RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ATTILIO PALATINI

Concetto di vettore generalizzato prodotto interno, prodotto esterno, divergenza e rotore. Teoremi generali della divergenza, del rotore e di Stockes

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 4 (1933), p. 122-139

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1933__4__122_0>

CONCETTO DI VETTORE GENERALIZZATO PRODOTTO INTERNO, PRODOTTO ESTERNO, DIVERGENZA E ROTORE. TEOREMI GENERALI DELLA DIVERGENZA, DEL ROTORE E DI STOCKES.

di ATTILIO PALATINI *a Pavia*

Lo scopo del presente lavoro è quello di introdurre o precisare, in una varietà di natura e dimensioni qualunque, i concetti: di vettore generalizzato, prodotto interno, prodotto esterno, divergenza e rotore e di estendere in corrispondenza i teoremi della divergenza e del rotore e il teorema di Stockes.

Alcune estensioni del concetto di vettore sono state già fatte, specie con i plurivettori: anzi a questo proposito ricordo alcuni recenti lavori di M. MANARINI (1), che istituisce in un S_n, con i metodi delle omografie vettoriali, un calcolo plurivettoriale, il quale può farsi rientrare, come caso particolare, in quello da me ora istituito.

1. Vettore generalizzato. - Sia data una varietà V_n caratterizzata, nelle variabili $x^1, x^2, \dots, x^n$, dal quadrato dell'elemento lineare (2)

(1) M. MANARINI, *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n e applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi*, [Annali di Matematica, Serie IV, Tomo XII, 1933, pp. 75-115]; *Rotazionale di un vettore negli spazi S_n*, [Rend. R. Acc. dei Lincei, Serie VI, Vol. XVII, 1933, pp. 706-712]; *Sulla divergenza dei plurivettori negli spazi S_n*, [ibidem, pp. 799-803].

(2) Tralascio di scrivere il simbolo di sommatoria in accordo all'uso ormai corrente.

(1) $$ds^2 = a_{ik}\, dx^i\, dx^k\,;$$

il discriminante di questa forma sarà indicato, al solito, con a.

Chiamerò *vettore generalizzato* o *vettore di ordine* m o semplicemente *vettore*, ogni tensore emisimmetrico di ordine m, associato al ds^2 della varietà V_n. Tale ente sarà rappresentato con una lettera in grassetto munita di un esponente che ne indichi l'ordine, come ad es. $\mathbf{Y}^m$. Un vettore sarà indifferentemente caratterizzato dalle sue componenti covarianti $Y_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ o controvarianti $Y^{i_1 i_2 \ldots i_m}$; naturalmente farò uso delle une o delle altre a seconda del bisogno o della convenienza. Come casi limiti si ha: per $m = 1$ il vettore (di 1^0 ordine) nel senso ordinario; per $m=0$ un invariante, che però diremo anche vettore di ordine zero.

In ogni varietà ad n dimensioni vi è sempre un vettore di ordine n e cioè il vettore $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ le cui componenti covarianti $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ sono nulle ogniqualvolta anche due soli indici coincidono e, quando tutti gli indici sono distinti, sono eguali a $\pm\sqrt{a}$ secondochè la permutazione $i_1 i_2 \ldots i_n$ è di classe pari o dispari rispetto alla permutazione fondamentale $1\ 2 \ldots n$.

In una V_n ogni vettore di ordine n non può differire dal vettore $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ se non per un fattore moltiplicativo invariante. Non esistono vettori di ordine maggiore di n.

2. Prodotto interno. Modulo di un vettore. - Siano dati due vettori $\mathbf{Y}^m$ e $\mathbf{X}^p$ di ordini m e p rispettivamente e sia, per fissare le idee, $m \geq p$. Chiamerò *prodotto interno* dei due vettori e lo indicherò con $\mathbf{Y}^m \times \mathbf{X}^p$ il vettore di ordine $m-p$ di componenti

$$\frac{1}{p\,!}\, Y^{i_1 \ldots i_{m-p}\, r_1 \ldots r_p}\, X_{r_1 r_2 \ldots r_p}\,.$$

Il prodotto interno di due vettori non è dunque che una particolare operazione di composizione di due tensori, in cui si saturano tutti gli indici possibili.

Se $m = p$ il prodotto interno è un invariante: in particolare se $m = p = 1$ questo prodotto si riduce all'ordinario prodotto scalare di due vettori.

