

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

**Sull' equazione a derivate parziali delle
superficie minime**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 4 (1933), p. 140-154

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__140_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULL' EQUAZIONE A DERIVATE PARZIALI DELLE SUPERFICIE MINIME

di GIUSEPPE ZWIRNER a Padova

1. - Mi sono proposto in questo lavoro di fare uno studio diretto del problema di DIRICHLET per l'equazione delle superficie d'area minima, fondato sui metodi generali oggi disponibili, ma utilizzando anche tutte le semplificazioni ed i perfezionamenti resi possibili dalla natura particolare del problema.

Le trattazioni più soddisfacenti finora conosciute per tale equazione si rivolgono piuttosto al corrispondente problema di calcolo delle variazioni (HAAR (1)), o magari sono desunte da soluzioni generali del problema di PLATEAU (2). La presente si può invece riavvicinare a quelle di BERNSTEIN (3) e di MÜNTZ (4), ma ne differisce radicalmente per la grande semplicità dei principi da cui parte e per la generalità dei risultati.

Per non dovere presupporre nulla della difficile analisi del BERNSTEIN sulla risoluzione «in piccolo» e sulla maggiorazione delle derivate successive della soluzione, a partire dalle prime, ho preso le mosse dal teorema seguente:

Il problema di Dirichlet per l'equazione ellittica

$$A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = 0,$$

(notazioni di Monge) è risolubile con dati regolari del terzo ordine (5) sempre che, limitati i valori al contorno con le loro

(1) Math. Annalen, 97.

(2) DOUGLAS, Trans of the Am. Math. Soc. 33. RADÖ Math. Zeitschrift 32.

(3) Math. Annalen, 69. Ann. Ec. Norm. Sup. (3) 29.

(4) Math. Annalen, 94.

(5) Si intende con ciò che il contorno considerato ha curvatura con de-

derivate terze, le derivate prime della soluzione risultino equilimitate ed equicontinue.

Questo teorema è un caso particolare di un risultato stabilito da CACCIOPOLI (6) per le equazioni in n variabili, e che si riconduce in ultima analisi alla teoria del potenziale. Per applicarlo all'equazione delle superficie minime basta servirsi (con qualche modificazione) del metodo di BERNSTEIN per la limitazione delle derivate seconde *al contorno*, e della riduzione dell'equazione a forma normale, seguendo MÜNTZ.

Con la medesima riduzione si arriva ad estendere notevolmente il risultato, considerando p. es. un contorno a curvatura positiva e valori su di esso soltanto *continui* (7). Il metodo seguito per ottenere questa generalizzazione è interessante perchè, sebbene condizionato dalla forma particolare dell'equazione, fa intravedere la possibilità di trattare anche altre equazioni mediante la riduzione a forma normale, sia pure soltanto implicitamente assegnata.

2. - Per dimostrare dunque che l'equazione

$$(1) \quad (1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t = 0 ,$$

è risolubile in un campo D a contorno c regolare del 3° ordine, con valori al contorno anch'essi regolari del 3° ordine, basta dimostrare che, limitati i valori al contorno di un integrale, con le loro derivate terze, p e q risultano, in tutto il dominio D , equilimitate ed equicontinue.

A più forte ragione basterà dimostrare che si conservano equilimitate le derivate prime e seconde (8).

Consideriamo perciò una soluzione x , di tale equazione de-

rivata continua rispetto all'arco, e che i valori assegnati hanno derivata terza continua rispetto all'arco.

(6) Rend. dell' Acc. dei Lincei 18 (6), 2° sem 1933.

(7) Di qui segue facilmente che *una superficie continua $x = f(x, y)$, avente la proprietà dell' area minima, è minima nel senso della geometria differenziale e quindi analitica.*

(8) Che si possono supporre senz' altro continue in D contorno incluso, cosa che peraltro si potrebbe dimostrare.

finita nel dominio D , che supporremo a contorno c con curvatura sempre positiva. Intanto, per le ipotesi fatte, risulterà limitata l'inclinazione dei piani osculatori al contorno della superficie α . Inoltre l'inclinazione di un qualunque piano tangente a questa superficie non potrà superare quella massima dei piani osculatori al contorno ⁽⁹⁾. Si vede così che il limite superiore di $|p|$ e $|q|$ potrà essere indicato a priori.

