RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO LEVI

Intorno alle varietà a tre dimensioni che rappresentano un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del 2° e del 3° ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 4 (1933), p. 27-37

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__27_0>

INTORNO ALLE VARIETÀ A TRE DIMENSIONI CHE RAPPRESENTANO UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL 2° E DEL 3° ORDINE

di UGO LEVI *a Saluzzo*

Dando uno sguardo agli studi finora svolti sulle varietà a più dimensioni, V_k, rappresentanti sistemi abbastanza ampi di equazioni alle derivate parziali di ordine qualunque (1), risulta subito come siano stati presi in considerazione solo quei casi in cui si considerano solo o superficie in relazione con equazioni alle derivate parziali di ordine qualunque, oppure V_k, varietà di dimensione qualunque $k \geq 2$, in relazione ad equazioni alle derivate parziali e esclusivamente del 2° ordine.

Il primo caso è stato considerato particolarmente dal BOMPIANI (2) ed in un caso particolare dal LANE (3) e dal BOWLES (4);

(1) È ben noto che cosa s'intenda con questa locuzione: se le coordinate proiettive di un punto che descrive la varietà a k dimensioni, V_k, sono date parametricamente come funzioni di k parametri indipendenti, si dice che la V_k rappresenta un'equazione differenziale lineare omogenea alle derivate parziali di ordine i, se le funzioni parametriche sono integrali di una tale equazione; la circostanza che i parametri sono indipendenti esclude senz'altro che sia $i = l$.

(2) E. BOMPIANI – *a) Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee.* (Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, vol. LII-1919).

b) Sulle superficie integrali di 2 o più equazioni lineari a derivate parziali del 3° ordine. (Annali di matematica, Serie 4ª - Tomo IX-1931).

c) Titolo come sopra. (Rendiconti Lincei, Serie 6ª, Vol. XIII-1931).

(3) V. LALAN – *Integral surfaces of pairs of partial differential equations of the third order.* (Trans. of the Am. Math. Society vol. 32-1930).

(4) F. BOWLES – *Integral surfaces of pairs of differential equations of the third order.* (Dissertation, The University Chicago Libraries, 1930).

il SEGRE [5] dapprima ed il TERRACINI [6] poi, si occuparono di V_k in generale rappresentanti solo equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine.

Il LALAN [7] ed il SISAM [8] si intrattengono in ispecial modo sulle V_3, varietà a tre dimensioni, collegate ad equazioni alle derivate parziali del 2° ordine.

Appunto allo studio delle varietà a tre dimensioni mi propongo di portare un modesto contributo con questo lavoro, nello svolgimento del quale studierò un caso essenzialmente nuovo rispetto ai precedenti, cioè il caso di una V_3 rappresentante tre sole equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del 2° ordine unitamente ad equazioni del 3° ordine, e precisamente (continuando ad usare la notazione introdotta dal BOMPIANI [9] per le superficie, secondo la quale con h_s si indica il numero delle equazioni linearmente indipendenti d'ordine s) studierò per le V_3 il caso $h_2 = 3$, $h_3 \leq 7$. Si comprende che, potendosi ritenere esaurito coi lavori prima citati, dal punto di vista che ci interessa, lo studio del caso di $h_2 > 3$ (indipendentemente dall'esistenza di ulteriori equazioni di ordine superiore al secondo), il primo caso nuovo sul quale fermare l'attenzione doveva essere quello di $h_2 = 3$. Quanto ai valori adottati per h_3, diciamo subito che, come apparirà in seguito, dall'ipotesi $h_2 = 3$, segue necessariamente $h_3 \geq 6$, d'altro lato $h_3 \leq 10$ ed anzi $h_3 < 10$, se si esclude che la V_3 giaccia per intero in un S_7, cosicchè i valori da studiare per h_3 sono $h_3 = 6$,

(5) C. SEGRE – a) *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi.* (Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXX-1910).

b) *Aggiunta alla memoria suddetta.* (Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXX-1910).

