consideriamo una grandezza qualunque, Φ , attaccata ad ogni elemento di massa, e proponiamoci di calcolare l'eccesso di quantità $m\Phi$ che transita in un senso attraverso ogni elemento lineare del piano del moto, rispetto a quella che passa in senso contrario.

Siano x, y le coordinate di questo elemento parallelo all'asse x , e di lunghezza Δx . Sulla normale (parallela ad y) fissiamo i punti di ordinate $y - l_1, y + l_2$ rispettivamente. Allora lo strato compreso tra y e $y - l_1$ espelle della massa attraverso Δx nel verso positivo dell'asse y , mentre dall'analogo strato compreso tra y e $y + l_2$ provengono le masse che attraversano Δx in senso contrario. La lettera m si riferisca alla massa che attraversa Δx , e poichè Φ è proporzionale alla massa, l'eccesso $\Delta_1 m\Phi$

(1) *Zeit. f. ang. Math. u. Mech.* vol. 5 (1925), p. 136.

di quantità $m\Phi$ che attraversa Δx nel verso positivo dell'asse y è, nel tempo Δt ,

$$\Delta'_1 m\Phi = \rho \left[\int_{y-l_1}^y k\Phi dy - \int_y^{y+l_2} k\Phi dy \right] \Delta x \Delta t.$$

Calcolando i due integrali mediante sviluppo in serie della funzione $k\Phi$, e conservando i primi due termini (ciò che si ammette di poter fare perchè l è supposto sufficientemente piccolo), si ha

$$\Delta'_1 m\Phi = \rho \left[(l_1 - l_2) k\Phi - \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} \frac{\partial(k\Phi)}{\partial y} \right] \Delta x \Delta t$$

dove $k\Phi$, $\frac{\partial(k\Phi)}{\partial y}$ si riferiscono al punto x, y . A meno di termini di 4° ordine in l e derivate, si ha pure

$$l_1 - l_2 = -2l \frac{\partial l}{\partial y}, \quad l_1^2 + l_2^2 = 2l^2;$$

l e $\frac{\partial l}{\partial y}$ essendo ancora calcolati in x, y . Dunque, nei limiti di approssimazione del 3° ordine in l e derivate

$$\Delta'_1 m\Phi = -\rho \left[2l \frac{\partial l}{\partial y} k\Phi + l^2 \frac{\partial(k\Phi)}{\partial y} \right] \Delta x \Delta t$$

cioè

$$(1) \quad \Delta'_1 m\Phi = -\rho \frac{\partial}{\partial y} (l^2 k\Phi) \Delta x \Delta t.$$

Analogamente per un elemento Δy si avrà in

$$(2) \quad \Delta'_1 m\Phi = -\rho \frac{\partial}{\partial x} (l^2 k\Phi) \Delta y \Delta t$$

la differenza tra le quantità $m\Phi$ che attraversano Δy nel verso x positivo e negativo rispettivamente.

Facciamo $\Phi = 1$; allora le precedenti diventano

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta_1' m &= -\rho \frac{\partial (l^2 k)}{\partial y} \Delta x \Delta t , \\ \Delta_1'' m &= -\rho \frac{\partial (l^2 k)}{\partial x} \Delta y \Delta t , \end{aligned}$$

e ci danno la differenza tra la massa che attraversa Δx (Δy) nel verso positivo delle y (x) e quella che transita in senso contrario.

Si presentano ora due possibilità : poichè la densità del fluido è supposta costante, l'agitazione turbolenta, come appare dalle (3), l'alterebbe se al trasporto continuo non si aggiunge un *trasporto continuo*, che interessa quindi tutta la massa del fluido. A priori questo campo di velocità - indichiamolo con \bar{u} , \bar{v} - può essere sia conglobato in u , v (che non sarebbe allora a divergenza nulla), oppure trattato distintamente come un trasporto continuo di massa senza effetti dinamici, tale cioè da chiudere il ciclo del mescolamento, iniziato dal trasporto discontinuo, nei puri riguardi cinematici della continuità della massa.