Se ζ è una funzione, definita in D , limitata assieme alle sue derivate dei primi tre ordini e che su c si confonde con α ⁽¹⁰⁾, posto

$$(2) \quad \alpha = Z + \zeta,$$

la funzione Z si annullerà sul contorno c e soddisferà ad una equazione ellittica del tipo

$$(3) \quad A \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = D,$$

dove i coefficienti A, B, C, D dipendono da x, y a mezzo delle derivate prime di Z e delle derivate prime e seconde di ζ .

Consideriamo ora la regione S di piano limitata esternamente dal contorno c ed internamente da un contorno c_1 , regolare anch'esso del 3° ordine, e introduciamo in S due nuove coordinate curvilinee ρ, σ tali che su c e c_1 ρ si mantenga costante e sul contorno esterno la variabile σ si riduca all'arco del contorno stesso. Questa trasformazione, come è ovvio, si potrà supporre regolare del 3° ordine, risultando le derivate delle funzioni che vi compaiono limitate a priori fino al 3° ordine.

L'equazione (3) si trasformerà nella seguente

$$(4) \quad A_1 \frac{\partial^2 Z}{\partial \sigma^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 Z}{\partial \sigma \partial \rho} + C_1 \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} = D_1,$$

⁽⁹⁾ Questo teorema, ripetutamente osservato da BERNSTEIN, MÜNTZ, HAAR, è ormai ben noto e si lascia stabilire mediante elementari considerazioni geometriche.

⁽¹⁰⁾ È evidente che una simile funzione si può costruire in infiniti modi e limitare a priori.

sempre di tipo ellittico, i cui coefficienti conterranno ora le derivate prime di Z rispetto a ρ e σ .

Posto $\frac{\partial Z}{\partial \sigma} = x_1$, dalla (4), derivando rispetto a σ , si ottiene

$$(5) \quad A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \sigma^2} + 2 B_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \sigma \partial \rho} + C_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \rho^2} = f\left(\rho, \sigma, \frac{\partial x_1}{\partial \sigma}, \frac{\partial x_1}{\partial \rho}\right),$$

dove $f\left(\sigma, \rho, \frac{\partial x_1}{\partial \sigma}, \frac{\partial x_1}{\partial \rho}\right)$ è una funzione di secondo grado in $\frac{\partial x_1}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial x_1}{\partial \rho}$ i cui coefficienti sono funzioni limitate⁽¹¹⁾. Invero i termini ottenuti derivando i coefficienti contengono prodotti di due derivate seconde di Z , e queste derivate si esprimono mediante $\frac{\partial x_1}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial x_1}{\partial \rho}$ (tenuto conto della (4)).

Effettuando il cambiamento di variabili inverso da ρ, σ a x, y , la (5) si trasformerà in una equazione dello stesso tipo

$$(6) \quad A_2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2} + 2 B_2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} = f_1\left(x, y, \frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_1}{\partial y}\right),$$

e sempre a coefficienti limitati. Posto

$$u = e^{k x_1}$$

dove k è una costante positiva che verrà precisata nel seguito, la (6) diventa:

$$(7) \quad A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \\ = k e^{k x_1} \left\{ k \left[A_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x} \right)^2 + 2 B_2 \frac{\partial x_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y} + C_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + f_1 \left(x_1, y_1, \frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_1}{\partial y} \right) \right\} = P.$$

⁽¹¹⁾ L'ammessa derivabilità dell'equazione è conseguenza del carattere analitico di x ; questo è ben noto, e segue d'altronde dalla trasformazione della (1) in equazione di LAPLACE, di cui faremo uso tra breve.

Essendo la forma quadratica del secondo membro della (7), definita positiva, si potrà prendere k abbastanza grande perchè tutto il complesso dei termini di P del secondo grado in $\frac{\partial x_1}{\partial x}$ $\frac{\partial x_1}{\partial y}$ risulti definito positivo. Prefissato così k , si sa allora che il valore di P non può per nessun valore di $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_1}{\partial y}$ diventare inferiore ad un numero fisso N .

Posto

$$(8) \quad u' = u + \lambda(x^2 + y^2),$$

si determinerà la costante λ in modo che

$$(9) \quad A_2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + 2 B_2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} > 0.$$

Si vede così che u' non può ammettere massimi nella regione considerata.