(6) A. TERRACINI – *Sulle V_k che rappresentano più di $\frac{k\,(k_2-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti.* (Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXX-1912).

(7) LALAN – *Sur les propriétés infinitésimales projectives des variétés à trois dimensions*, (Paris 1924).

(8) C. SISAM – *On three-spreads satisfying four or more homogeneous linear partial differential equations of the second order.* (American Journal of Mathematics, Vol. XXXIII-1911).

(9) BOMPIANI – Vedi loc. cit. (2) *a*).

7, 8, 9. I due primi sono appunto quelli presi in considerazione in questo lavoro e mi conducono a risultati semplici e precisi sulla natura della V_3 studiata.

I casi $h_3 = 8$, 9, non conducono certamente in generale a risultati altrettanto semplici: io ho intrapreso il loro studio in un caso particolarmente notevole di cui mi occuperò in un altro lavoro.

1. - Estendendo il concetto di coniche associate ad un sistema lineare di equazione alle derivate parziali del 2° ordine, introdotto dal Terracini ([10]), introduco il concetto di cubica associata ad un'equazione lineare alle derivate parziali del 3° ordine.

Sia una V_3 di S_n data mediante la rappresentazione parametrica

$$(1) \qquad x = x\,(u_1\, u_2\, u_3),$$

le x essendo coordinate proiettive omogenee di un punto nello S_n. Se essa V_3 rappresenta un'equazione lineare omogenea alle derivate parziali del 3° ordine ([11])

$$(2) \qquad a x + \sum_{i=1}^{3} a_i x^{(i)} + \sum_{i=j=1}^{3} a_{ij}\, x^{(ij)} + \sum_{i=j=k=1}^{3} a_{ijk}\, x^{(ijk)} = 0\,,$$

la rispettiva forma cubica associata nelle tre variabili omogenee $\theta_1\ \theta_2\ \theta_3$ sarà

$$f(\theta) = \sum a_{ijk}\, \theta_i \theta_j \theta_k\,.$$

Da questa, se si assumono le θ come coordinate proiettive omogenee di un punto in un piano eguagliando a zero la forma stessa, si ha la « *cubica associata* » a quella equazione alle derivate parziali del 3° ordine. Osserviamo a questo proposito ([12])

([10]) Terracini - *Alcune questioni sugli spazi tangenti ed osculatori ad una varietà.* Nota I^a (Reale Accademia delle Scienze di Torino, 1915-16).

([11]) Ho posto $x^i = \dfrac{\partial x}{\partial u_i}\,(i = 1, 2, 3)$, ecc.; nelle sommatorie i, j, k, variano da 1 a 3 ed i coefficienti sono funzioni di u_1, u_2, u_3.

([12]) La dimostrazione è simile a quella della nota del Terracini loc. cit. ([10]).

che i sistemi lineari di forme cubiche associate ai sistemi del 3° ordine rappresentati da una V_3, i cui punti si esprimano come funzioni di diversi sistemi di tre parametri, sono fra loro proiettivamente equivalenti.

2. – Introdotto così il concetto di sistema lineare di cubiche associate ad un sistema di equazioni alle derivate parziali del 3° ordine, passo allo studio di V_3 rappresentanti un sistema di tre equazioni alle derivate parziali del 2° ordine linearmente indipendenti senza alcuna limitazione sulla forma di esse, cioè V_3 per cui $h_2 = 3$.