I casi particolari di turbolenza finora considerati, suggeriscono come più probabile - per non dire certa - la seconda impostazione. Adottiamola ; allora resta definito un campo di velocità \bar{u} , \bar{v} tale che sia nulla la differenza di massa che, per l'agitazione turbolenta e per questo conseguente trasporto continuo, attraversa nei due sensi sia Δx che Δy . Sarà perciò.

$$(4) \quad \bar{u} = \frac{\partial (l^2 k)}{\partial x} , \quad \bar{v} = \frac{\partial (l^2 k)}{\partial y} .$$

Ma per questo trasporto continuo attraverso Δx e Δy , e nel tempo Δt , passano rispettivamente di grandezza $m\Phi$ le quantità

$$\begin{aligned} \Delta_2' m\Phi &= \rho \frac{\partial (l^2 k)}{\partial y} \Phi \Delta x \Delta t , \\ \Delta_2'' m\Phi &= \rho \frac{\partial (l^2 k)}{\partial x} \Phi \Delta y \Delta t . \end{aligned}$$

Sommando con le corrispondenti (1), (2) avremo in definitiva che

$$(5) \quad \begin{aligned} \Delta' m\Phi &= -\rho l^2 k \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Delta x \Delta t, \\ \Delta'' m\Phi &= -\rho l^2 k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Delta y \Delta t, \end{aligned}$$

rappresentano le differenze complessive delle quantità di $m\Phi$ che attraversano nei due sensi Δx e Δy .

Consideriamo ora l'elemento d'area $\Delta x \cdot \Delta y$ (vale a dire il volume elementare di spigoli $\Delta x, \Delta y, 1$, che indicheremo con ΔS): dalle (5) scende allora che della grandezza $m\Phi$ esce da questo volume e nel tempo Δt , la quantità

$$(6) \quad \Delta m\Phi = -\rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(l^2 k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta t.$$

4. - EQUAZIONI DERIVATE DAL TEOREMA DELLA QUANTITÀ DI MOTO.

Facciamo $\Phi = u$: allora $m\Phi \equiv mu$ è una quantità di moto, e la (6) ci fornisce la quantità di moto trasportata fuori di ΔS dall'agitazione turbolenta. Per il campo di velocità u, v - nell'ipotesi della permanenza - esce inoltre da ΔS la quantità di moto (parallela ad x)

$$\rho \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \Delta t.$$

La forza che agisce su ΔS parallelamente a x è $-\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y$ (dove p è la pressione) per cui - teorema della quantità di moto proiettata su x - si avrà

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(l^2 k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

ed analogamente per l'asse y

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(l^2 k \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Ma u, v soddisfano all'equazione di continuità

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

cosicchè le precedenti equazioni si semplificano nelle

$$(8) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(l^2 k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$(9) \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(l^2 k \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

5. - EQUAZIONE DERIVATA DAL TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO.

Arriviamo ora al punto essenziale della presente teoria della turbolenza. Gli elementi materiali disgregati che operano il trasporto turbolento si trattano, si è già detto, come masse finite, cosicchè non agendo su essi forze alcune durante il loro trasferimento entro la massa fluida (ipotesi ovvia, che comunque serve a completare la definizione dinamica dell'agitazione turbolenta) conservano costante, non solo la quantità di moto, ma anche il momento baricentrale di quantità di moto, che poi cedono alla massa che li cattura. Nella realtà fisica forma e dimensioni di queste particelle saranno le più diverse; ma come si è già detto dianzi, motivi statistici consentono di ragionare come se fossero tutte eguali. Supponiamo che siano parallelepipedi con uno spigolo parallelo alla velocità (tale potrà senza dubbio essere supposta la loro configurazione media): c'interesserà introdurre solamente la dimensione ortogonale alla velocità; diciamola $\varepsilon = \text{cost.}$, e per brevità di riferimento indichiamo con P una particella fluida siffatta.