Il prodotto interno conserva significato anche quando uno dei due vettori (o tutti e due) è di ordine zero, riducendosi in tal caso al prodotto di un numero per un vettore.

Le proprietà del prodotto interno sono quelle del prodotto ordinario: in particolare esso è invertibile.

Chiamerò *modulo* di un vettore la radice quadrata del prodotto interno del vettore per sè stesso: quindi

$$|\mathbf{Y}^m|^2 = \mathbf{Y}^m \times \mathbf{Y}^m = \frac{1}{m!} Y^{i_1 i_2 \dots i_m} Y_{i_1 i_2 \dots i_m},$$

formula che generalizza quella secondo la quale il quadrato del modulo di un vettore è la somma dei quadrati delle sue componenti.

Quando il modulo risulta eguale ad 1 diremo che il vettore è *unitario*.

Il vettore ε^n è, ad esempio, unitario, perchè è noto che

$$|\varepsilon^n|^2 = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1.$$

Questa formula non è che un caso particolare di altra, che qui cito perchè ne farò uso in seguito,

$$\varepsilon^{r_1 r_2 \dots r_m i_1 i_2 \dots i_{n-m}} \varepsilon_{s_1 s_2 \dots s_m i_1 i_2 \dots i_{n-m}} = \tag{2}$$

$$= (n-m)!\, \delta^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_m}.$$

Il tensore δ è il cosidetto simbolo di Kronecker: le sue componenti sono tutte nulle eccetto quelle in cui le due permutazioni $r_1 r_2 \dots r_m$, $s_1 s_2 \dots s_m$ sono formate con gli stessi indici, ma questi sono tutti distinti tra loro: in questo caso il simbolo ha valore ± 1 secondochè una delle due permutazioni ha classe pari o dispari rispetto alla seconda.

3. Vettore supplementare. - Chiamerò *vettore supplementare* di un vettore $\mathbf{Y}^m$ il prodotto scalare di $\mathbf{Y}^m$ per il vettore

ε^n. Si converrà di rappresentarlo con la medesima lettera sopralineata e perciò, poichè il suo ordine è $n - m$, si avrà

$$\overline{\mathbf{Y}}^{n-m} = \varepsilon^n \times \mathbf{Y}^m ,$$

e con riferimento alle componenti [3]

$$\overline{Y}^{r_1 r_2 \ldots r_{n-m}} = \frac{1}{m!} \varepsilon^{r_1 r_2 \ldots r_{n-m} i_1 i_2 \ldots i_m} Y_{i_1 i_2 \ldots i_m} .$$

È facile osservare, facendo un semplice calcolo, che il modulo del supplementare coincide col modulo del vettore primitivo: quindi, in particolare, se il primo è unitario, lo è anche il secondo.

Come caso limite si trova che il supplementare del vettore ε^n è 1 e che il supplementare di un vettore di ordine zero φ è il vettore $\varphi \varepsilon^n$.

Se si calcola il supplementare del supplementare si trova facilmente la formula

$$\overline{\overline{\mathbf{Y}}}^m = (-1)^{m(n-m)} \mathbf{Y}^m ,$$

cioè il supplementare del supplementare di un vettore coincide col vettore primitivo, cambiato o no di segno secondochè $m(n-m)$ è dispari o pari.

4. Prodotto esterno. – Chiamo *prodotto esterno* di due vettori $\mathbf{Y}^m$ e $\mathbf{X}^p$, nell'ordine indicato, il prodotto interno del supplementare del primo per il secondo: esso sarà indicato con $\mathbf{Y}^m \wedge \mathbf{X}^p$, quindi, per definizione,

$$\mathbf{Y}^m \wedge \mathbf{X}^p = \overline{\mathbf{Y}}^{n-m} \times \mathbf{X}^p .$$

[3] I vettori che qui sono chiamati supplementari sono stati indicati col nome di coniugati dalla Sig.na M. Pastori, *Tensori emisimmetrici coniugati*, [Rend. R. Acc. dei Lincei, Serie VI, Vol. XVI, 1932, pp. 216-229]; *Proprietà dei tensori emisimmetrici coniugati* [ibidem, pp. 311-316].