Osservando che la funzione dedotta da u' togliendovi una funzione lineare nelle stesse variabili soddisfa anch'essa alla disuguaglianza (9) e perciò non ammette, in S , massimi, si può facilmente vedere che un piano passante per la tangente ad un punto del contorno esterno della superficie u' e lasciante al di sotto (cioè dalla parte delle x negative) il contorno interno non può essere tangente alla superficie stessa.

Infatti, in caso contrario, si potrebbe sempre, mediante una rotazione infinitesima del piano stesso, tagliare la superficie secondo una curva chiusa in modo che il pezzo di superficie u' limitato da tale curva rimanesse al disopra del piano. La derivata normale di u' risulterà perciò, sul contorno esterno, superiormente limitata e si potrà quindi determinare un numero L tale che

$$\frac{\partial u'}{\partial \rho} < L.$$

Dalla (8) si dedurrà una limitazione superiore per $\frac{\partial u}{\partial \rho}$,
cioè

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} < L',$$

dove L' è un numero fisso.

Infine, si avrà

$$\frac{\partial x_1}{\partial \rho} < \frac{L'}{k},$$

sul contorno c .

Con un ragionamento analogo si ottiene, mediante il cambiamento di funzione

$$v = -e^{-kx_1},$$

un limite inferiore di $\frac{\partial x_1}{\partial \rho}$.

Avendo così determinato un limite superiore di

$\left| \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \right| = \left| \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho \partial \sigma} \right|$ sul contorno c , ed essendo su tale contorno $\frac{\partial^2 Z}{\partial \sigma^2} = 0$, dall'equazione (4) si dedurrà immediatamente un

limite superiore per $\left| \frac{\partial^2 Z}{\partial \rho^2} \right|$ e dalla (2) si ricaveranno i limiti superiori per le derivate di x .

3. - Limitate così le derivate parziali dei due primi ordini di x sul contorno c e ricordando che le derivate prime p , q risultano limitate anche in tutto il dominio D , passiamo a dimostrare che risultano limitate nell'interno del campo anche le derivate parziali seconde.

A tal scopo consideriamo le formule di trasformazione

$$(10) \quad \xi = x, \quad \eta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{(1 + q^2) dy + pq dx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

dove x_0, y_0 è un punto interno al dominio D , e le cui inverse sono

$$x = \xi, \quad y = \int_{x_0, 0}^{\xi, \eta} \frac{\sqrt{1+p^2+q^2} d\eta - pq d\xi}{1+q^2} + y_0.$$

Mediante le formule (10) il dominio D verrà trasformato biunivocamente in un campo D' limitato da un contorno c' ; l'equazione (1) si trasformerà nell'equazione di LAPLACE:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0,$$

e le derivate prime e seconde della $x(\xi, \eta)$ saranno date dalle formule

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{p}{1+q^2}, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sqrt{1+p^2+q^2} \frac{q}{1+q^2}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{1+q^2} r - \frac{3pq}{(1+q^2)^2} s + \frac{2p^2q^2}{(1+q^2)^3} t, \\ (11) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{(1+q^2)^2} s - \frac{2pq\sqrt{1+p^2+q^2}}{(1+q^2)^3} t, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= \frac{pq}{(1+q^2)^2} s + \frac{1+p^2+q^2-p^2q^2}{(1+q^2)^3} t. \end{aligned}$$

Sul contorno c' risulterà così limitata la funzione $x(\xi, \eta)$ assieme alle sue derivate dei due primi ordini. Essendo, oltre che la x , armoniche anche le funzioni $\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}$, ed assumendo perciò i loro massimi e minimi valori sul contorno c' , si vede che tali funzioni risultano limitate in ogni punto del dominio D' . Dalle formule (11) si deduce allora una limitazione per le derivate seconde r, s, t della z in tutto D .

Si è dimostrato così, nell'ipotesi d'un campo D limitato da un contorno c regolare del 3° ordine ed a curvatura positiva, l'esistenza di un integrale $x(x, y)$ della (1) che si riduce sul

contorno ad una prefissata funzione $\varphi(s)$ dell'arco, continua assieme alle sue tre prime derivate.

4. - Vogliamo ora generalizzare il risultato precedente e precisamente, ferme restando le ipotesi sulla regolarità del contorno c , si dimostrerà l'esistenza di un integrale della (1) che assume sul contorno i valori di una data funzione $\varphi(s)$ della quale ammetteremo la sola continuità.