La relativa piccolezza di ogni P ci autorizza a supporre lineare la distribuzione della velocità secondo lo spigolo ε : completeremo questa ipotesi attribuendo a V' (derivata della velocità V secondo la direzione di ε) entro P , il valore che il vortice

$\omega = V'$ del movimento medio possiede nel baricentro di P . Allora il momento baricentrale di una P di massa m è

$$m \omega \frac{\varepsilon^2}{12},$$

e a norma della (6) sarà

$$-\rho \frac{\varepsilon^2}{12} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(l^2 k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta t$$

la differenza tra la somma del momento baricentrale (rispetto ad ogni P) di quantità di moto trasportato dall'agitazione turbolenta fuori del volume ΔS , e la somma di quello trasportato dentro.

Il campo di velocità u, v trasporta inoltre fuori di ΔS un ammontare pari a

$$\rho \frac{\varepsilon^2}{12} \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \Delta t$$

della stessa quantità; in totale dunque esce da ΔS nel tempo Δt una somma di momento baricentrale di quantità di moto uguale a

$$(10) \rho \frac{\varepsilon^2}{12} \left[u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(l^2 k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta t.$$

Ora, il moto effettivo della massa fluida risulta dalla composizione del moto medio u, v - che si può far coincidere con la velocità media baricentrale delle particelle P - con il movimento rotazionale interno ad ogni P .

Dalle equazioni (8), (9) - di tipo idrodinamico, anche nella deduzione concettuale -, risulta, come è noto, identicamente soddisfatto il teorema del momento della quantità di moto per la componente u, v del moto effettivo: basterà quindi applicare questo teorema solamente al moto rotazionale interno ad ogni P : ed allora, atteso il significato della quantità (10), si dovrà esigere che sulla massa ΔS sia applicata una coppia il cui momento $\rho \frac{\varepsilon^2}{12} \Gamma \Delta x \Delta y$ eguagli la (10) divisa per Δt .

Si ha così l'equazione

$$(11) \quad u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(r^k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r^k \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \Gamma.$$

Le ipotesi finora fatte sul meccanismo turbolento non sono sufficienti a stabilire l'origine fisica del momento (per unità di massa) $\varepsilon^2 \Gamma$; per cui, a definire Γ , occorre lasciarsi guidare dalle circostanze formali.

È chiaro anzitutto che $\Gamma \neq 0$ consegue esclusivamente all'agitazione turbolenta: se questa mancasse, la (11) sarebbe soddisfatta per $\Gamma = 0$. Inoltre, se il vortice ω fosse costante, il processo dinamico dell'agitazione turbolenta si esaurirebbe nelle equazioni (8), (9); perchè la cattura di una particella non provocherebbe variazioni nel momento di quantità di moto di ogni ΔS una volta egualizzate le velocità baricentrali (ciò che le (8) e (9) esprimono). Si conclude che $\Gamma \neq 0$ assieme con $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$. Come dipenda da queste due derivate non si può certo affermarlo se non a titolo ipotetico: la posizione da tentare è naturalmente la più semplice, e consiste nell'assumere Γ funzione lineare delle due anzidette derivate. Sostituendo nella (11) si ha infine

$$(12) \quad u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(r^k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r^k \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + a \frac{\partial \omega}{\partial x} + b \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

che aggiunta alle (7), (8), (9), completa il sistema differenziale dei moti piani turbolenti.

La definizione qui adottata per la Γ contiene in particolare quella già considerata nel caso di tubi e canali, e che ha dato luogo a conseguenze analitiche rispondenti alla realtà fisica. Si può inoltre osservare, per quanto riguarda il valore del ragionamento che definisce la Γ , che esso è, in sostanza, dello stesso tipo di quello con il quale nella teoria della viscosità si esprimono le tensioni viscosive come funzioni lineari delle derivate della velocità: nell'uno e nell'altro caso si tratta di una presunzione di dipendenza che è posta in equazione mantenendo, in uno sviluppo in serie, solamente i termini lineari.

