RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

AMBROGIO LONGHI

Un teorema di geometria numerativa concernente le serie di gruppi di punti sopra una curva algebrica. Applicazioni varie alle curve di ogni spazio

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 4 (1933), p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__1_0>

UN TEOREMA DI GEOMETRIA NUMERATIVA CONCERNENTE LE SERIE DI GRUPPI DI PUNTI SOPRA UNA CURVA ALGEBRICA. APPLICAZIONI VARIE ALLE CURVE DI OGNI SPAZIO.

Di Ambrogio Longhi, *a Lugano*

Sunto. - Data, sopra una curva algebrica, una serie costituita da gruppi di punti equivalenti, si determina il numero, finito sotto certe condizioni, delle terne di punti dotate della proprietà che due punti qualunque di ogni terna appartengono insieme, e con una stessa multiplicità prefissata, ad un gruppo della serie: completato da altri punti indeterminati, ma con le rispettive multiplicità pure prestabilite.

Come applicazione: risultati varii di geometria numerativa per le curve algebriche.

1. - Sia Φ, in uno spazio lineare S_r ad r dimensioni, un sistema algebrico ∞^k, con $k > 1$, di ipersuperficie dello stesso ordine m, fra le quali ne esistano sempre λ passanti per k punti di S_r assegnati genericamente.

Sia poi ν il numero dei punti mobili in cui una ipersuperficie variabile di Φ incontra una data curva Γ: irriducibile, di ordine n, di genere p, appartenente o no ad S_r e non contenuta in alcuna ipersuperficie di Φ.

Se q è il numero dei punti di Γ situati sulla varietà base di Φ, si ha:

$$\nu = mn - q . \tag{1}$$

Affinchè una ipersuperficie W di Φ possa avere con Γ (in punti variabili assieme a W) $t+2$ contatti (con $t \geq 1$), dei quali due di ordine $\mu - 1 \geq 0$ entrambi (per *contatto d'ordine zero* tra Γ e W intendendosi un semplice incontro) e gli altri di rispettivi ordini $\nu_i - 1 \geq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, dev' essere:

$$(2) \qquad \nu \geq 2\mu + \sum_{i=1}^{i=t} \nu_i .$$

Perchè poi esista in Φ tutto un sistema Φ', semplicemente infinito, di ipersuperficie come la W, occorre che sia:

$$(3) \qquad k - 2(\mu - 1) - \sum_{i=1}^{i=t} (\nu_i - 1) = 1 ,$$

e quindi, per la (2):

$$t \leq \nu - k - 1 .$$

Come conseguenza della (3), e dell' ipotesi $\nu_i - 1 \geq 1$, si ha pure:

$$\mu \leq \frac{1}{2}(k - t + 1) .$$

Si supponga ora $\mu > 1$ e $\nu_i \neq \mu$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$.

I punti M ed M', in ciascun dei quali una ipersuperficie variabile W, del sistema Φ', ha con Γ un contatto d'ordine $\mu - 1$, descrivono su Γ due punteggiate in corrispondenza simmetrica: dato M, il numero ξ degli omologhi M' è uguale a quello delle ipersuperficie di Φ aventi con Γ un contatto d'ordine $\mu - 1$ in M, e altrove (in punti indeterminati) t contatti di ordini $\nu_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ nonchè un ulteriore contatto di ordine $\mu - 1$.

Se la curva Γ è priva di punti multipli non ordinarï, e i t numeri ν_i si suddividono in τ gruppi $(\tau \leq t)$, rispettivamente di α_1, di $\alpha_2, \ldots,$ e di α_τ numeri, così che quelli di uno stesso gruppo siano tutti eguali fra di loro (ma diversi dai rimanenti), da una formula di Jonquières [1] si può dedurre:

$$(4) \qquad \xi = \lambda\mu \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \cdot \sum_{i=0}^{i=t+1} (t-i+1)!\, i!\, s_i \binom{x-i}{t-i+1} \binom{p}{i},$$

ove:

$$(5) \qquad x = mn - q - \mu - (\mu - 1) - \sum_{i=1}^{i=t} (\nu_i - 1),$$

mentre $s_0 = 1$ ed $s_i\, (i = 1, 2, \ldots, t+1)$ è la somma dei prodotti ad i ad i dei numeri $\mu - 1$, $\nu_1 - 1$, $\nu_2 - 1, \ldots, \nu_t - 1$.

Quando ha luogo una coincidenza fra due punti M ed M', omologhi nel sistema simmetrico (ξ, ξ), la relativa ipersuperficie di Φ viene ad avere con la curva Γ (in $M \equiv M'$) un contatto di ordine $2\mu - 1$, oltre ai t contatti di ordini $\nu_i - 1$. Il numero θ delle ipersuperficie di Φ, per le quali ciò si verifica, è calcolabile mediante la stessa formula di Jonquières, e indicando con $\overline{s}_i\, (i = 1, 2, \ldots, t+1)$ la somma dei prodotti ad i ad i dei numeri $2\mu - 1$, $\nu_1 - 1$, $\nu_2 - 1, \ldots, \nu_t - 1$, si trova:

$$\theta = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2\lambda\mu \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \cdot \sum_{i=0}^{i=t+1} (t-i+1)!\, i!\, \overline{s}_i \binom{\overline{x}-i}{t-i+1} \binom{p}{i},$$

ove $\overline{s}_0 = 1$ e:

$$\overline{x} = mn - q - (2\mu - 1) - \sum_{i=1}^{i=t} (\nu_i - 1) = x,$$

mentre $\varepsilon = 1$ se $\nu_i \neq 2\mu\ (i = 1, 2, \ldots, t)$, ed $\varepsilon = \alpha_h + 1$ se fra i numeri ν_i ve ne sono $\alpha_h\ (0 < h \leq \tau)$ eguali a 2μ.

(1) E. De Jonquières, *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque...* (Journal für Math., 66, 1866).

Sulla formula di De Jonquières vedasi anche: H. G. Zeuthen, *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie* (Leipzig und Berlin, 1914), p. 246; F. Severi, *Trattato di geometria algebrica*, Vol. I, Parte I (Bologna, 1926), p. 243. R. Torelli, *Dimostrazione di una formula di De Jonquières e suo significato geometrico* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 21, 1906) *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Accademia di Torino, 42, 1907) n. 1, ultima nota.