Osserviamo subito che dalle tre equazioni del 2° ordine se se ricavano, per derivazione, varie, al massimo nove linearmente indipendenti, del terzo ordine. Anzi, anche se vi sono altre equazioni del 3° ordine, possiamo limitarci a studiare il caso in cui $h_3 \leq 9$. Invero è noto che se una V_k è tale che tutti i derivati d'ordine r, del suo punto variabile x, sono esprimibili come combinazioni lineari dei derivati di ordine inferiore, *la V_k giace nello spazio $(r-1)$ - osculatore in un suo punto generico.* Perciò, se per una V_3 è $h_3 = 10$, posso senz'altro concludere che *essa V_3 giace tutta in un $S(2)$ in un suo punto generico.*

Supponiamo dunque $h_3 \leq 9$; vediamo d'altra parte quale sia il minimo possibile per la dimensione i di Σ_i, se con Σ_i chiamiamo il sistema lineare delle cubiche associate alle equazioni del 3° ordine, ottenute per derivazione dalle tre equazioni del 2° ordine rappresentanti la V_3, oppure comunque date a priori. Il sistema Σ_i contiene tutte le cubiche che si ottengono associando una retta arbitraria (in tutti i modi possibili) ad ogni conica di di una rete R (rete associata al sistema delle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine). Perciò il sistema Σ_i delle cubiche associate alle equazioni alle derivate parziali del 3° ordine è tale che, data una retta r ad arbitrio, esiste in esso un sistema (almeno) ∞^2 di cubiche contenenti r; esiste cioè un sistema lineare almeno ∞^2 comune a Σ_i ed al sistema lineare ∞^5 di tutte le cubiche contenenti r. Per apolarità e dualità si ha che il sistema Σ_i si muta in un sistema lineare Σ_{8-i} tale che, preso ad arbitrio un punto P, esiste un sistema lineare (al massimo) ∞^6 di cubiche, che chiamo Σ_6, contenente oltre a Σ_{8-i} il sistema lineare ∞^3, che chiamo Σ_3, di tutte le cubiche aventi P per punto triplo. Perciò se $8-i \geq 3$ (ovvero $i \leq 5$) esso e Σ_3 hanno almeno una cubica in comune, anzi ne hanno almeno ∞^{5-1}; cioè in Σ_{8-i} vi sono almeno ∞^{5-i} cubiche che hanno un punto triplo in ogni punto P generico prefissato. In altre parole, se $i \leq 5$ i punti tripli generici devono imporre alle curve del sistema Σ_{8-i} solo tre condizioni linearmente indipendenti al massimo (mentre in generale i punti tripli generici impongono sei condizioni linearmente indipendenti).

Ora un sistema lineare ∞^3, od a priori eventualmente più ampio, di cubiche, tale che un punto triplo in posizione generica imponga alle curve del sistema solo tre condizioni linearmente indipendenti (al massimo), è necessariamente costituito da cubiche contenenti un punto triplo fisso; esso è quindi un sistema ∞^3 e non più ampio. Potendomi, infatti, ridurre al caso in cui il sistema è ∞^3 (se fosse più ampio comincerei col prendere in esso un sistema lineare ∞^3), dimostro che la cubica generica del sistema è riducibile: infatti, se la curva generica fosse irriducibile, segando il sistema con una cubica Γ del sistema stesso, troverei una serie lineare g^2 tale che, fissato un punto P ad arbitrio, esisterebbe nella g^2 un gruppo contenente il punto P contato tre volte, il che è impossibile.

Quindi le cubiche del sistema lineare essendo tutte riducibili ([13]):

1°) o hanno in comune una conica fissa,

2°) o hanno in comune una retta fissa,

3°) o sono costituite da tre rette per un punto fisso.

Il 1° caso non è possibile (giacchè il sistema avrebbe dimensioni due al massimo) e neppure il 2°, giacchè, chiamata r la retta fissa e preso un punto P fuori di r, non esiste certamente nessuna conica che con r costituisca una cubica avente in P un punto triplo. Quindi l'unico caso possibile è il 3°. Se la dimensione di Σ_{8-i} è ≥ 3 essa è dunque precisamente 3.

Ritraducendo per apolarità e dualità si ha che se $i \leq 5$ è

([13]) Bertini – *Introduzione alla Geometria proiettiva degli Iperspazi.* (2ª Edizione, Capitolo 10° n. 13 - Pagina 274).