L'equazione (12) deve inoltre essere invariante per rotazione degli assi: siccome il vortice ω lo è, occorre che i coefficienti a, b formino un sistema *cogrediente* alle coordinate; per cui

sono determinati in ogni sistema di assi, se sono assegnati con referenza ad uno di questi. Ora, è il trasporto ortogonale alla velocità che predomina nettamente nei riguardi dinamici: cosicchè a, b potranno essere definiti in ogni punto P così: si considerino in P le direzioni della velocità e la ortogonale a questa, che assumiamo come assi \bar{x}, \bar{y} rispettivamente; per la corrispondente determinazione \bar{a}, \bar{b} di a, b , si ha $\bar{a} = 0$.

Un'altra posizione ugualmente plausibile e poco diversa negli effetti quantitativi, si ha nella $\bar{a} = \bar{b}$. È ancora troppo presto per scegliere tra le due eventualità, perchè nei problemi finora considerati esse si equivalgono. Comunque sia, l'ulteriore determinazione di \bar{b} deve farsi, per ora, in sede di trattazione di ogni particolare problema: essa è $\neq 0$ e contiene a fattore una costante universale di turbolenza nel caso di moti che avvengono in presenza di pareti (tubi, canali); è invece $= 0$ a grande distanza da pareti rigide (problema asintotico della scia turbolenta).

PARTE II.

Problema della scia turbolenta.

Il problema particolare che prendo in esame in questa seconda parte è quello del moto (piano) d'un fluido dietro un ostacolo (cilindrico) rigido e fisso, con velocità costante all'infinito. È un problema, questo, che occupò sempre una posizione di primaria importanza nella ricerca idrodinamica, sia per il valore concreto che può acquistarne la soluzione nell'interpretare movimenti reali che appunto in tal forma si schematizzano, sia per la necessità di rimuovere dalla meccanica dei fluidi il noto paradosso di d'Alembert. Perciò avemmo la teoria della scia discontinua del Levi-Civita; le copiose ricerche di Oseen volte a trovare soluzioni esatte delle equazioni dei fluidi viscosi convenientemente ridotte; e la teoria delle schiere vorticosose di Karman.

La moderna idrodinamica (e più specialmente l'aerodinamica) s'orienta verso concezioni più aderenti alla realtà fisica di quanto non lo sieno gli schemi meccanici adottati nelle precedenti teorie: *in particolare è ormai pacifico il riconoscimento che quasi tutti*

i moti fluidi che si presentano effettivamente nel mondo reale, sono turbolenti; in particolare tale è il movimento dietro un ostacolo collocato in una corrente fluida.

Alla determinazione del campo di velocità nella scia applico le equazioni della teoria della turbolenza formulate nella prima parte; ma debbo subito avvertire che non risolvo, per ora, il problema totale, bensì quello asintotico: *determinazione della scia a grande distanza dell'ostacolo.*

Ecco le ragioni di questa restrizione: anzitutto le equazioni della turbolenza non sono lineari, cosicchè le conseguenti difficoltà analitiche non potranno essere eliminate se non istituendo un sistema di approssimazioni che le rendano lineari (al modo di Stokes e Oseen nella idrodinamica viscosa); e queste approssimazioni sono ovvie nel problema ristretto. Inoltre i problemi particolari che finora ho trattati mi conducono a differenziare il caso di moto in vicinanza di pareti, da quello in assenza (in regioni lontane da pareti rigide); e precisamente nei riguardi dei valori da attribuirsi ai coefficienti di turbolenza a, b , di modo che nei due casi si hanno sistemi differenziali diversi. Comincio perciò col problema enunciato.

1. - POSIZIONE DEL PROBLEMA ASINTOTICO.

Sia dunque un ostacolo cilindrico S immerso in una corrente fluida con velocità asintotica costante U , la cui direzione assumiamo come asse delle x . Supporremo che si abbia simmetria rispetto a quest'asse: ciò che avverrà quando è simmetrica la sezione del solido S . Limitiandoci a studiare la scia a grande distanza dal corpo che la crea è plausibile ammettere che la forma della sezione non influisca in modo diretto, ma solamente attraverso alla resistenza opposta alla corrente, che da tale sezione in particolare dipende. L'unico elemento determinante il campo di velocità dietro e a distanza dall'ostacolo S è dunque la resistenza offerta da questo; *cosicchè prescindendo da forma e grandezza di S , lo schematizzeremo addirittura con un punto collocato nell'origine degli assi*; la quale origine è perciò una singolarità nel campo del moto, la cui natura cinematica sarà definita più innanzi. Nei riguardi dinamici, O è il centro di produzione del-

l'agitazione turbolenta, che si propaga a valle (semiasse x positivo) mediante il meccanismo già definito del mescolamento di masse.