Segue che in ogni caso esistono $\varepsilon\theta$ elementi uniti per la corrispondenza simmetrica (ξ, ξ). Se quindi ω ne è la valenza ([2]), si avrà:

$$2\xi + 2\omega p = \varepsilon\theta,$$

donde si ricava:

$$(6) \quad \omega p = \lambda\mu \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \cdot \sum_{i=0}^{i=t+1} (t-i+1)! \, i! \, (\overline{s}_i - s_i) \binom{x-i}{t-i+1} \binom{p}{i}.$$

Ora, tenendo conto delle (1) e (3), la (5) si può scrivere:

$$x = \nu - k.$$

Introducendo poi la somma σ_h dei prodotti ad h ad h dei t numeri $\nu_i - 1$, si ha:

$$s_i = \sigma_i + (\mu - 1)\,\sigma_{i-1},$$

$$\overline{s}_i = \sigma_i + (2\mu - 1)\,\sigma_{i-1}$$

per $i = 0, 1, \ldots, t+1$, purchè si convenga di porre: $\sigma_{-1} = = \sigma_{t+1} = 0$ e $\sigma_0 = 1$.

Dopo ciò, mediante ovvie sostituzioni e trasformazioni, la (6) diviene:

$$(6') \quad \omega p = p\lambda\mu^2 \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \cdot \sum_{i=0}^{i=t} (t-i)! \, i! \, \sigma_i \binom{\nu-k-i-1}{t-i} \binom{p-1}{i},$$

mentre la (4) si riduce a:

$$(4') \quad \begin{aligned} \xi = \omega p + \lambda\mu \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \times \\ \times \sum_{i=0}^{i=t+1} (t-i+1)! \, i! \, (\sigma_i - \sigma_{i-1}) \binom{\nu-k-i}{t-i+1} \binom{p}{i}. \end{aligned}$$

([2]) Che la corrispondenza considerata non sia *singolare* (cioè possegga una valenza) si può desumere, ad esempio, dalla Memoria: A. HURWITZ, Se infine si considerano, per la corrispondenza (ξ, ξ) fra i punti M ed M', i *gruppi ciclici di 3° ordine*, si ha (³) che il loro numero è in generale:

$$2\binom{\xi}{3}+2\binom{\omega}{3}p-(\xi-\omega)\,\omega p\,, \tag{7}$$

con ξ ed ω definiti dalle formule (4') e (6').

Tale è quindi *il numero delle terne di punti distinti, della curva Γ, caratterizzate dalla proprietà che per due qualunque punti di ogni terna passa una ipersuperficie, del sistema Φ, avente con Γ (fuori della eventuale varietà base di Φ) un incontro μ-punto in ciascuno di essi e t contatti rispettivamente ν_1-punto, ν_2-punto, ..., ν_t-punto in altri t punti indeterminati.*

Generalmente l' ipersuperficie suddetta varia da coppia a coppia di punti della terna; solo quando è $\mu=2$ e insieme:

$$\nu-2\mu-\sum_{i=1}^{i=t}\nu_i \geq 2\,,$$

ossia, per la (3):

$$t \leq \nu-k-3\,,$$

essa è la medesima per tutte e tre le coppie di punti di certe terne: il cui numero x è pure quello delle ipersuperficie di Φ aventi ciascuna con Γ tre contatti semplici e t ulteriori contatti di rispettivi ordini ν_i-1 (con $\nu_i>2$).

Mediante la formula di Jonquières, si trova:

$$x=\frac{4\lambda}{3}\cdot\frac{\nu_1\nu_2\ldots\nu_t}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\tau!}\cdot\sum_{i=0}^{i=t+3}(t-i+3)\,!\,i\,!\,s_i'\binom{\nu-k-i}{t-i+3}\binom{p}{i},$$

Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip [Math. Annalen, 28, 1887; oppure: Math. Werke, Bd. I (Basel, 1932), p. 163].

(³) A. Longhi, *Sui gruppi ciclici di terzo ordine*... (Boll. Unione Mat. Italiana, XI, 1932), n. 4.

ove $s'_0 = 1$ ed s'_i $(i = 1, 2, \ldots, t+3)$ indica la somma dei prodotti ad i ad i dei $t+3$ numeri: $1, 1, 1, \nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \ldots, \nu_t - 1$. È quindi sempre:

$$s'_i = \sigma_i + 3\sigma_{i-1} + 3\sigma_{i-2} + \sigma_{i-3},$$

il simbolo σ_h avendo il significato già attribuitogli se $h = -1, 0, 1, \ldots, t+1$, e supponendo $\sigma_h = 0$ quando $h = -2, -3, t+2, t+3$.

Si è fin qui ritenuto $\mu > 1$: quando $\mu = 1$, è necessario anzitutto ammettere che sia:

$$\nu - 2\mu - \sum_{i=0}^{i=t} \nu_i = 0,$$

cioè, per la (3), $t = \nu - k - 1$ affinchè la corrispondenza prima considerata, sulla curva Γ, fra i punti M ed M' non possegga infinite *terne cicliche.*

L'indice ξ_1 di tale corrispondenza, simmetrica, è ora eguale al numero delle ipersuperficie, del sistema Φ, passanti per un punto prefissato di Γ e aventi altrove, con questa curva, t contatti di ordini $\nu_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t$ Si ha quindi:

$$\xi_1 = \lambda \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_\tau !} \cdot \sum_{i=0}^{i=t} (t-i)!\, i!\, \sigma_i \binom{x_1 - i}{t - i} \binom{p}{i},$$

con:

$$x_1 = mn - q - 1 - \sum_{i=1}^{i=t} (\nu_i - 1),$$

cioè:

$$x_1 = \nu - k,$$

come risulta dalla (1) e (postovi $\mu = 1$) dalla (3).

Se infine è ω_1 la valenza del sistema simmetrico (ξ_1, ξ_1), con procedimento simile all'altro seguito nel caso $\mu > 1$, si trova:

$$\omega_1 p = \lambda \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_\tau !} \cdot \sum_{i=1}^{i=t+1} (\nu - k - i)!\, i!\, \sigma_{i-1} \binom{p}{i}.$$

Poichè i valori di ξ_1 e di $\omega_1 p$ coincidono (come è agevole verificare) con quelli dati per ξ e per ωp, quando $\mu = 1$ e $t = \nu - k - 1$, dalle formule (4) e (6), si conclude che anche in tal caso il numero delle terne cicliche per la corrispondenza fra i punti M ed M', di Γ, è dato dalla (7).

2. – Da quanto precede (n. 1) si desume senz'altro il seguente teorema:

Sopra una curva Γ irriducibile, di genere p e appartenente ad uno spazio qualunque [4], *sia data una serie algebrica S di gruppi di punti equivalenti* [5]*: d'indice $\lambda \geq 1$, di dimensione $k > 1$, d'ordine $\nu > k + 1$, priva di punti fissi e non composta mediante una involuzione.*

Supposta la curva Γ senza altre singolarità che punti multipli ordinarî e iperpiani stazionarî ordinarî, si prefissino (il che è sempre possibile) un numero intero $\mu > 0$ ed altri t numeri interi $\nu_i > 1$ ($t \geq 1$; $i = 1, 2, \ldots, t$), in modo da verificare le condizioni:

$$t < k, \quad t < \nu - k, \quad \mu \leq \frac{1}{2}(k - t + 1), \quad \sum_{i=1}^{i=t} (\nu_i - 1) = k - 2\mu + 1.$$

I t numeri ν_i si suddivano in τ gruppi ($\tau \leq t$), rispettivamente di α_1, di $\alpha_2, \ldots$, e di α_τ numeri, così che quelli di uno stesso gruppo siano tutti eguali fra di loro, ma diversi dai rimanenti.