Supposto $m + p \leq n$, le componenti del prodotto vettoriale dei due vettori $\mathbf{Y}^m$ e $\mathbf{X}^p$ sono

$$(3) \qquad \frac{1}{m!\,p!}\,\varepsilon^{r_1 \dots r_{n-p-m}\, i_1 \dots i_p\, k_1 \dots k_m}\, \mathbf{Y}_{k_1 \dots k_m}\, \mathbf{X}_{i_1 \dots i_p}\,.$$

Se si fa il prodotto di $\mathbf{X}^p$ per $\mathbf{Y}^m$ si trovano per le componenti le espressioni

$$(4) \qquad \frac{1}{m!\,p!}\,\varepsilon^{r_1 \dots r_{n-m-p}\, k_1 \dots k_m\, i_1 \dots i_p}\, \mathbf{X}_{i_1 \dots i_p}\, \mathbf{Y}_{k_1 \dots k_m}\,.$$

Con $m p$ scambi si può far in modo che gli indici k, che compariscono in ε, seguano gli indici i, perciò, essendo ε un tensore emisimmetrico, le (4) differiscono dalle (3) solo per il fattore $(-1)^{mp}$. Ne concludiamo che il prodotto vettoriale di due vettori cambia di segno se tutti e due i vettori sono di ordine dispari, rimane invece invariato se almeno uno dei due è di ordine pari.

Se $n = 3$ ed $m = p = 1$ il prodotto ora definito coincide con l'ordinario prodotto vettoriale di due vettori (di 1⁰ ordine).

In generale l'ordine di un prodotto vettoriale è $n - m - p$, quindi dipende dalle dimensioni della varietà; esso si riduce ad un numero se $n = m + p$, che è lo zero se m e p sono ambedue dispari (e quindi ciò può avvenire solo nelle varietà di dimensioni pari).

Nell'ipotesi che sia $m + p > n$ si possono svolgere considerazioni analoghe.

5. Divergenza. – Si chiama *divergenza* di un vettore $\mathbf{Y}^m$ di ordine m [div $\mathbf{Y}^m$] il vettore di ordine $m - 1$ di componenti

$$\mathbf{Y}^{i_1 \dots i_{m-1}\, k}{}_{/k}\,,$$

dove gli indici che seguono la lineetta si riferiscono a derivazioni covarianti fatte rispetto alla forma (1).

Poichè $Y^{i_1 \dots i_m}$ è un tensore emisimmetrico, si ha la formula nota

$$(5) \qquad Y^{i_1 \dots i_{m-1} k}{}_{/k} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \left(\sqrt{a}\, Y^{i_1 \dots i_{m-1} k}\right)}{\partial x^k},$$

la quale contiene, come caso particolare, per $m = 1$, l'altra notissima

$$Y^k{}_{/k} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \left(\sqrt{a}\, Y^k\right)}{\partial x^k}.$$

Non ha naturalmente significato parlare della divergenza di un vettore di ordine zero.

Se il vettore è di ordine n, esso, come abbiamo già rilevato, è del tipo $\varphi\, \varepsilon^n$, dove φ è un invariante: le sue componenti sono quindi

$$\varphi\, \varepsilon^{i_1 \dots i_n},$$

e la corrispondente divergenza è

$$(6) \qquad \varepsilon^{i_1 \dots i_{n-1} k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

6. Rotore. - Chiamerò *rotore* di un vettore $\mathbf{Y}^m$ [rot $\mathbf{Y}^m$] la divergenza del suo supplementare ([4]), quindi con le notazioni adottate

$$\text{rot } \mathbf{Y}^m = \text{div } \overline{\mathbf{Y}}^{n-m}.$$

Si può constatare facilmente che per $n = 3$ ed $m = 1$ il rotore definito coincide col rotore di un vettore nel senso ordinario.

Se $m = n$ il supplementare di $\mathbf{Y}^n$ è un invariante, quindi non ha significato parlare di rotore di un vettore di ordine n.

([4]) È stata già proposta dal Cisotti una generalizzazione del concetto di rotore [U. Cisotti, *Sul rotore dei tensori*. Rend. R. Acc. dei Lincei, Serie VI, Vol. VII. 1928, pp 169-172], ma tale estensione non sembra prestarsi alla conseguente generalizzazione dei teoremi a cui si riferisce il rotore. Vedi a questo proposito anche le già citate note della Sig.na Pastori.

Ha invece significato parlare del rotore di un vettore di ordine zero φ: le sue componenti sono date dalla (6).