Dinnanzi all'ostacolo ($x < 0$) il moto è irrotazionale; mentre dietro ($x > 0$) la scia interessa una piccola regione attorno all'asse x : *vale a dire, per x molto grande lo spessore della regione nettamente turbolenta è piccolo di fronte a x* . Per facilitare l'espressione, chiameremo *scia* questa regione, di cui non occorre dare una definizione precisa quantitativamente, nella quale è localizzata la quasi totalità dell'agitazione turbolenta, benchè, a rigore, essa s'estenda a tutto il semipiano a valle di O .

A sufficiente distanza da O e per $x > 0$, all'esterno della scia la velocità differisce inapprezzabilmente dalla velocità asintotica U . Consideriamo allora due rette s, s' , parallele ad y e di ascisse $\mp x_0$ rispettivamente (x_0 molto grande): la s' attraversa la scia, e la velocità secondo x nei punti del segmento in comune con essa è inferiore ad U ; ne viene che se nella soluzione che si vuol costruire, ovunque fuori della scia si assume esattamente $= U$ la velocità, non è soddisfatto il principio di conservazione della massa, perchè la differenza tra le masse che attraversano s' ed s rispettivamente è < 0 . *Si ristabilisce l'equilibrio localizzando in O una sorgente positiva la cui portata eguagli quella differenza* (che come risulterà in seguito, dovrà essere assunta costante rispetto a x_0).

Il campo di velocità a valle di O risulta perciò dalla sovrapposizione di questi tre: un campo costante con velocità $= U$; quello prodotto, al modo noto, dalla sorgente O con portata Q ; un campo localizzato *quasi totalmente* nella scia, che determineremo solamente a distanza da O , caratterizzato qualitativamente dalla circostanza che attraverso ad ogni parallela ad y per $x > 0$, la massa trasportata per unità di tempo, nel verso negativo dell'asse x , è costante ed $= Q$. In quest'ultimo campo la velocità diventa infinita in O : *questa circostanza, assieme con la sorgente in O , definisce la singolarità cinematica adottata a rappresentare l'ostacolo*.

Indichiamo con $U, 0$; u_0, v_0 ; \bar{u}, \bar{v} , la velocità in ognuno di questi tre movimenti; sarà allora in tutto il campo del moto, fuori di O :

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= U + u_0 + \bar{v}, \\ v &= v_0 + \bar{u}, \end{aligned}$$

dove, indicando con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza da O , è

$$(2) \quad u_0 = \frac{Q}{2\pi r} \frac{x}{r}, \quad v_0 = \frac{Q}{2\pi r} \frac{y}{r};$$

mentre \bar{u}, \bar{v} sono nulli per $x < 0$, e per $x > 0$ hanno valori apprezzabili solamente dentro la scia.

L'indagine sperimentale della scia turbolenta conduce a questa constatazione: *oltre una certa distanza dall'ostacolo la pressione è costante*. Se si tien conto della circostanza che u_0, v_0 , per x grande, saranno piccoli di fronte a U , e che inoltre tendono a 0 per $r \rightarrow \infty$, si rispecchia quel risultato d'osservazione (in se stesso naturalmente approssimato) ammettendo che non solo esternamente alle scia, ma anche nel suo campo interno, la pressione sia quella che corrisponde alla sovrapposizione dei due primi movimenti base. Si ha dunque, a meno di una costante inessenziale

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{(U + u_0)^2}{2} + \frac{v_0^2}{2},$$

e trascurando i quadrati di u_0, v_0 ,

$$\frac{p}{\rho} = -Uu_0 = -\frac{UQ}{2\pi} \frac{x}{r^2}.$$

Ultima osservazione prima di addivenire al problema dinamico. Si consideri la circonferenza C di centro O e di raggio r molto grande: nel moto u_0, v_0 la velocità è costante ($= \frac{Q}{2\pi r}$) nei punti di C , e la portata (verso l'esterno di C) è $= Q$.