Si ponga infine:

$$\eta = \lambda\mu \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \cdot \sum_{i=0}^{i=t+1} (t - i + 1)!\, i!\, (\sigma_i - \sigma_{i-1}) \binom{\nu - k - i}{t - i + 1} \binom{p}{i}$$

e:

$$\omega = \lambda\mu^2 \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \cdot \sum_{i=0}^{i=t} (t - i)!\, i!\, \sigma_i \binom{\nu - k - i - 1}{t - i} \binom{p - 1}{i},$$

[4] Il teorema vale quindi anche se Γ è una retta.

[5] Cioè: *una serie S lineare o totalmente contenuta in una lineare.* Per ogni serie come la S valgono infatti tutte le considerazioni svolte nel n. 1 in ordine alla serie staccata su Γ dal sistema Φ: cfr. R. Torelli, nota [1], ultima citazione.

convenendo che σ_h *è nullo quando* $h < 0$ *oppure* $h > t$, *mentre vale* 1 *se* $h = 0$, *e vale la somma dei prodotti ad* h *ad* h *dei numeri* $\nu_1 - 1, \ \nu_2 - 1, \ldots, \nu_t - 1$ *quando* $h = 1, 2, \ldots, t$.

Se allora ogni numero ν_i *è diverso da* μ, *ed è* $t = \nu - k - 1$ *quando* $\mu = 1$, *sulla curva* Γ *esistono generalmente:*

$$2\binom{\eta + \omega p}{3} + 2\binom{\omega}{3} p - (\eta + \omega p - \omega)\, \omega p$$

terne di punti distinti, caratterizzate dalla proprietà che due punti qualsiansi di ogni terna fanno insieme parte, come punti μ*-upli, di un gruppo della serie S, il quale possiede inoltre t altri punti (indeterminati) rispettivamente* ν_1*-uplo*, ν_2*-uplo*,..., ν_t*-uplo per esso* (6).

I tre particolari gruppi della serie S, che risultano così collegati alle coppie di punti di ciascuna di tali terne, sono in generale fra loro distinti; a meno che sia $\mu = 2$ *ed insieme* $t < \nu - k - 2$: *nel qual caso esistono sempre delle terne per cui i tre gruppi coincidono in uno solo. Il numero di queste ultime terne è precisamente:*

$$\frac{4\lambda}{3} \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots \alpha_\tau !} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{i=t+3} (t - i + 3)! \, i! \, (\sigma_i + 3\sigma_{i-1} + 3\sigma_{i-2} + \sigma_{i-3}) \binom{\nu - k - i}{t - i + 3} \binom{p}{i}.$$

3. - A complemento del teorema che precede (n. 2) si può aggiungere il seguente altro:

Sopra una curva Γ, *irriducibile, di genere p, appartenente ad uno spazio qualunque* (7) *e non avente altre singolarità che punti multipli ordinarî ed iperpiani stazionarî ordinarî, sia*

(6) Dalle ipotesi fatte sui numeri k, t, μ, ν_i segue che gli eventuali ulteriori punti completanti il gruppo della serie sono necessariamente tutti semplici, tranne, al più uno, (il quale allora è doppio) quando $\mu = 2$ e $t < \nu - k - 2$: vedasi il seguito dell' enunciato.

(7) Non si esclude, quindi, che Γ possa essere una retta.

data una serie algebrica di gruppi di punti equivalenti ([8]) *d'indice* $\lambda \geq 1$, *di dimensione* $2\mu - 1$ *e di ordine* ν, *la quale non possegga punti fissi nè risulti composta mediante una involuzione.*

Se allora si suppone $\mu > 1$ e $\nu \geq 2\mu$, *oppure* $\mu = 1$ *e* $\nu = 2$, *sulla curva* Γ *esistono in generale:*

$$2\binom{\lambda\mu(\nu-\mu)+\lambda\mu(\mu-1)(p-1)}{3} - 4\lambda^2\mu^2\binom{\mu}{2}\binom{p}{2} +$$
$$+ 2\binom{\lambda\mu^2+2}{3} - \lambda^2\mu^3\nu p$$

terne di punti distinti, dotate della proprietà che due qualunque punti di ogni terna appartengono insieme, ed entrambi con la multiplicità μ, *ad un gruppo della serie* ([9]).

Tale gruppo, che varia generalmente al variare dei due punti della terna, è invece lo stesso per tutte e tre le coppie di punti di certe terne quando $\mu = 2$ *e* $\nu \geq 6$: *nel qual caso il numero di queste particolari terne è:*

$$8\lambda\sum_{i=0}^{i=3}\binom{\nu-3-i}{3-i}\binom{p}{i}.$$

La dimostrazione è analoga a quella del teorema del n. 2.

Alcune fra le molteplici applicazioni di entrambi i teoremi sono oggetto dei successivi n. 4-13.

4. – Considerando la serie lineare segnata sopra una curva da tutti gli iperpiani del suo spazio di appartenenza, è subito visto che:

Posto $k = r$, $\lambda = 1$ *e* $\nu = n$, *il teorema del* n. 2 *dà in particolare, sotto le condizioni ivi precisate, il numero dei triangoli inscritti in una curva* C_n^p, *di ordine* n *e di genere* p, *appartenente ad un* S_r, *e tali che gli* $S_{\mu-1}$ *osculatori a* C_n^p *in*

([8]) Cfr. nota ([5]).