Come applicazione delle definizioni poste si può osservare che vale la formula

$$\operatorname{div}(\mathbf{Y}^m \wedge \mathbf{X}^p) = (-1)^p\, \mathbf{X}^p \times \operatorname{rot} \mathbf{Y}^m + (-1)^{m(p+1)}\, \mathbf{Y}^m \times \operatorname{rot} \mathbf{X}^p ,$$

che generalizza l'analoga formula nota per la divergenza del prodotto vettoriale di due vettori di 1° ordine.

7. Vettori a divergenza nulla. - Occupandomi dei tensori emisimmetrici io ho dimostrato ([5]) un teorema, che si può ora enunciare così: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un vettore di ordine m abbia divergenza nulla è che esso sia la divergenza di un vettore arbitrario di ordine $m+1$.* Quindi se $\mathbf{Y}^m$ è il vettore dato ed $\mathbf{X}^{m+1}$ un altro vettore arbitrario, le due equazioni

$$\operatorname{div}.\ \mathbf{Y}^m = 0 , \qquad \mathbf{Y}^m = \operatorname{div} \mathbf{X}^{m+1} , \tag{7}$$

sono conseguenza l'una dell'altra.

Sia ora $\mathbf{A}^{n-m-1}$ il vetttore il cui supplementare è $\mathbf{X}^{m+1}$: si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}^{n-m-1} = \operatorname{div} \mathbf{X}^{m+1} ,$$

quindi le (7) possono essere sostituite dalle

$$\operatorname{div} \mathbf{Y}^m = 0 , \qquad \mathbf{Y}^m = \operatorname{rot} \mathbf{A}^{n-m-1} , \tag{8}$$

cioè, *ogni vettore di ordine m a divergenza nulla è il rotore di un vettore arbitrario di ordine $n-m-1$ e reciprocamente.*

Per $n=3$ ed $m=1$ e quindi $n-m-1=1$, si ha l'ordinario noto teorema sui vettori (di 1° ordine) a divergenza nulla.

Nelle (7) si deve escludere il caso $m=n$: in tale ipotesi

([5]) A. Palatini, *Sulla divergenza dei tensori emisimmetrici e dei vettori*, [Rend. R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. LXII, 1929, pp. 281-286].

il vettore a divergenza nulla non è che il vettore ε^n moltiplicato per una costante.

8. Vettori a rotore nullo. - Sia ora $\mathbf{Y}^m$ un vettore a rotore nullo, cioè sia

$$\text{rot. } \mathbf{Y}^m = 0 \,. \tag{9}$$

Se $\overline{\mathbf{Y}}^{n-m}$ è il vettore supplementare di $\mathbf{Y}^m$, questa equazione equivale all'altra

$$\text{div } \overline{\mathbf{Y}}^{n-m} = 0 \,,$$

la quale, per la (8), trae con sè

$$\overline{\mathbf{Y}}^{n-m} = \text{rot } \mathbf{A}^{m-1} \,,$$

se $\mathbf{A}^{m-1}$ è un vettore arbitrario di ordine $m-1$. Passando alle componenti e tralasciando i fattori numerici che si possono conglobare nelle funzioni arbitrarie A, quest' ultima equazione equivale alla

$$\varepsilon^{i_1 \,..\, i_{n-m}\, r_1 r_2 \dots r_m} Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = \varepsilon^{i_1 \dots i_{n-m}\, r_1 r_2 \dots r_m} A_{r_1 r_2 \dots r_{m-1}/r_m} .$$

Se si moltiplica internamente per $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-m}\, k_1 k_2 \dots k_m}$, per la (2) si trova

$$Y_{k_1 k_2 \dots k_m} = \delta^{r_1 r_2 \dots r_m}_{k_1 k_2 \dots k_m} A_{r_1 r_2 \dots r_{m-1}/r_m} . \tag{10}$$

Ne concludiamo che le (9) e (10) sono conseguenza l'una dell'altra, cioè che *i vettori a rotore nullo sono quelli le cui componenti sono date dalla* (10) *e reciprocamente.*

Si osservi che il secondo membro della (10) si può considerare come la somma del tensore $A_{r_1 r_2 \dots r_{m-1}/r_m}$ e degli altri che si deducono da questo con una permutazione circolare degli indici, presi tutti col segno $+$ se m è dispari, con segni alternati se m è pari.