Consideriamo inoltre quel tratto C' di C che appartiene alla scia: per quanto si è detto, C' è una piccola frazione di C ; d'altronde la portata di \bar{u}, \bar{v} attraverso C' (verso l'interno di C) è ancora $= Q$. Si conclude che il valor medio della velocità di

\bar{u}, \bar{v} in C' è molto grande rispetto al valore $\frac{Q}{2\pi r}$ che ivi possiede la velocità di u_0, v_0 . Questa osservazione vale chiaramente, in generale, anche per i valori della velocità \bar{u}, \bar{v} in C' , i quali inoltre, tendendo essi a zero per $r \rightarrow \infty$, saranno da ritenersi di primo ordine di fronte ad U .

Concludendo questo esame preliminare delle approssimazioni suggerite dalla realtà fisica del problema, avremo in definitiva,

a) rispetto alla velocità asintotica U : u_0, v_0 ; \bar{u}, \bar{v} , sono quantità di primo ordine, di cui si trascurano quindi le combinazioni quadratiche;

b) dentro la scia: u_0, v_0 sono trascurabili di fronte a \bar{u}, \bar{v} ;

c) per x abbastanza grande si può assumere $p = \text{cost}$.

Questo criterio di approssimazione si completa con le osservazioni riguardanti l'importanza relativa delle operazioni di derivazione rapporto a x e a y . Orbene, non solo si è osservato che lo spessore della scia è piccolo di fronte alla distanza da O , ma anche che essa va allargandosi molto lentamente; talchè procedendo secondo x la situazione cinematica varia molto meno rapidamente che non nella direzione dell'asse y . È plausibile quindi ammettere che

d) le derivate (prime e seconde) rapporto ad x si trascurano dinanzi alle analoghe rapporto ad y .

2. - EQUAZIONI DIFFERENZIALI PEL LA COMPONENTE TURBOLENTA DEL MOVIMENTO NELLA SCIA.

Addivieniamo ora al problema dinamico, cominciando con l'applicare il teorema della quantità di moto proiettata secondo x alla regione compresa fra le due rette s, s' dianzi considerate (parallele all'asse y , e di ascisse $\mp x_0$ rispettivamente). Detta R la resistenza offerta dall'ostacolo per unità di lunghezza, avremo

$$\int_{(s')} u^2 dy - \int_{(s)} u^2 dy = \int_{(s)} \frac{p}{\rho} dy - \int_{(s')} \frac{p}{\rho} dy - \frac{R}{\rho}.$$

Per le (1), (2), (3), tenuto conto dei limiti di approssimazione adottati, la precedente diviene

$$\frac{2 U Q x_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x_0^2 + y^2} + 2 U \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} dy = \frac{U Q x_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x_0^2 + y^2} - \frac{R}{\rho},$$

e poichè la portata è definita dalla

$$Q = - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} dy,$$

a calcoli fatti si ottiene

$$(4) \quad U Q = \frac{R}{\rho},$$

che porge una relazione tra la resistenza e la portata della sorgente. Il sistema differenziale per le \bar{u} , \bar{v} scende per riduzione delle (7), (8), (9), (12) della Parte I, mediante le approssimazioni a , b , c , d ; in più occorre precisare la determinazione che acquista nel caso attuale il vettore di turbolenza a , b . Si possono istituire delle considerazioni - che non riporto non avendo esse carattere assolutamente rigoroso, pur possedendo un grado di probabilità che s'avvicina alla certezza - le quali indicano che $b \neq 0$ consegue necessariamente all'esistenza di pareti prossime alla regione considerata. L'inversione di questo risultato, per quanto anch'essa non rigorosa, è ugualmente probabile; cosicchè adottandola, poniamo $b = 0$, ed inoltre $a = 0$ in virtù dell'assunzione generale $\bar{a} = \bar{b}$ indicata alla fine della prima parte. Avremo in definitiva il sistema differenziale

$$(5) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$(6) \quad U \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

$$(7) \quad U \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)$$

$$(8) \quad U \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

dove

$$(9) \quad \bar{\omega} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}.$$