([9]) Del quale tutti gli eventuali ulteriori punti sono semplici, eccettuato, al più, uno (doppio) quando $\mu = 2$ e insieme $\nu \geq 6$: si vegga il seguito dell' enunciato.

due vertici qualunque di ogni triangolo stanno assieme in un iperpiano [10] *avente altrove con C_n^p (in punti indeterminati) t contatti di rispettivi ordini $\nu_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$.*

Se, ad esempio, è $p = 0$, il numero suddetto vale:

$$2\left(\frac{\mu \cdot \dfrac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_\tau!} \cdot (t+1)! \dbinom{n-r}{t+1}}{3}\right),$$

supposto (n. 2) *che i numeri ν_i si ripartiscano in τ gruppi, costituiti ciascuno da α_h $(h = 1, 2, \ldots, \tau)$ numeri eguali fra di loro, ma diversi da tutti i rimanenti.*

Se invece, essendo p qualunque, è $t = 1$ e $\nu_1 = \mu'$, quel numero vale:

$$2\binom{\delta}{3} + 2\binom{\delta'}{3} p - \delta' (\delta - \delta') \, p ,$$

ove:

$$\delta = 2\mu\mu' \binom{n-r}{2} + \mu\mu' (r-\mu)(n-r-1)p + 8\binom{\mu}{2}\binom{\mu'}{2}\binom{p}{2}$$

e:

$$\delta' = \mu^2\mu' \left[n - r - 1 + (\mu' - 1)(p - 1)\right].$$

Devesi supporre (n. 2): $\mu' + 2\mu = r + 2$, $\mu' \neq \mu$, $\mu \geq 1$, $\mu' \geq 2$, $n > r + 1$; *e* $n = r + 2$ *quando* $\mu = 1$.

Si trova così (per: $r = 3$, $\mu = 1$, $\mu' = 3$, $n = 5$) che in una generica quintica razionale (sghemba), dello spazio ordinario, si possono inscrivere 40 triangoli, di cui *ogni* lato stia in un piano osculatore alla curva stessa *(in un punto diverso dai vertici appartenenti a quel lato);* mentre tali triangoli sono 415 per una quintica ellittica, e 1806 per una di genere 2.

Più generalmente ($\mu = 1$, $\mu' = r$, $n = r + 2$), *esistono:*

[10] Sempre variabile da coppia a coppia di vertici di uno stesso triangolo: tranne per un certo numero di triangoli (che si precisa in base all'ultima parte della proposizione del n. 2) quando $\mu = 2$ e $t < n - r - 2$.

$$2\binom{r^2p-rp+2r}{3}+2\binom{r^2p-rp+2r-r^2}{3}p-r^3(rp-p-r+2)p$$

triangoli inscritti in una curva (con soli punti multipli ordinarî e iperpiani stazionarî ordinarì) d'ordine $r+2$ e di genere p, la quale appartenga ad un S_r, ed aventi i lati situati ciascuno in un iperpiano che oscula la curva stessa in un punto distinto dai vertici.

Tale risultato vale anche se $r=2$; cioè *vi sono:*

$$2(p+1)\binom{2p}{3}+8(p+1)^2$$

triangoli contemporaneamente inscritti e circoscritti ad una quartica piana, con sole singolarità ordinarie, di genere p: i vertici di ciascun triangolo essendo distinti dai punti di contatto dei lati.

5. – Gli ultimi risultati del n. 4 non sono che casi particolari del seguente altro (deducibile dalla prima proposizione dello stesso n. 4 sopponendovi i numeri ν_i tutti eguali fra di loro):

In uno spazio S_r, ad r dimensioni, si chiami triedro *una terna d'iperpiani S_{r-1}* (faccie) *indipendenti, e quindi segantisi a due a due in tre diversi spazï S_{r-2}* (spigoli) *passanti per un medesimo spazio S_{r-3}* (vertice). *Allora:*

Se una curva irriducibile C_n^p, d'ordine n e di genere p, appartiene ad uno spazio S_r di dimensione $r=t\rho+2\mu-t-1$ e non possiede altre singolarità che punti multipli ordinarî e iperpiani stazionarï ordinarì, verificandosi le condizioni $t\geq 1$, $\mu\geq 1$, $\rho\geq 2$, $\mu\neq\rho$, $n\geq t\rho+2\mu$ quando $\mu>1$, $n=t\rho+2$ quando $\mu=1$, esiste in generale un numero finito ξ di triedri, tali che ogni faccia di ciascuno di essi ha con C_n^p (fuori degli spigoli) t distinti contatti ρ-punti, mentre ogni spigolo ha con C_n^p (fuori del vertice) un incontro μ-punto.

Posto:

$$\Delta=\mu\rho^t\sum_{i=0}^{i=t+1}[(t+1)(\rho-1)+i(\mu-\rho)](\rho-1)^{i-1}\binom{n-r-i}{t-i+1}\binom{p}{i},$$

$$\Delta' = \mu^2 \rho^t \sum_{i=0}^{i=t} (\rho - 1)^i \binom{n - r - i - 1}{t - i} \binom{p - 1}{i},$$

e [11]:

$$\Delta'' = \rho^t \sum_{i=0}^{i=t+3} (t - i + 3)\,!\, i\,! \left[\binom{t}{i} (\rho - 1)^i + 3 \binom{t}{i - 1} (\rho - 1)^{i-1} + \right.$$

$$\left. + 3 \binom{t}{i - 2} (\rho - 1)^{i-2} + \binom{t}{i - 3} (\rho - 1)^{i-3} \right] \binom{n - r - i}{t - i + 3} \binom{p}{i},$$

si ha precisamente:

$$(1) \qquad \xi = 2\binom{\Delta}{3} + 2\binom{\Delta'}{3} p - \Delta'(\Delta - \Delta') p - \frac{4\varepsilon}{3} \cdot \frac{\Delta''}{t!},$$

ove $\varepsilon = 1$ *se è ad un tempo* $\mu = 2$ *e* $n > t\rho + 5$, *mentre* $\varepsilon = 0$ *in ogni altro caso.*

Si può notare che *quando* $n = t\rho + 2\mu$ *e insieme* $t \geq p - 1$, *il numero* ξ *dei triedri suddetti è esprimibile sotto la forma*:

$$2\binom{\mu\,[(t + 1)\rho + (\mu - \rho)p]\,\rho^{t+p-1}}{3} + 2\binom{\mu^2 \rho^{t+p-1}}{3} p -$$

$$- \mu^3 p\,[t\rho + (\mu - \rho)(p - 1)]\,\rho^{2t+2p-2}.$$

Ad esempio:

Nello spazio ordinario è:

$$2\binom{(6 - p)\,2^{p+1}}{3} + 2p\binom{2^{p+1}}{3} - p\,(5 - p)\,2^{2p+2}$$

il numero dei triedri con le faccie bitangenti ad una sestica gobba di genere $p \leq 3$ *e con gli spigoli appoggiati alla curva stessa (in punti distinti dal vertice e da quelli di contatto delle faccie).*

(11) Nell'espressione di Δ'' si deve supporre $\binom{t}{h} = 0$, oltre che quando $h > t$, anche quando $h < 0$.

Per la sestica di genere massimo $p=4$ esistono invece 121960 *triedri siffatti* ([12]).

Osservazione. - Quando $t=1$, $\mu=2$, $\rho=3$, e quindi $r=5$, la formula (1) dà, per una curva C_n^p dello spazio S_5 a cinque dimensioni, il numero delle terne di iperpiani (indipendenti) passanti ciascuno per un piano osculatore di C_n^p e segantisi a due a due in tre spazï tangenti a C_n^p.