Ci serviremo all'uopo delle formule di trasformazioni (10), le cui inverse si possono mettere sotto la forma

$$(12) \quad x = \xi, \quad y = J \int_{x_0, 0}^{\xi, \eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - i \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2} (d\xi + i d\eta) + y_0,$$

dove la lettera J , posta d'innanzi all'integrale, sta ad indicare il coefficiente dell'immaginario ⁽¹²⁾. Mediante tali formule sappiamo che l'equazione (1) si trasforma nell'equazione di LAPLACE.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0$$

ed al campo D corrisponde biunivocamente un campo D' limitato da un contorno c' . Dalla (12) si vede che anche x ed y sono funzioni armoniche delle variabili ξ, η .

Consideriamo ora una successione

$$(13) \quad x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

di integrali della (1) (indicheremo con p_n, q_n, r_n, s_n, t_n le derivate parziali prime e seconde della generica x_n) che assumono su c valori continui, con le loro derivate terze,

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots,$$

⁽¹²⁾ Si sceglie del radicale la determinazione che si riduce ad 1 per il valore 1 del radicando.

e tali che uniformemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = \varphi(s),$$

La successione (13), convergendo uniformemente sul contorno, equiconverge anche in tutto il campo D verso una funzione $\alpha(x, y)$, che assume su c i valori prefissati $\varphi(s)$. Infatti, la differenza ζ tra due integrali della (1) estratti dalla successione (13) soddisfa un'equazione lineare omogenea di tipo ellittico e priva del termine in ζ , e pertanto assume il suo massimo valore sul contorno ⁽¹³⁾.

Si tratterà ora di dimostrare che da tale successione (13) se ne può estrarre un'altra equiconvergente assieme alle derivate prime e seconde in ogni campo interno a D .

5. - Gli integrali (13) essendo limitati, si potrà intanto determinare, avendo le corrispondenti superficie certamente aree limitate (per essere d'area minima), un numero positivo M tale che

$$(14) \quad \iint_D \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} dx dy < M,$$

Siano ora $P(x_0, y_0)$ un punto interno a c , $2r$ la sua minima distanza dal contorno, Σ una circonferenza di centro P e raggio $r' > r$, che preciseremo in seguito, P' e Σ' l'immagine del punto e della circonferenza nella trasformazione (10) relativa alla funzione α_n ; ci riserbiamo peraltro, prima di applicare questa trasformazione, di modificare convenientemente le direzioni degli assi coordinati e portando l'origine in P supporremo senz'altro $x_0 = y_0 = 0$.

Ci proponiamo ora di determinare un limite inferiore per la distanza R di un punto di Σ' da P' , limite che dipenda non dalla funzione α_n considerata, ma solo da r .

⁽¹³⁾ È ben noto che con questa considerazione si dimostra l'unicità di un integrale che assuma dati valori al contorno.

Passando, mediante le formole

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases},$$

a coordinate polari, si ottiene

$$(15) \quad R^2 = r'^2 \sin^2 \vartheta + \left. \int_0^{r'} \frac{1 + q_n^2}{\sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}} d\rho + r' \int_0^{\vartheta} \frac{-(1 + q_n^2) \sin \vartheta + p_n q_n \cos \vartheta}{\sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}} d\vartheta \right|^2,$$

dove il primo integrale è preso lungo l'asse polare e il secondo lungo la circonferenza Σ' ; l'asse polare verrà precisato in modo da assicurare un limite inferiore al primo integrale della (15).

Essendo, per la (14),

$$\iint_{\Gamma} \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} dx dy < M,$$

per ogni campo Γ contenuto in D , sarà in particolare

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\frac{r'}{2}}^{r'} \rho \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} d\rho < M,$$

e si potranno determinare per ogni numero $\alpha < \pi$ infiniti raggi lungo i quali si abbia

$$\int_{\frac{r'}{2}}^{r'} \rho \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} d\rho < \frac{M}{\alpha},$$

da cui

$$\int_0^{r'} \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} d\rho < \frac{2M}{\alpha \cdot r'},$$

Siccome l'insieme dei raggi per i quali non è valida questa disuguaglianza deve avere una misura angolare minore di α , si vede che si potranno scegliere due raggi opposti per i quali valga la disuguaglianza soprascritta. Assumeremo uno di questi come asse polare. Osservando ora che, per la disuguaglianza di SCHWARZ si ha

$$\int_0^{r'} \frac{d\rho}{\sqrt{1+p_n^2+q_n^2}} \cdot \int_0^{r'} \sqrt{1+p_n^2+q_n^2} d\rho \geq r'^2,$$

si deduce, in definitiva,

$$\int_0^{r'} \frac{d\rho}{\sqrt{1+p_n^2+q_n^2}} > A,$$

tanto per $\vartheta = 0$ che per $\vartheta = \pi$, dove A è un numero positivo che dipende solamente da r .