La soluzione da costruire deve rispecchiare i caratteri qualitativi che si riconoscono alla scia: si hanno perciò le condizioni

α) per $x \rightarrow \infty$, e per y qualunque, deve essere $\lim \bar{u} = \lim \bar{v} = 0$;

β) per $y \rightarrow \infty$, e per ogni x , si ha $\lim \bar{u} = \lim \bar{v} = 0$, nonchè devono tendere a zero le derivate prime e seconde di \bar{u} , \bar{v} ;

γ) $l^2 k$, per il suo significato meccanico, è finito in tutto il campo del moto;

δ) per $y = 0$ si ha $\bar{v} = 0$; e per $x = 0$ e $y \neq 0$: $\bar{u} = \bar{v} = 0$;

η) infine la soluzione deve essere simmetrica rispetto all'asse delle x .

Derivando le (6), (7), rispettivamente rapporto a y e x , e sottraendo, otteniamo

$$U \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(l^2 k \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right].$$

Uguagliando i secondi membri di questa e della (8) ed integrando su y , si ricava

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(l^2 k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(l^2 k \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = l^2 k \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + f(x).$$

Ora $f(x) = 0$ perchè (condizioni β e γ) tutti gli altri termini di questa equazione si annullano per $y \rightarrow \infty$; dopodichè esplicitando le derivate e riducendo si ottiene

$$(10) \quad \frac{\partial l^2 k}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial l^2 k}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0.$$

Derivando le (6), (7), rapporto a x e y rispettivamente, e sommando, si ha invece, tenuto conto dell'equazione di continuità,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial l^2 k}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial l^2 k}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] = 0$$

la quale integrata (la $f(x)$ d'integrazione è ancora nulla per le stesse ragioni di prima) conduce all'equazione

$$(11) \quad \frac{\partial l^2 k}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial l^2 k}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0.$$

Le (10) e (11) coesistono - per una soluzione non costante lungo y - solamente se sono nulle entrambe le derivate di $l^2 k$; cosicchè esse sono sostituite dalla

$$(12) \quad l^2 k = \text{costante}.$$

Dal confronto delle (5) e (6) si ricava intanto l'espressione di \bar{v} :

$$\bar{v} = - \frac{l^2 k}{U} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

purchè si osservi che la $\varphi(x)$, che a priori è possibile aggiungere, è = 0 per le condizioni poste per $y \rightarrow \infty$.

Si constata poi che la (7) è identicamente soddisfatta dal precedente valore di \bar{v} ; cosicchè il problema è ridotto alla determinazione della \bar{u} mediante l'equazione (6), la quale per la (12) diventa

$$(13) \quad \frac{U}{l^2 k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2},$$

ed è l'equazione parabolica della propagazione del calore.

La soluzione fondamentale della (13) è (¹)

(¹) GOURSAT, *Traité d'Analyse*, vol. III, p. 294.

$$(14) \quad \bar{u} = -\frac{\beta U}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{4\lambda x}}$$

dove si è posto $\lambda = \frac{l^2 k}{U}$, e β è una costante arbitraria: è *ri-marchevole che essa risolve il problema della scia turbolenta nel caso schematico qui considerato, in cui l'ostacolo è ridotto ad un punto nell'origine degli assi*. Infatti la funzione a secondo membro della (14) possiede gli assegnati requisiti di regolarità all'infinito, e nell'origine ha appunto la singolarità che venne precisata al numero precedente, mentre sull'asse y , fuori di 0, è nulla. Dalla teoria delle equazioni paraboliche risulta poi che una tale soluzione è unica.