Se allora si suppone la curva C_n^p appartenente ad una generica quadrica di S_5, dalla nota rappresentazione che si può fare dell'ordinario spazio rigato su tale quadrica, si deduce il teorema:

Nello spazio a tre dimensioni, posto:

$$D=12\binom{n-5}{2}+18\,(n-6)\,p+24\binom{p}{2},$$

$$D'=12\,(n+2p-8)\,,$$

e ritenuto $\varepsilon=0$ *oppure* $\varepsilon=1$ *secondochè* $n<9$ *ovvero* $n\geq 9$, *per ogni rigata gobba* R_n^p, *di ordine* $n>6$ *e di genere* p, *con sole generatrici multiple ordinarie, esistono in generale:*

$$2\binom{D}{3}+2\binom{D'}{3}p-D'\,(D-D')\,p-24\varepsilon\sum_{i=0}^{i=4}(4+i)\binom{n-i-5}{4-i}\binom{p}{i}$$

terne di complessi lineari contenenti ciascuno una quadrica (regolo) osculatrice ad R_n^p *e intersecantisi a due a due in tre (distinte) congruenze lineari con le direttrici tangenti ad* R_n^p: *i punti di contatto delle direttrici di una stessa congruenza appartenendo ad una medesima generatrice di* R_n^p ([13]).

6. - Poichè un sistema lineare ∞^h di ipersuperficie, del quale sia ∞^t il sistema subordinato passante per una curva,

([12]) Ciò risulta dalla formula più generale (1), per: $\mu=1$, $t=2$, $\rho=2$, $r=3$, $n=6$, $\varepsilon=0$.

([13]) Si sottintenda che tale generatrice dev' essere diversa per ognuna delle tre congruenze, e sempre distinta dalle generatrici di contatto, con R_n^p, delle tre quadriche osculatrici dianzi accennate.

2

determina su questa una serie lineare di dimensione $h - t - 1$, è ovvio che:

Supposta la linea Γ *di ordine* n, *e assegnato un sistema lineare* ∞^k *di ipersuperficie d'ordine* m *con* q *punti base su* Γ, *il teorema del* n. 3 *dà, fattovi* $\lambda = 1$ *e* $\nu = mn - q$, *il numero delle terne di punti distinti di* Γ, *tali che per due punti qualunque di ciascuna di esse passa una ipersuperficie, del sistema, avente in entrambi un contatto* μ*-punto con* Γ *e contenente inoltre* $k - 2\mu + 1$ *punti generici prefissati: ammesso che* Γ *appartenga ad altrettante ipersuperficie linearmente indipendenti del sistema stesso* $(2\mu \leq k + 1)$.

In particolare:

Nello spazio a tre dimensioni, per una curva irriducibile C_n^p *d'ordine* $n \geq 5$, *di genere* p, *senza altre singolarità che punti multipli, o piani stazionari, ordinari, e non situata sopra una quadrica, esistono generalmente:*

$$2\binom{10n + 20p - 45}{3} - 50\,(5n + 10p - 127)p$$

terne di quadriche (distinte), tali che quelle di ogni terna hanno ciascuna con C_n^p *un contatto* 5*-punto in due vertici di uno stesso triangolo (variabile da terna a terna).*

Se invece la curva C_n^p *giace sopra una (ed una sola) quadrica, da ogni punto di questa escono (supposto* $n \geq 4 + \varepsilon$, *con* $\varepsilon = 1$ *od* $\varepsilon = 0$ *secondochè tale punto appartenga o no a* C_n^p*):*

$$2\binom{8n + 12p - 28 - 4\varepsilon}{3} - 32\,(4n + 6p - 57 - 2\varepsilon)\,p$$

terne analoghe di quadriche bitangenti a C_n^p, *però con la differenza che tutti i contatti sono di 3° ordine, e aventi inoltre in comune un prefissato punto generico.*

Passando al piano, si trova:

In una curva piana di genere p *e di classe* $\rho > 2$, *con sole singolarità ordinarie, sono generalmente inscrittibili:*

$$2\binom{3\rho-9}{3}-\binom{\frac{3}{2}\rho+3p-3}{3}-3\,(9\rho-110)\,p$$

triangoli dotati ciascuno della proprietà che in due qualunque dei vertici la curva ha un contatto di 2° ordine con una conica non degenere (14).

Nel caso in cui la curva è del 3° ordine, risulta così che il numero di tali triangoli è 1 oppure 252 secondochè la curva è razionale o ellittica.

Ora, è noto (15) che due punti di una cubica, nei quali esista fra questa ed una conica un contatto tripunto, hanno la proprietà caratteristica di essere allineati con un flesso. Ne segue che *in una cubica generale è possibile inscrivere* 252 *triangoli, in modo che nessuno dei loro vertici sia un flesso, mentre ogni loro lato passi per un flesso; invece per una cubica con punto doppio (però non cuspide), di tali triangoli ve n'è uno solo.*

A ciò si perviene pure direttamente osservando che, sopra una cubica di genere p, la corrispondenza, simmetrica, fra due punti allineati con qualche flesso ha l'indice e la valenza entrambi eguali al numero dei flessi, ossia a $6p+3$, e quindi (16) possiede:

$$2\,(p+1)\binom{6p+3}{3}$$

terne cicliche. Queste debbono essere costituite ciascuna, o da tre flessi o dai vertici di uno dei triangoli di cui si cerca il numero; il quale sarà dunque:

(14) Non si è quindi tenuto conto (nello stabilire il risultato surriferito) di quei triangoli i cui vertici coincidono con flessi della curva data, e sono perciò, a due a due, di contatto tripunto fra questa e la coppia delle relative tangenti (conica degenere).

(15) Cfr., ad es.: H. Schröter, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1888), p. 280.

(16) A. Longhi, Nota citata, n. 4.

$$(2p+1)\binom{6p+3}{3},$$

cioè appunto 1 se $p = 0$, e 252 se $p = 1$.

7. – Applicando il teorema del n. 3 alla serie algebrica, d'indice ρ, segata sopra una curva da tutti gli iperpiani tangenti ad una ipersuperficie di classe ρ, in uno spazio di dimensione pari, si ottiene:

Una curva irriducibile C_n^p, di ordine n e di genere p, appartenga ad un iperspazio S_{2r}, di dimensione pari $2r > 2$, e non abbia altre singolarità che punti multipli ordinarï ed iperpiani stazionarï ordinarï, cosicchè il suo $(r-1)$-esimo rango n_{r-1} sia calcolabile con la formula:

$$n_{r-1} = rn + r(r-1)(p-1).$$

In generale, è allora:

$$2\binom{\rho n_{r-1} - r^2\rho}{3} + 2\binom{r^2\rho + 2}{3}p - r^2\rho^2 n_{r-1} p$$

il numero dei triangoli inscritti in C_n^p, e tali che gli S_{r-1} osculatori a C_n^p nei loro vertici individuano, congiunti a due a due, tre iperpiani tangenti ad una data ipersuperficie dell'S_{2r}, di classe ρ e in posizione generica rispetto a C_n^p.