$i=5$; la dimensione del sistema lineare Σ_i non può abbassarsi al di sotto di 5. Concludiamo dunque dicendo che $h_3 \geq 6$, cioè il numero delle equazioni alle derivate parziali del 3° ordine linearmente indipendenti nella nostra ipotesi è ≥ 6.

Riprendendo la trattazione iniziale, le V_3 con $h_2 = 3$, che sono da studiare, sono quelle per cui $6 \leq h_3 \leq 9$.

3. – Il caso estremo $h_2 = 3$, $h_3 = 6$ si esaurisce rapidamente.

In tal caso Σ_i, secondo la trattazione del numero 1, è costituito dalle cubiche contenenti come parte una retta fissa, la quale retta, entrando a comporre le cubiche costituite da una retta arbitraria del piano insieme con una conica arbitraria della rete R (rete associata al sistema delle equazioni alle derivate parziale del 2° ordine), entra come componente di tutte le coniche della rete R, cioè la rete R ammette una retta componente fissa.

Tenendo conto di questa particolarità, possiamo affermare (14) che la V_3 è una rigata sviluppabile. Ma una V_3 sviluppabile rappresenta almeno 4 equazioni di LAPLACE a meno che non sia un cono (15); ora, siccome la V_3 rappresenta solo tre equazioni di LAPLACE, possiamo concludere che, *se $h_2 = 3$ ed $h_3 = 6$ la V_3 è un cono proiettante da un punto una superficie che non rappresenta nessuna equazione nè del 2° nè del 3° ordine.*

4. - Il primo caso interessante da studiare è dunque il successivo $h_2 = 3$ ed $h_3 = 7$.

Anzi, se escludiamo senz'altro le V_3, che sono coni proiettanti da un punto una superficie rappresentante una sola equazione del 3° ordine, possiamo supporre che le equazioni del 3° ordine rappresentate dalla V_3 provengano tutte per derivazione da quelle del 2° ordine.

Se $h_3 = 7$, dico che o la V_3 è una ∞^1 di piani, oppure la rete R delle coniche associate alle equazioni alle derivate parziali

(14) TERRACINI – *Esposizione di alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale negli iperspazi.* Appendice III alla *Geometria proiettiva differenziale di* FUBINI e ČECH, (Bologna 1926); v. il § 5, n. 11.

(15) TERRACINI, loc. cit. (6) n. 4.

del 2° ordine rappresentate dalla V_3 ha tre punti base eventualmente non tutti distinti.

Distinguiamo infatti riguardo alla rete R, che riguardiamo come individuata da tre coniche $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, le seguenti eventualità:

a) essa ammette una retta componente fissa: si ricade nel caso già considerato di un cono.

b) essa è di grado zero: cosicchè le sue coniche si spezzano in coppie di rette appartenenti ad un fascio fisso ([16]): ne segue che la V_3 è una ∞^1 di piani; effettivamente una generica ∞^1 di piani corrisponde all'ipotesi $h_2 = 3$ ed $h_3 = 7$.

c) essa è di grado maggiore di zero.

In quest' ultima eventualità, scriviamo allora le due relazioni linearmente indipendenti che certamente intercedono fra le nove forme cubiche $\theta_1 A$, $\theta_2 A$, $\theta_3 A$, $\theta_1 B$, $\theta_2 B$, $\theta_3 B$, $\theta_1 C$, $\theta_2 C$, $\theta_3 C$, sotto la forma:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
&A\,(l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + l_3\theta_3) + B\,(m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + m_3\theta_3) + \\
&\qquad + C\,(n_1\theta_1 + n_2\theta_2 + n_3\theta_3) = 0 \\
&A\,(\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3) + B\,(\mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3) + \\
&\qquad + C\,(\nu_1\theta_2 + \nu_2\theta_2 + \nu_3\theta_3) = 0
\end{aligned}
$$

donde si trae che è identicamente:

$$
(4) \qquad A : B : C =
$$

$$
= \left\| \begin{matrix} l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + l_3\theta_3 & m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + m_3\theta_3 & n_1\theta_1 + n_2\theta_2 + n_3\theta_3 \\ \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 & \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3 & \nu_1\theta_1 + \nu_2\theta_2 + \nu_3\theta_3 \end{matrix} \right\| .
$$