Se ci si richiama alla possibilità di esprimere una generica soluzione della (13) mediante la soluzione fondamentale (14) ed i valori della \bar{u} su una curva assegnata, è prevedibile che in seguito si potrà tener effettivo conto della forma della sezione S dell'ostacolo. Non vale la pena di scrivere ora tale soluzione, che avrebbe un carattere puramente descrittivo fintantochè non è risolto quest'altro problema particolare: *determinazione del moto turbolento nell'intorno della parete dell'ostacolo*, dalla cui soluzione dipende la conoscenza del campo di velocità nella regione prossima ad S .

Va da se che, combinando additivamente soluzioni del tipo (14) - dove sia posto $x - \mu$, $y - \nu$ invece di x , y - si ottiene la soluzione asintotica della scia prodotta da più ostacoli cilindrici assimilabili, ciascuno, ad un punto.

3. - CONFERME SPERIMENTALI.

Il problema qui considerato fu oggetto da parte di SCHLICHTING ⁽¹⁾ di una trattazione sia sperimentale che teorica, sulla base dei metodi semiempirici indicati dal PRANDTL. Le sue misure con-

⁽¹⁾ *Ueber das ebene Windschattenproblem*, Ingenieur Archiv, Bd. 1. (1930), p. 533.

fermano con grande esattezza la proporzionalità di \bar{u} a $\frac{1}{\sqrt{x}}$,
 nonchè l'esistenza di una legge di similitudine per i profili della
 velocità \bar{u} parallelamente all'asse y , che è rilevabile nella (14).
 Infatti poniamo

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\lambda x}} :$$

allora

$$\bar{u} = -\frac{\beta U}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\eta^2}{4}} ;$$

cosicchè nella ordinata adimensionale η i valori della \bar{u} lungo
 ogni parallela ad y sono proporzionali.

Si ha tosto

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} dy = Q = 2\beta U \sqrt{\lambda} \sqrt{\pi} ,$$

per cui la (4) diviene

$$\frac{R}{\rho} = 2\beta U^2 \sqrt{\lambda} \sqrt{\pi} ;$$

d'altronde si conviene di porre (legge di resistenza quadratica)

$$R = \frac{\rho}{2} c_r d U^2 ,$$

dove d è la dimensione dell'ostacolo ortogonale alla velocità, e
 c_r è il coefficiente adimensionale di resistenza relativo alla se-
 zione S : si ha quindi la relazione

$$(15) \quad 2\beta \sqrt{\lambda} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} c_r d ,$$

che determina il prodotto $\beta \sqrt{\lambda}$.

Un'altra relazione si ricava dalla (14) valutata sull'asse x della scia: indicando con \bar{u}_0 il valore (assoluto) che ivi assume \bar{u} , si ha

$$(16) \quad \frac{\bar{u}_0}{U} = \frac{\beta}{\sqrt{x}}.$$

Introducendo le quantità adimensionali

$$x' = \frac{x}{c_r d}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{c_r d}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\sqrt{c_r d}},$$

le (15) e (16) diventano

$$(15') \quad \beta' \sqrt{\lambda'} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} = 0,14104\dots$$

$$(16') \quad \frac{\bar{u}_0}{U} = \frac{\beta'}{\sqrt{x'}}.$$

Dalle misure che SCHLICHTING giudica migliori si ricava

$$\beta' = 0,82,$$

a cui, per la (15'), corrisponde

$$\lambda' = 0,029587.$$

Un'altra determinazione sperimentale porta sul valore di $\frac{y}{\sqrt{\lambda x}}$ per il quale la velocità \bar{u} è ridotta a metà del suo valore massimo \bar{u}_0 . Dalla (14) si ricava

$$\left[\frac{y}{\sqrt{\lambda x}} \right]_{\frac{1}{2}} = 1,6651$$

ed introducendo il valore trovato di λ :

$$\frac{2 y_1}{c_r d} = 0,573 \sqrt{\frac{x}{c_r d}}.$$

SCHLICHTING trova sperimentalmente 0,553 per il coefficiente numerico : l'accordo è quindi ottimo.

È infine da menzionare che, per quanto la teoria qui istituita abbia teoricamente carattere asintotico, in realtà vale fino a breve distanza dell'ostacolo turbolenziatore: 5 - 10 diametri.