Questi tre iperpiani sono sempre fra loro distinti se $r > 2$ oppure $n < 6$, mentre quando $r = 2$ e insieme $n \geq 6$ fra quei triangoli ve ne sono:

$$8\rho \sum_{i=0}^{i=3} \binom{n-3-i}{3-i}\binom{p}{i}$$

per i quali i tre iperpiani stessi coincidono in uno solo ([17]).

([17]) Una conferma del teorema, nel caso in cui $\rho = 2$, si può desumere dall'altro mio lavoro: A. Longhi, *Alcuni risultati di geometria numerativa...* (Atti del R. Istituto Veneto, XCII, 1932-33, pp. 409-433) n. 9, Oss. 1ª.

Si può notare che il teorema vale anche se $r = 1$, purchè (secondo la proposizione generale del n. 3) si supponga allora $n = 2$; risulta così, nel piano, *essere* $2\binom{\rho}{3}$ *il numero dei triangoli inscritti in una conica e circoscritti ad una curva di classe* ρ [18].

8. - Altra conseguenza particolare del teorema del n. 3 è la seguente:

Si abbiano (nello spazio a tre dimensioni) un complesso di sfere di grado m [19] *ed una curva sghemba* C_n^p, *irriducibile, di ordine n e di genere p, incontrante in q punti fissi* [20] *una sfera variabile del complesso, e priva di singolarità che non siano punti multipli ordinarï o piani stazionarï ordinarï.*

Se allora $n \geq \frac{1}{2}(q+4)$, *è in generale possibile inscrivere nella curva* C_n^p *dei triangoli tali, che le tre sfere individuate dalla proprietà di essere ciascuna bitangente a* C_n^p *in una delle tre coppie di vertici di uno stesso triangolo* [21], *siano fra loro distinte ed appartengano tutte al complesso dato.*

Il numero di questi triangoli è precisamente:

$$2\binom{4mn+2mp-2mq-6m}{3}+2\binom{4m+2}{3}p-$$

$$-8m^2(2n+p-q-1)p-8m\varepsilon\ ,$$

[18] Cfr., anche per una proposizione assai più generale: A. Longhi, loc. dianzi citato, n. 5, *Oss. 1ª*; e *Oss. 2ª*, β).

[19] Cioè: *una totalità algebrica* ∞^3 *di sfere, tale che per tre punti generici passino m delle sue sfere.* È quasi superflua l'avvertenza che le sfere, di cui si tratta in tutto questo n. 8, possono degenerare in una coppia di piani, dei quali uno almeno coincida col piano improprio dello spazio, come pure ridursi a *punti–sfere* (coni quadrici passanti per il circolo assoluto).

[20] Non necessariamente distinti, nè tutti impropri (cioè situati sul circolo assoluto dello spazio): è però ovvio che quelli proprï devono coincidere in un unico punto di C_n^p.

[21] Si è qui supposto, per semplicità di enunciato, che le tangenti alla curva nei vertici di ciascun triangolo siano a due a due sghembe fra di loro.

ove :

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{i=3} \binom{2n - q - 3 - i}{3 - i} \binom{p}{i}$$

se $n \geq \frac{1}{2}(q + 6)$, *mentre* $\varepsilon = 0$ *se* $n < \frac{1}{2}(q + 6)$.

Inoltre ([22]) *:*

a) Quando $q = 2n - 5$ *esistono in generale :*

$$2\binom{6mp + 6m}{3} + 2\binom{6mp - 3m}{3}p - 27\,m^2\binom{2p}{2}$$

triangoli inscritti nella curva C_n^p, ***e tali che per due qualsiansi vertici di ognuno di essi passa una sfera, del complesso, avente altrove con*** C_n^p ***un contatto tripunto.***

b) Quando $q = 2n - 6$ ***esistono in generale :***

$$2\binom{2mp^2 + 6mp + 12m}{3} + 2\binom{2mp^2 - 2mp + 4m}{3}p -$$

$$- 16m^2p\,(p + 1)\,(p^2 - p + 2)$$

triangoli inscritti nella curva C_n^p, ***e tali che per due qualunque vertici di ognuno di essi passa una sfera, del complesso, avente altrove con*** C_n^p ***due contatti bipunti.***

È quasi inutile avvertire che, in questi due ultimi teoremi, il valore di q, e quindi quello di n, è limitato dalla supposta irriducibilità della curva C_n^p.

Osservazione. - Specializzando il complesso di sfere, *si può supporre, ad esempio, che le tre sfere relative a ciascuno dei triangoli di cui si è trattato, debbano: o essere ortogonali ad una sfera fissa; o possedere tutte uno stesso raggio prestabilito; o avere il centro sopra una superficie assegnata, di ordine* ω. Nel primo caso è $m = 1$, nel secondo $m = 2$ e nel terzo $m = \omega$.

([22]) Come si può dedurre dal teorema del n. 2.

Se poi si considera (invece di un complesso) il sistema lineare ∞^4 di tutte le sfere dello spazio, il teorema del n. 2 conduce a varî altri risultati, dei quali il più semplice è il seguente:

Esistono 111 *triangoli inscritti in una cubica gobba ed aventi ciascuno i vertici a due a due situati sopra una sfera osculatrice altrove alla cubica stessa: supposta questa priva di contatti col piano improprio e di punti d'incontro col circolo assoluto* ([23]).

9. – Supponendo, nel teorema del n. 2, che S sia la *serie canonica* della curva Γ, risulta:

Data (in uno spazio qualsiasi) una curva Γ, *irriducibile, di genere* $p > 2$, *non iperellittica e senza altre singolarità che punti multipli ordinarî e iperpiani stazionarî ordinarî, si consideri la serie canonica* g^{p-1}_{2p-2} *esistente su di essa e si scelgano (il che è possibile in uno o più modi) dei numeri interi* μ, t, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$ *soddisfacenti alle condizioni:*

$$1 \leq t \leq p-2, \qquad 1 \leq \mu \leq \frac{1}{2}(p-t), \qquad \nu_i \geq 2 \, (i = 1, 2, \ldots, t),$$

$$\sum_{i=1}^{i=t} (\nu_i - 1) = p - 2\mu.$$

Vi sono triangoli inscritti in Γ *ed aventi la proprietà che due vertici qualunque di un medesimo triangolo appartengono insieme, come punti* μ*-upli, ad un gruppo della serie canonica* ([24]), *il quale possiede inoltre, altrove,* t *punti indeterminati rispettivamente multipli per esso secondo* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$.