Ora la trasformazione fra il piano delle θ ed un nuovo piano θ',

([16]) TERRACINI, loc. cit. ([10]).

definita dalle $\theta_1' : \theta_2' : \theta_3' = A : B : C$, è una trasformazione cremoniana quadratica non certo degenere, ottenuta facendo corrispondere ad un punto di un piano il punto intersezione delle due rette che nell'altro piano gli corrispondono in due determinate reciprocità. Perciò la retta R è omaloidica. Relativamente al caso c) proseguirò lo studio mettendomi nella ipotesi più generale, che cioè i tre punti base della rete R siano distinti.

Se i tre punti sono distinti, considero le tre rette che essi individuano a due a due; siano $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ le loro equazioni in notazione abbreviata. Le equazioni delle tre coniche associate alle tre equazioni del 2° ordine saranno:

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha_2 \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 = 0 \end{cases} .$$

Seguendo le notazioni del Terracini ([17]) considero i seguenti tre operatori differenziali

$$A_l = \Sigma a_{li} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (l = 1,\ 2,\ 3).$$

Mediante tali operatori le tre equazioni alle derivate parziali del 2° ordine si possono porre sotto la forma:

$$(6) \qquad \begin{cases} A_2 A_3 x \smile 0 \\ A_1 A_3 x \smile 0 \\ A_1 A_2 x \smile 0 \end{cases}$$

ove il segno $\smile$ sta ad indicare che il primo membro differisce da zero per una espressione lineare in x e nelle sue derivate prime, la cui forma effettiva si trascura. Sarà dunque:

([17]) Terracini, loc. cit. ([10]), n. 10.

$$\alpha_l = a_{l1}\,\theta_1 + a_{l2}\,\theta_2 + a_{l3}\,\theta_3 \qquad (l = 1,\ 2,\ 3).$$

Dalle tre equazioni (6) ne deduco altre (seguendo il metodo esposto nella suddetta nota del TERRACINI) aventi forme associate che devono essere combinazione lineari di $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2$; precisamente, applicando alla $A_m A_l x \sim 0$ scelta fra le (6) l'operatore A_n ed alla $A_n A_l x \sim 0$ sempre delle (6) l'operatore A_m e sottraendo, ho, a riduzioni fatte, una nuova equazione ove le derivate terze si elidono, cioè una equazione avente come forma quadratica associata la

$$\alpha_l\,\Phi_{mn} + \gamma_{lm}\,\alpha_n - \gamma_{ln}\,\alpha_m \qquad (l \neq m \neq n\,;\ l,\ m,\ n = 1,\ 2,\ 3)$$

ove si è posto

$$\Phi_{mn} = \varphi_{mn1}\,\theta_1 + \varphi_{mn2}\,\theta_2 + \varphi_{mn3}\,\theta_3$$

$$\gamma_{mn} = g_{mn1}\,\theta_1 + g_{mn2}\,\theta_2 + g_{mn3}\,\theta_3$$

$$\varphi_{mnt} = \sum_t \left(a_{nt}\,a^{(t)}_{ms} - a_{mt}\,a^{(t)}_{ns}\right) \qquad (t = 1,\ 2,\ 3)$$

e le g_{lm1}, g_{lm2}, g_{lm3}, sono i coefficienti delle derivate prime in quella fra le (6) che è data da $A_l A_m x \sim 0$. Considero ad esempio la forma:

$$\alpha_1\,\Phi_{23} + \alpha_3\,\gamma_{12} - \alpha_2\,\gamma_{13}\,;$$

dovendo essa risultare combinazione lineare di $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2$, ne viene che, se immagino ciascuna delle Φ_{mn} e γ_{mn} espressa come combinazione lineare delle α_1, α_2, α_3, (il che è sempre possibile) nel modo seguente:

$$\Phi_{mn} = \varphi^{(mn1)}\,\alpha_1 + \varphi^{(mn2)}\,\alpha_2 + \varphi^{(mn3)}\,\alpha_3$$

$$\gamma_{mn} = g^{(mn1)}\,\alpha_1 + g^{mn2}\,\alpha_2 + g^{(mn3)}\,\alpha_3\,,$$

deve essere $\varphi^{231} = 0$, $g^{123} = 0$, $g^{132} = 0$. Perciò Φ_{23} è combinazione lineare delle sole α_2, α_3, ed analogamente Φ_{13} e Φ_{12} saranno combinazioni rispettivamente di α_1, α_3, ed α_1, α_2. Anche γ_{23} è combinazione delle sole α_2, α_3, e così γ_{13} e γ_{12} saranno combinazioni rispettivamente di α_1, α_3 ed α_1, α_2.

Adunque ciascuno dei tre sistemi del primo ordine nelle funzioni incognite F_1, F_2, F_3

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} A_2 F_1 = 0 \\ A_3 F_1 = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A_1 F_2 = 0 \\ A_3 F_2 = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A_1 F_3 = 0 \\ A_2 F_3 = 0 \end{array}\right.$$

è completo. Chiamando rispettivamente v_1, v_2, v_3 tre loro integrali, funzionalmente indipendenti, facciamo il cambiamento di variabili

$$v_1 = v_1(u_1 u_2 u_3) \qquad v_2 = v_2(u_1 u_2 u_3) \qquad v_3 = v_3(u_1 u_2 u_3).$$

Allora le tre equazioni (6) scritte nelle nuove variabili (alle quali estendiamo le notazioni sinora usate) diventano:

$$(8) \qquad \left\{\begin{array}{l} x^{(23)} = \qquad\qquad\quad g_{232}\, x^{(2)} + g_{233}\, x^{(3)} \\ x^{(13)} = g_{131}\, x^{(1)} + \qquad\qquad\quad + g_{133}\, x^{(3)} \\ x^{(12)} = g_{121}\, x^{(1)} + g_{122}\, x^{(2)} \end{array}\right.$$

dove nei secondi membri abbiamo tenuto conto delle condizioni trovate per le g_{lmr} e dove siamo passati a coordinate non omogenee (per mandare a zero i coefficenti della x).

Il sistema (8) è di quelli ampiamente studiati dal Darboux nelle sue *Leçons sur la Théorie générale des surfaces* (tomo 4° n. 1093) e la V_3 che lo rappresenta si può dunque chiamare V_3 di Darboux; essa si può definire come V_3 rappresentante tre sole equazioni di Laplace linearmente indipendenti e contenente tre sistemi ∞^1 di superficie, tali che i piani tangenti alla superficie di un sistema nei punti della linea intersezione di due superficie dei rimanenti due sistemi costituiscono una sviluppabile ordinaria (eventualmente degenere).

Concludiamo dunque che, *se una V_3 rappresenta un sistema* *di equazioni lineari alle derivate parziali con* $h_2 = 3$, *è necessariamente* $h_3 \geq 6$. *Se* $h_3 = 6$ *la* V_3 *è un cono proiettante da un punto una superficie che non rappresenta nessuna equazione nè del 2° nè del 3° ordine. Se* $h_3 = 7$, *la* V_3 *o è un cono proiettante da un punto una superficie rappresentante una equazione del 3° ordine, o è una generica* ∞^1 *di piani, od infine è una* V_3 *per la quale la rete delle coniche associate alle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine da essa rappresentate è una rete omaloidica: più precisamente, nel caso generale in cui questa rete omaloidica ha tre punti base distinti, la* V_3 *è necessariamente una* V_3 *di* DARBOUX.