La (10) per $m = 1$ si riduce a

$$Y_i = \frac{\partial A}{\partial x^i},$$

dove A è una funzione arbitraria, donde il teorema ben noto che se un vettore (di 1° ordine) è a rotore nullo, esso è il gradiente di una funzione.

Il vettore $\delta^{r_1 \dots r_m}_{k_1 \dots k_m} A_{r_1 \dots r_{m-1}/r_m}$ appare perciò, per un vettore di ordine superiore ad 1, come la generalizzazione del gradiente e si potrà allora scrivere e dire che le due equazioni

$$\text{rot}\, \mathbf{Y}^m = 0\,, \qquad \mathbf{Y}^m = \text{grad}\, \mathbf{A}^{m-1}$$

sono conseguenza l'una dell'altra.

9. Teorema della divergenza. - Sia S una regione della varietà V_n limitata dalla ipersuperficie σ e diciamo dS l'elemento di volume e $d\sigma$ l'elemento ipersuperficiale di σ. Sia $\mathbf{Y}^m$ un vettore di ordine m e si consideri l'integrale della sua divergenza esteso alla regione S, cioè per la (5),

$$\int_S \mathbf{Y}^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} k}{}_{/k}\, dS = \int_S \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial (\sqrt{a}\, \mathbf{Y}^{i_1 \dots i_{m-1} k})}{\partial x^k} dS\,.$$

Poichè $dS = \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 \dots dx^n$, il secondo membro si trasforma in un integrale ipersuperficiale con procedimenti noti anche nel caso delle varietà V_n e si trova (6)

$$\int_S \mathbf{Y}^{i_1 \dots i_{m-1} k}{}_{/k}\, dS = \int_\sigma \mathbf{Y}^{i_1 \dots i_{m-1} k}\, \chi_k\, d\sigma\,,$$

se si denotano con χ_k le componenti covarianti di un vettore unitario χ diretto secondo la normale esterna all'ipersuperficie σ.

La formula precedente si può scrivere anche sotto la forma

(6) Naturalmente qui non si fa questione sul comportamento delle funzioni integrande: si suppone che tutto sia regolare.

$$\int_S \operatorname{div} \mathbf{Y}^m \, dS = \int_\sigma \mathbf{Y}^m \times \chi \, d\sigma \tag{11}$$

e costituisce un'ovvia generalizzazione del noto teorema della divergenza, esteso alle varietà di natura e dimensioni qualunque e ai vettori di ordine pure qualunque.

Se $m = n$ il vettore div $\mathbf{Y}^n$ ha le componenti date dalle (6), quindi in questo caso si ha

$$\int_S \varepsilon^{i_1 \ldots i_{n-1} k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} dS = \int_\sigma \varphi \, \varepsilon^{i_1 \ldots i_{n-1} k} \chi_k \, d\sigma \, . \tag{12}$$

Tenendo conto delle sole componenti non nulle si vede subito che questa formula equivale all'altra

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \, dS = \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{a}} \varphi \chi_i \, d\sigma \, ,$$

che costituisce il teorema generalizzato del gradiente: tale teorema è perciò espresso sotto forma invariantiva dalla (12).

Dalla (11) si può dedurre il seguente corollario. Sia $\mathbf{Y}^m$ un vettore a divergenza nulla: si avrà

$$\int_\sigma \mathbf{Y}^m \times \chi \, d\sigma = 0 \, .$$

Ma un vettore a divergenza nulla è la divergenza di un vettore arbitrario di ordine $m+1$, quindi per ogni vettore arbitrario di ordine $p > 1$ si ha

$$\int_\sigma \operatorname{div} \mathbf{A}^p \times \chi \, d\sigma = 0 \, .$$

Altri corollari si possono trarre dalla (11) assumendo il vettore $\mathbf{Y}^m$ come prodotto interno o esterno di due altri vettori. Mi limito ad accennare al più semplice. Se si assume

$$\mathbf{Y}^m = \varphi\, \mathbf{X}^m,$$

si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{Y}^m = \varphi \operatorname{div} \mathbf{X}^m + \mathbf{X}^m \times \operatorname{grad} \varphi,$$

quindi per la (11),

$$\int_S \{\varphi \operatorname{div} \mathbf{X}^m + \mathbf{X}^m \times \operatorname{grad} \varphi\}\, dS = \int_\sigma \varphi\, \mathbf{X}^m \times \chi\, d\sigma.$$