([23]) Notisi che non si è computato il triangolo dei punti improprî della cubica: per il quale pure si verifica la proprietà indicata, benchè la sfera osculatrice passante per ogni sua coppia di vertici risulti composta dal piano osculatore nel terzo vertice e dal piano improprio.

([24]) Gruppo che (come si precisa più innanzi) solo quando $\mu = 2$, e insieme $t < p - 3$, può essere lo stesso per tutte e tre le coppie di vertici del triangolo: variando invece da coppia a coppia in ogni altro caso.

Si noti pure che (come occorre per poter applicare il teorema del n. 2) la serie canonica sulla curva Γ non soltanto è priva di punti fissi, ma non

Ammettendo che ogni ν_i *sia diverso da* μ, *e che si abbia* $t = p - 2$ *quando* $\mu = 1$, *il numero di tali triangoli è in generale:*

$$2\binom{\xi + \vartheta p}{3} + 2\binom{\vartheta}{3} p - (\xi + \vartheta p - \vartheta)\,\vartheta p,$$

ove:

$$\xi = (t+2)!\binom{p}{t+2}\mu \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_\tau !} \cdot \sum_{i=0}^{i=t+1} \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{p - i}$$

e:

$$\vartheta = (t+1)!\binom{p-1}{t+1}\mu^2 \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_\tau !} \cdot \sum_{i=0}^{i=t} \frac{\sigma_i}{p - i - 1},$$

ritenuti per α_i *e* σ_h *gli stessi significati che nel teorema del* n. 2.

Quando $\mu = 2$ *e* $t < p - 3$, *fra i triangoli suddetti ve ne sono:*

$$\frac{4}{3} \cdot (t+4)!\binom{p}{t+4} \cdot \frac{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_t}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_\tau !} \cdot \sum_{i=0}^{i=t+3} \frac{\sigma_i + 3\sigma_{i-1} + 3\sigma_{i-2} + \sigma_{i-3}}{p - i}$$

di cui ciascuno ha per vertici tre punti doppî di un medesimo gruppo della serie canonica, dotato di t ulteriori punti multipli con le rispettive multiplicità $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$.

Qualora, in particolare, sia $\mu = 1$ e $t = p - 2$, dev'essere anche $\nu_i = 2$ $(i = 1, 2, \ldots, p-2)$, e il teorema può enunciarsi così:

Se n è l'ordine di una curva piana C, irriducibile, di genere $p > 2$, *non iperellittica e con sole singolarità ordinarie, esistono triangoli inscritti in C e tali che per due vertici qualunque di ciascuno di essi passa (semplicemente) una curva aggiunta d'ordine* $n - 3$, *di cui tutti gli ulteriori punti d'incontro con C, ad eccezione di quelli multipli, sono di (semplice) contatto per le due curve.*

è neppure composta: diversamente Γ dovrebbe essere iperellittica, contro l'ipotesi.

Il numero di questi triangoli (quando non ve ne siano infiniti) è precisamente :

$$2\binom{2^{p-2}[(p-2)\,2^{p-1}+1]}{3}+2\binom{2^{p-2}\,(2^{p-1}-1)}{3}p-$$

$$-\,2^{2p-3}\,(2^{p-1}-1)\,[(p-3)\,2^{p-2}+1]\,p\,.$$

Ad esempio, se $p=3$ si trova in tal modo che i triangoli in discorso sono 288 ; e di ciò si può avere una conferma osservando che essi, quando $n=4$, debbono coincidere coi triangoli contemporaneamente inscritti e circoscritti ad una quartica piana generale, e già considerati nell'ultima proposizione del n. 4 : dalla quale risulta essere appunto 288 il loro numero.

10. - Il teorema del n. 3, applicato nelle ipotesi $\lambda=1$, $\mu=\pi$ e $\nu=4\pi-2$, fornisce il seguente altro risultato per la serie canonica :

Sopra una curva irriducibile, di genere pari $2\pi\geq 4$, non iperellittica e priva di singolarità che non siano punti multipli ordinarî o iperpiani stazionarî ordinarî, esistono terne di gruppi di punti della serie canonica, dotate della proprietà che due qualunque gruppi di ogni terna hanno in comune un punto π-uplo per entrambi (e diverso da coppia a coppia di gruppi della stessa terna).

Il numero di tali terne è generalmente :

$$5\binom{2\pi+2}{5}(2\pi^4-6\pi+1)-6\binom{2\pi+1}{4}-120\,\varepsilon,$$

con $\varepsilon=1$ *se* $\pi=2$, *ed* $\varepsilon=0$ *se* $\pi>2$.

Così, nello spazio ordinario, la sestica sghemba di genere 4, su cui la serie canonica g_6^3 è segata dalla totalità dei piani, ammette 480 terne di piani bitangenti e aventi a due a due in comune uno dei punti di contatto, ossia possiede 480 terne di tangenti concorrenti : come è già noto.

11. - Sia di dimensione dispari, e precisamente un $S_{2\nu+1}$, lo spazio di appartenenza di una curva C_n^p, di ordine n e di genere p. Gli iperpiani di S_{2r+1} segnano allora su C_n^p una serie lineare g_n^{2r+1}, alla quale è applicabile il teorema del n. 3, supponendovi $\lambda = 1$, $\mu = r+1$ e $\nu = n$.

Il risultato che se ne trae, conduce poi subito al seguente:

Ogni curva irriducibile, di ordine n e di genere p, appartenente ad uno spazio S_{2r+1}, di dimensione dispari $2r+1 \geq 3$, e priva di singolarità che non siano punti multipli ordinarî o iperpiani stazionarî ordinarî, possiede:

$$2\binom{n_r - r^2 - 2r - 1}{3} + 2\binom{r^2+2r+3}{3}p - (r+1)^2 n_r p$$

terne di S_r osculatori (distinti), caratterizzate dalla proprietà che i tre spazî di ciascuna terna sono a due a due incidenti fra di loro; con n_r essendosi denotato l'r-esimo rango della curva, onde:

$$n_r = (r+1)(n+rp-r)\,.$$

Osservazione 1ª. - Posto $r = 1$, il teorema mostra che per una curva C_n^p dello spazio ordinario dev'essere:

$$2\binom{2n+2p-6}{3.} - 8(n+p-6)p$$

la somma del numero x dei piani tritangenti e del numero y dei punti da cui escono tre distinte tangenti di C_n^p. Ma dall'ultima parte del teorema del n. 3 (nelle ipotesi: $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = n$) si deduce il valore di x; mediante il quale si può ora determinare quello di y: e si perviene così alle medesime espressioni di x e di y, che risultano da formule notorie.