A maggior ragione si avrà:

$$\int_0^{r'} \frac{1+q_n^2}{\sqrt{1+p_n^2+q_n^2}} d\rho > A.$$

Cerchiamo ora un limite superiore per il secondo integrale della (15), suppostovi ϑ convenientemente piccolo. Consideriamo un settore di corona circolare Δ , limitato da $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = -\vartheta_0$ e dalle circonferenze $\rho = r$, $\rho = r + \vartheta_0$; si può prendere ϑ_0 così piccolo che l'oscillazione di x_n , in tale settore, sia minore di un numero arbitrariamente piccolo, e ciò in virtù dell'equicontinuità delle funzioni x_n . L'area del pezzo di superficie integrale che si proietta in Δ sarà minore della superficie totale del cilindro avente per base il settore stesso e per altezza l'oscillazione della

funzione, e si potrà perciò, dato comunque un numero $\lambda > 0$, determinare ϑ_0 in modo che si abbia:

$$\iint_{\Delta} \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} dx dy \leq \lambda \vartheta_0;$$

questa disuguaglianza implica che sia, per infiniti valori di ρ fra r ed $r + \vartheta_0$,

$$\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} d\vartheta \leq \frac{\lambda}{\rho}.$$

Scegliamo ora per λ un valore minore di $\frac{A}{2}$, e per r' un valore ρ tale che sussista la disuguaglianza precedente. Essendo, per $|\vartheta| \leq \vartheta_0$,

$$r' \int_0^{\vartheta} \frac{-(1 + q_n^2) \operatorname{sen} \vartheta + p_n q_n \cos \vartheta}{\sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}} d\vartheta > -2r' \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} d\vartheta,$$

si avrà

$$r' \int_0^{\vartheta} \frac{-(1 + q_n^2) \operatorname{sen} \vartheta + p_n q_n \cos \vartheta}{\sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}} d\vartheta > -2\lambda,$$

e in definitiva

$$\int_0^{r'} \frac{1 + q_n^2}{\sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}} d\rho + r' \int_0^{\vartheta} \frac{-(1 + q_n^2) \operatorname{sen} \vartheta + p_n q_n \cos \vartheta}{\sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}} d\vartheta > A - 2\lambda,$$

per $|\vartheta| \leq \vartheta_0$. Analogamente, invertendo la direzione dell'asse

polare, si stabilirà questa disuguaglianza per $|\vartheta - \pi| \leq \vartheta_0$ ⁽¹⁴⁾. Allora dalla (15) per $|\vartheta| > \vartheta_0$ e $|\pi - \vartheta| > \vartheta_0$ si deduce $R > r' \operatorname{sen} \vartheta_0$, mentre per $|\vartheta| \leq \vartheta_0$ si ha $R > A - 2\lambda$ e quindi, in ogni caso, R si mantiene superiore ad un numero δ che dipende solo da r . Si vede così, ricordando proprietà fondamentali delle funzioni armoniche, che si potranno assegnare per le derivate successive, in P' , delle funzioni $x_n(\xi, \eta)$, delle limitazioni dipendenti non da n , ma soltanto dalla distanza da c del punto P . Ne seguono limitazioni analoghe per le derivate in P di $x_n(x, y)$ che si deducono dalle formule

$$\frac{\partial x_n}{\partial \xi} = \frac{p_n}{1 + q_n^2}, \quad \frac{\partial x_n}{\partial \eta} = \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} \frac{q_n}{1 + q_n^2},$$

con successive derivazioni. Occorre però assicurare a priori la regolarità uniforme delle trasformazioni (12) considerate; cioè mostrare che le quantità

$$k_n(\xi, \eta) = \frac{\partial x_n}{\partial \xi} - i \frac{\partial x_n}{\partial \eta},$$