E se $\mathbf{X}^m$ è a divergenza nulla

$$\int_S \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{X}^m\, dS = \int_\sigma \varphi\, \mathbf{X}^m \times \chi\, d\sigma,$$

ossia per ogni vettore arbitrario di ordine $p > 1$,

$$\int_S \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{div} \mathbf{A}^p\, dS = \int_\sigma \varphi\, \chi \times \operatorname{div} \mathbf{A}^p\, d\sigma.$$

10. Teorema del rotore. - Sia $\mathbf{X}^p$ un vettore di ordine p e si ponga

$$\overline{\mathbf{X}}^{n-p} = \mathbf{Y}^m,$$

essendo, al solito, $\overline{\mathbf{X}}^{n-p}$ il supplementare di $\mathbf{X}^p$.

Per le definizioni poste si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{X}^p = \operatorname{div} \mathbf{Y}^m,$$

$$\mathbf{X}^p \wedge \chi = \mathbf{Y}^m \times \chi.$$

Ne segue che la (11) si può servire sotto la forma

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{X}^p\, dS = \int_\sigma \mathbf{X}^p \wedge \chi\, d\sigma.$$

Questa formula costituisce la generalizzazione del teorema del rotore, il quale quindi non è che un aspetto particolare del teorema generalizzato della divergenza.

11. Caso $n = 2$. - In una varietà V_2 non si possono avere che vettori di ordine 0, 1, 2, quindi in una V_2 si possono avere le sole formule seguenti:

$$\int_S \varepsilon^{ki} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dS = \int_\sigma \varphi \, \varepsilon^{ki} \chi_i \, d\sigma , \tag{13}$$

$$\int_S Y^i{}_{/i} \, dS = \int_\sigma Y^i \chi_i \, d\sigma , \tag{14}$$

$$\int_S \varepsilon^{ik} Y_{k/i} \, dS = \int_\sigma \varepsilon^{ik} Y_k \chi_i \, d\sigma , \tag{15}$$

nelle quali S rappresenta una regione di V_2, σ il suo contorno e χ il vettore unitario normale a σ (ma appartenente a V_2).

Le formule (13), (14) (15) costituiscono per una V_2 i teoremi del gradiente, della divergenza e del rotore. Teoremi del genere sono stati da qualche anno stabiliti dal prof. Burgatti [7], ma le formule da lui date, pur riferendosi ad una V_2, fanno intervenire elementi non intrinsechi alla V_2 stessa, qual'è la normale alla superficie.

Per applicare le (14) e (15), si consideri il vettore $\boldsymbol{v}$ le cui componenti controvarianti v^1, v^2 rappresentano le curvature geodetiche delle linee $x^1 = \text{cost}$, $x^2 = \text{cost}$. Allora è noto che

$$v^i{}_{/i} = \operatorname{div} \boldsymbol{v} = K ,$$

[7] P. Burgatti, *I teoremi del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie* [Memorie della R. Acc. delle Scienze di Bologna, Serie VII, Tomo IV, 1917, pp. 103-112].

se K è l'invariante di GAUSS. La (14) dà quindi il teorema noto sulla *curvatura integra*

$$\int_S K\, dS = \int_\sigma v^i \chi_i\, d\sigma .$$

Invece

$$\varepsilon^{ik} \; v_{k/i} = \operatorname{rot} v = \vartheta ,$$

rappresenta quell'invariante chiamato *anisotermia* del sistema di linee $x^1 = \text{cost}$, $x^2 = \text{cost}$, il cui annullarsi esprime che tale sistema è isotermo.

Per la (15) si ha

$$\int_S \vartheta\, d S = \int_\sigma \varepsilon^{ik} \; v_k \; \chi_i \, d\sigma .$$

Come corollario da qui si deduce che se il sistema coordinato è isotermo

$$\int_\sigma \frac{v_1 \chi_2}{\sqrt{a}} d\sigma = \int_\sigma \frac{v_2 \chi_1}{\sqrt{a}} d\sigma .$$