Osservazione 2ª. - Per $r = 2$ il teorema riguarda le curve dello spazio a cinque dimensioni; e si può quindi (cfr. n. 5, *Oss.*) interpretare nello spazio rigato ordinario, quando lo si applichi ad una curva contenuta in una quadrica non specializzata. Si ha allora:

Una generica [25] *rigata gobba (dello spazio ordinario), di ordine* $n > 4$ *e di genere* p, *possiede:*

$$2\binom{3n+6p-15}{3} - 3\,(9n+18p-128)\,p$$

terne tali di generatrici, che le quadriche (regoli) osculatrici alla rigata lungo due qualunque generatrici di ogni terna, hanno la proprietà di appartenere, insieme, ad un complesso lineare (variabile da coppia a coppia di generatrici).

12. - Nel teorema del n. 3 si supponga $\lambda = 1$ e $\mu = 2$, onde sia una g^3_ν la serie algebrica ivi considerata sulla curva Γ.

Le terne di punti a due a due doppî, insieme, per qualche gruppo della g^3_ν sono allora in numero eguale a:

$$2\binom{2\nu+2p-6}{3} - 8\,(\nu+p-6)\,p.$$

Quando $\nu \geq 6$ in tale numero sono comprese (giusta quel medesimo teorema) certe:

$$8\binom{\nu-3}{3} + 8\binom{\nu-4}{2}p + 8\,(\nu-5)\binom{p}{2} + 8\binom{p}{3}$$

particolari terne aventi ciascuna tutti e tre i propri punti contemporaneamente doppî per un gruppo della serie.

Astraendo da queste ultime terne, si trova che il numero delle residue è esprimibile sotto la forma:

$$8p + 8\sum_{i=0}^{i=3}\binom{\nu-2}{3-i}\binom{p}{i}.$$

[25] Per altro non necessariamente priva di generatrici multiple ordinarie.

E applicando infine una nota identità combinatoria ([26]), si conclude:

Una serie lineare g^3_ν, *di dimensione* 3 *e di ordine* $\nu \geq 6$, *data (in uno spazio qualunque) sopra una curva di genere* p, *possiede in generale:*

$$8\binom{\nu+p-2}{3}+8p$$

terne di gruppi distinti ed aventi a due a due in comune un punto, il quale è doppio per entrambi i gruppi, di una terna, che lo contengono ed è diverso per ciascuna coppia di gruppi della terna.

Sia per la serie lineare che per la curva, si ritengono soddisfatte le ipotesi precisate nel teorema del n. 3.

13. – Dal precedente n. 12 segue in particolare (cfr. n. 6):

In uno spazio qualunque si abbiano: un sistema lineare ∞^k, *con la dimensione* $k \geq 3$, *di ipersuperficie d'ordine* m, *ed una curva irriducibile (appartenente o no a quello spazio) di ordine* $n > 1$ *e di genere* p, *la quale contenga* q *punti base del sistema e sia contenuta in* $k-3$ *(ma non in* $k-2$*) sue ipersuperficie linearmente indipendenti.*

Supponendo allora $mn - q \geq 6$, *e priva la curva di singolarità diverse dai punti multipli ordinarî e dagli iperpiani stazionarî ordinarî, esistono nel sistema, in generale:*

$$8\binom{mn+p-q-2}{3}+8p$$

terne di ipersuperficie, aventi la proprietà che le ipersuperficie di ogni terna passano per $k-3$ *punti generici prefissati, sono sempre fra loro distinte e toccano ciascuna la curva in due*

([26]) Trattasi della formula:

$$\binom{x+y}{x}=\sum_{i=0}^{i=x}\binom{x}{i}\binom{y}{x-i}.$$

vertici di uno stesso triangolo (variabile da terna a terna di ipersuperficie).

Ad esempio, nello spazio ordinario si può considerare, insieme con una curva C_n^p, il sistema lineare di tutti i piani, oppure quello di tutte le quadriche contenenti una data conica; nel primo caso è da porre: $m = 1$, $k = 3$, $q = 0$; nel secondo: $m = 2$, $k = 4$, $q = n$. E si ha:

Per una curva sghemba C_n^p (dello spazio a tre dimensioni) di ordine n e di genere p, senza altre singolarità che punti multipli ordinarî e piani stazionarî ordinarî, è:

$$8\binom{n+p-2}{3} + 8p$$

il numero delle terne di tangenti con un punto comune (27); *e quando C_n^p appartiene ad una (unica) quadrica W, lo stesso numero è anche quello delle terne di quadriche distinte, bitangenti ciascuna a C_n^p in due vertici di un medesimo triangolo (diverso da terna a terna), e passanti inoltre per una conica di W, nonchè per un punto fuori di W, prefissati in modo generico.*

Se invece la curva C_n^p è piana, riesce interessante l'applicazione del teorema al caso del sistema (∞^3) di tutti i cerchi del suo piano.

Siano Γ_1, Γ_2, Γ_3 tre cerchi costituenti una delle terne di cui trattasi nel teorema stesso. Tali cerchi sono distinti e tangenti ciascuno a C_n^p in due vertici di un triangolo $T_1 T_2 T_3$: ne segue che essi sono pure a due a due tangenti fra di loro in uno dei punti T_i $(i = 1, 2, 3)$.

Ma allora le tangenti alla curva in questi punti sono gli assi radicali delle tre coppie di cerchi: Γ_1, Γ_2; Γ_2, Γ_3; Γ_3, Γ_1; e debbono perciò concorrere in un punto, il quale è equidistante dagli altri: T_1, T_2, T_3.

Si perviene così al seguente curioso risultato:

(27) Si può verificare che il valore qui stabilito per tale numero non differisce da quello dato, sotto forma meno semplice, da formule note (cfr. n. 11, *Oss. 1*ª).

Per ogni curva piana irriducibile, di ordine $n > 2$ e di genere p, non avente che singolarità ordinarie e passante q volte complessivamente per i punti ciclici del suo piano, esistono in generale :

$$8\binom{\frac{2n+p-q-2}{3}}{} + 8p$$

punti tali, che da ciascuno di essi possono condursi alla curva tre distinte tangenti eguali fra di loro ([28])*; un punto, dal quale escano eventualmente $h > 3$ tangenti siffatte, si intende contato $\binom{h}{3}$ volte.*

Si può aggiungere che:

Il numero dei punti suddetti è anche quello dei cerchi ortogonali ciascuno alla stessa curva in tre punti distinti.

([28]) Intendasi: *tangenti i cui segmenti compresi fra il punto donde partono, e i rispettivi punti di contatto, siano fra loro eguali.*