conservano dai valori singolari $+i$, $-i$ distanze che si possono limitare inferiormente in funzione di r , sicchè p_n e q_n sono limitabili a priori, sempre in funzione di r . Procedendo per assurdo, supponiamo p. es. $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(0, 0) = i$; ne segue, poichè k_n è una funzione analitica di $\xi + i\eta$, che non può assumere il valore i ed è limitata in un cerchio Γ'_1 di centro P' e raggio $\delta_1 < \delta$, $\lim k_n = i$ uniformemente in tutto Γ'_1 . Quindi l'immagine Γ_1 di Γ'_1 in D dovrà tendere al segmento $(-\delta_1, \delta_1)$ dell'asse x . Sia allora Q il quadrato $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$, $-\epsilon \leq y \leq \epsilon$ con ϵ arbitrariamente piccolo: l'area del campo Q' corrispondente a Q in D' sarà

$$A = \iint_{Q'} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} dx dy =$$

(14) Riducendo ancora ϑ_0 , se occorre.

$$= \iint_Q \frac{1 + q_n^2}{\sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}} dx dy \leq \iint_Q \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2} dx dy,$$

ed il rapporto $\frac{A}{\varepsilon}$ dovrà avere, per n abbastanza grande, un limite inferiore positivo fisso. Ma ciò è impossibile, perchè l'area della porzione di superficie α_n che si proietta in Q è infinitesima con ε più rapidamente di ε stesso, come si vede ripetendo il ragionamento fatto poc' anzi sul settore di corona circolare Δ . Da quanto finora detto discende che in ogni campo tutto interno a D , i cui punti abbiano cioè una distanza dal contorno c maggiore di una quantità d , piccola a piacere, risultano limitate le derivate prime seconde e terze delle funzioni della successione (13).

Considerando ora una successione di campi

$$D_1 < D_2 < \dots < D_n < \dots,$$

che invadono il campo D , si potrà estrarre dalla (13) una successione

$$\alpha_{k_{11}}, \alpha_{k_{12}}, \dots, \alpha_{k_{1n}}, \dots,$$

convergente uniformemente, assieme alle derivate prime seconde, nel campo D_1 , e poi da questa una nuova successione

$$\alpha_{k_{21}}, \alpha_{k_{22}}, \dots, \alpha_{k_{2n}}, \dots,$$

convergente analogamente nel campo D_2 , e così di seguito.

La successione

$$\alpha_{k_{11}}, \alpha_{k_{22}}, \dots, \alpha_{k_{nn}}, \dots,$$

estratta diagonalmente dalle precedenti, avrà sempre per limite la funzione $\alpha(x, y)$; questa sarà pertanto dotata di derivate prime e seconde continue internamente a D e verificanti la (1).

Resta dimostrata dunque l'esistenza di un integrale della (1), in un campo limitato da un contorno c regolare del terzo ordine e a curvatura positiva, che si riduce su c ad una funzione continua arbitraria.

6. - Si vede che nella limitazione delle derivate successive di z internamente al campo D , questo non ha parte essenziale. I limiti di cui si è dimostrata l'esistenza dipendono solo dalla distanza r del punto considerato dal contorno, dal massimo di $|z|$, e dall'area della superficie; supposto tuttavia di considerare soltanto una famiglia di funzioni equicontinue.

Quindi il metodo precedente potrà applicarsi anche a costruire, in un campo D limite di una successione D_1, D_2, \dots , un integrale z della (1) come limite di integrali z_n definiti nei campi D_n mediante valori al contorno che tendono a quelli prefissati per z . Però bisognerà dimostrare in precedenza la convergenza uniforme di z_n verso z (o ciò che è lo stesso, l'equicontinuità delle funzioni z_n).

P. es., se i campi D_n hanno contorni, regolari del 3° ordine, a curvatura inferiormente limitata da un numero positivo fisso, e se i valori al contorno delle z_n sono uniformemente limitati con le derivate seconde, si potranno limitare a priori le derivate prime delle z_n ed assicurare in tal modo l'equicontinuità. Si otterranno allora soluzioni della (1) in D relative ad una classe di valori al contorno da cui si passerà, col metodo precedente, a valori al contorno continui arbitrari.

Si dimostrerà così l'esistenza di un integrale della (1), con valori al contorno soltanto continui, in un campo convesso D limitato da una linea che non presenti in nessun punto curvatura nulla.

Si potrebbe passare in ultimo ad un contorno convesso qualunque; occorrerebbe però qualche considerazione un po' delicata, che tralascieremo, per conservare a questa trattazione il suo carattere in un certo senso elementare.