12. Vettore normale ad una V_m immersa in una V_n. - In una V_n ad n dimensioni consideriamo una V_m ad m dimensioni definita dalle equazioni

$$x^i = x^i\,(u^1, u^2, \ldots, u^m)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Il quadrato dell'elemento lineare di V_m è, notoriamente,

$$ds^2 = b_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m), \tag{16}$$

dove

$$b_{\alpha\beta} = a_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} , \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Come abbiamo usato in queste formule delle lettere greche per denotare degli indici suscettibili di assumere i valori $1, 2, \ldots, m$, così adotteremo costantemente questa convenzione anche nel seguito, cioè adopreremo lettere greche per gli indici di covarianza o controvarianza di elementi riferentisi alla V_m. Questa convenzione permetterà di evitare confusioni: ad esempio, il sistema $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ che finora abbiamo adoperato, non si potrà confondere con il sistema $\varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$, il quale, con riferimento alla (16), consta di elementi nulli se alcune delle α coincidono, mentre se le α sono tutte distinte ha gli elementi eguali a $\pm\sqrt{b}$ dove b è il determinante della $b_{\alpha\beta}$.

È noto che le normali ad una V_m di una V_n formano un S_{n-m}. Questo spazio si può ritenere caratterizzato dal vettore unitario χ^{n-m} di ordine $n-m$ di componenti

$$(17) \qquad \chi_{r_1 r_2 \ldots r_{n-m}} = \frac{1}{m!} \varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \varepsilon_{r_1 \ldots r_{n-m} i_1 \ldots i_m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^{\alpha_m}}.$$

Questa formula generalizza quella che dà le componenti del vettore (di 1° ordine) normale ad un'ipersuperficie V_{n-1} di una V_n e perciò chiamerò χ^{n-m} *vettore generalizzato normale* alla V_m.

Assieme al vettore χ^{n-m} interessa considerare anche il suo supplementare η^m di componenti controvarianti

$$(18) \qquad \eta^{s_1 s_2 \ldots s_m} = (-1)^{m(n-m)} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_m}}{\partial u^{\alpha_m}},$$

che appartiene in ogni punto all'S_m tangente a V_m.

13. Proiezione di un vettore di V_n su V_m. - Sia ora dato un vettore Y^p in V_m di componenti controvarianti $Y^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$: le sue componenti in V_n sono

$$Y^{i_1 \ldots i_p} = Y^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^{\alpha_p}},$$

come si ricava tosto dalla definizione di controvarianza.

Se invece $\mathbf{Y}^p$ è un vettore definito in V_n con le sue componenti covarianti $Y_{i_1 \dots i_p}$, il vettore $\mathbf{X}^p$ le cui componenti in V_m sono

$$(19) \qquad X_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = Y_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial u^{\alpha_p}},$$

sarà chiamato il *vettore proiezione* di Y^p su V_m. La ragione del nome proviene da ciò, che la (19) non è che la generalizzazione della formula che dà la proiezione di un vettore ordinario di S_3 sopra una V_2.

Se $\mathbf{Y}^p$ è un vettore appartenente a V_m e di esso si conoscono le componenti in V_n, allora la (17) dà le analoghe componenti in V_m. Ad esempio, il vettore η^m definito in V_n dalle (18) ha in V_m le componenti

$$(20) \qquad \eta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} = \eta_{i_1 \dots i_m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^{\beta_m}}.$$

Fatti i calcoli, si trova nel secondo membro, a meno del segno, $\varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_m}$, quindi il vettore η^m coindide col vettore ε^m. Dunque: *il vettore ε^m di una varietà V_m è il supplementare del vettore unitario generalizzato normale alla V_m considerata immersa in una V_n qualunque.*

14. Teorema di Stockes. - In una V_n si può stabilire, almeno dal lato formale, un teorema di Stockes affatto generale, sia per la scelta della V_m a cui ci si vuol riferire, sia per la scelta dell'ordine del vettore. Per non complicare troppo le cose, limitiamoci al caso seguente, già sufficientemente generale.

Si consideri una V_m immersa in V_n e un vettore $\mathbf{Y}^{m-1}$ di ordine $m-1$ e la sua proiezione $\mathbf{X}^{m-1}$ su V_m. Le componenti di $\mathbf{X}^{m-1}$ in V_m e quelle di $\mathbf{Y}^{m-1}$ in V_n sono legate dalle relazioni (19):

$$(21) \qquad X_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}} = Y_{i_1 \dots i_{m-1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_{m-1}}}{\partial u^{\alpha_{m-1}}}.$$

Si consideri ora il rotore di $\mathbf{X}^{m-1}$ in V_m e quindi, a meno del fattore $(-1)^{m-1}/(m-1)!$, il vettore di componenti

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m} X_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}/\alpha_m}:$$

l'indice α_m dopo la sbarra designa una derivazione covariante fatta in V_m.

Se si sostituiscono al posto delle derivate covarianti le loro effettive espressioni, in causa dell'emisimmetria del tensore ε, le ultime espressioni si mutano in

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m} \frac{\partial X_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}}{\partial u^{\alpha_m}}.$$

Sostituendo alle X le loro espressioni (21), sempre in causa dell'emisimmetria di ε, si ottiene

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m} \frac{\partial Y_{i_1 \dots i_{m-1}}}{\partial x^{i_m}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{i_{m-1}}}{\partial u^{\alpha_{m-1}}} \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^{\alpha_m}},$$

od ancora

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_m} Y_{i_1 \dots i_{m-1}/i_m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^{\alpha_m}},$$

od infine per le (17)

$$\frac{1}{(n-m)!} \varepsilon^{r_1 \dots r_{n-m} i_1 \dots i_m} Y_{i_1 \dots i_{m-1}/i_m} \chi_{r_1 r_2 \dots r_m}.$$

A meno del fattore $(-1)^{m-1}/(m-1)!$ queste sono le componenti del rotore di $\mathbf{Y}^{m-1}$ calcolato in V_n moltiplicato internamente per il vettore χ^{n-m}. Possiamo quindi scrivere

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{rot}_{V_m} \mathbf{X}^{m-1} = \operatorname{rot}_{V_n} \mathbf{Y}^{m-n} \times \chi^{n-m},$$

dove le notazioni hanno evidente significato.

Consideriamo ora una regione S di V_m: sia σ la corrispondente ipersuperficie e ν il vettore unitario normale a σ in V_m.

Formiamo in V_m le componenti del prodotto esterno $\mathbf{X}^{m-1} \wedge \mathbf{v}$. Esse sono

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m} X_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}} \nu_{\alpha_m} \, .$$

che si trasformano per la (21) in

$$(23) \qquad \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{i_{m-1}}}{\partial u^{\alpha_{m-1}}} \nu_{\alpha_m} Y_{i_1 \dots i_{m-1}} .$$

Se si indica con $\boldsymbol{\tau}^{m-1}$ il vettore unitario che ha in V_m le componenti

$$\tau^{i_1 \dots i_{m-1}} = (-1)^{m-1} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1} \alpha_m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{i_{m-1}}}{\partial u^{\alpha_{m-1}}} \nu_{\alpha_m} ,$$

le (23) caratterizzano il prodotto interno

$$\mathbf{Y}^{m-1} \times \boldsymbol{\tau}^{m-1} ,$$

quindi si ha

$$(24) \qquad \mathbf{X}^{m-1} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{Y}^{m-1} \times \boldsymbol{\tau}^{m-1} .$$

Il vettore $\boldsymbol{\tau}^{m-1}$ è il vettore unitario che caratterizza l'S_{m-1} tangente a σ [e quindi coincide col vettore $\boldsymbol{\varepsilon}$ relativo alla σ] e si chiamerà perciò *vettore tangente a* σ.

Tutto ciò premesso, si noti che, avendo indicato con S una regione di V_m e con $\mathbf{v}$ la normale al contorno σ, il teorema del rotore dà

$$\int_S \operatorname{rot}_{V_m} \mathbf{X}^{m-1} \, dS = \int_\sigma \mathbf{X}^{m-1} \wedge \mathbf{v} \, d\sigma .$$

Per le (22) e (24) questa formula si trasforma nell'altra

$$(25) \qquad \int_S \operatorname{rot}_{V_n} \mathbf{Y}^{m-1} \times \boldsymbol{\chi}^{n-m} dS = \int_\sigma \mathbf{Y}^{m-1} \times \boldsymbol{\tau}^{m-1} d\sigma .$$

Se si prende $n = 3$ ed $m = 2$ essa diventa

$$\int_S \mathrm{rot}_{V_3} \, \mathbf{Y} \times \chi \, dS = \int_\sigma \mathbf{Y} \times \tau \, d\sigma \tag{26}$$

dove χ è la normale alla superficie S e τ la tangente al suo contorno σ.

La (26) costituisce l'ordinario teorema di Stockes, esteso alle V_2 immerse in una V_3 di natura qualunque e la (25) costituisce una generalizzazione dello stesso teorema per una V_m immersa in una V_n e per vettori di ordine $m - 1$.