RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UGO MORIN

Contributi alla geometria degli S_k di S_n

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 3 (1932), p. 82-94
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__82_0>

CONTRIBUTI ALLA GEOMETRIA DEGLI S_k DI S_n

di UGO MORIN *a Padova*

Nel presente lavoro espongo alcune proprietà dei sistemi lineari di S_k immersi in un S_n, che ho avuto occasione d'indagare ed approfondire, nel corso d'una ricerca non ancora perfetta.

L'occasione stessa mi ha condotto a completare in qualche punto talune considerazioni contenute in un'importante Memoria del ROSENBLATT (cfr. nota (5)) che alla loro volta son generalizzazioni ai sistemi di S_k di proprietà segnalate dal COMESSATTI (nota (3)) per i sistemi di rette.

Dei risultati ai quali pervengo, segnalo come più notevoli quelli del n.º 8, e la classificazione dei sistemi lineari di S_k di sovrabbondanza massima e dimensione uno, data al n.º 14.

1. - Le coordinate grassmanniane di uno spazio lineare S_k immerso in uno spazio lineare S_n, cioè i determinanti di ordine massimo estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $k+1$ punti (indipendenti) di S_n

$$(1) \qquad P^{(l)}(x_0^{(l)},\ x_1^{(l)}, \ldots\ x_n^{(l)}),\quad (l=0,\ 1, \ldots\ k)$$

saranno indicate con

$$(2) \qquad X_{r_0 r_1 \ldots r_k} = \left(x_{r_0}^{(0)}\, x_{r_2}^{(1)} \ldots\, x_{r_k}^{(k)}\right),$$

o più brevemente con X_i. Le X_i interpretate come coordinate di punto di uno spazio lineare S_N, $N=\binom{n+1}{k+1}-1$, variano sulla varietà grassmanniana V_d, detta di indici (n, k), di dimensione $d=(n-k)(k+1)$ e di ordine

$$\nu = \frac{1!\,2!\ldots k!\,d!}{(n-k)!\,(n-k+1)!\ldots n!}.$$

La V_d appartiene all'S_n, è razionale ed è il modello minimo, proiettivamente individuato, delle varietà normali che rappresentano biunivocamente senza eccezioni gli S_k di S_n (1)

2. - Un *sistema algebrico* ∞^t di S_k dell'S_n è rappresentato entro V_d da una varietà algebrica a t dimensioni V_t, e viceversa.

Se $t = d - 1$ il sistema si dirà un *complesso algebrico* di S_k, e la V_{d-1} corrispondente potrà ottenersi, in base a un teorema fondamentale di Severi (2), come intersezione completa di V_d con una ipersuperficie dell'S_n. Se questa è un iperpiano di equazione

$$\sum_{i=0}^{N} A_i X_i = 0, \tag{3}$$

il complesso si dice *lineare*.

Analogamente un sistema algebrico di S_k sarà detto *lineare*, se la sua imagine V_t è intersezione completa della V_d con uno spazio lineare S_{N-h}.

Se lo spazio secante è generico, la V_t ha la dimensione $t = d - h$ ed appartiene all'S_{N-h}, purchè $t > -1$. Ma per spazi particolari potrà darsi che la dimensione abbia un valore superiore

$$t = d - h + \sigma, \tag{4}$$

oppure che V_t appartenga ad uno spazio di dimensione minore di $N - h$. La seconda eventualità si riduce alla prima sostituendo allo spazio secante l'effettivo spazio d'appartenenza della V_t.

Supponendo che S_{N-h} sia l'effettivo spazio d'appartenenza

(1) Severi F. *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare.* [Annali di Matematica. Ser. III. t. XXIV (1915)].

(2) Severi F. *loco cit.* (1).

della V_t, se nella (4) è $\sigma > 0$ diremo che il sistema lineare è *sovrabbondante* e che σ ne esprime la *sovrabbondanza* [3].

3. - La condizione perchè due spazi duali, S_k ed S_{n-k-1}, di coordinate grassmanniane X_i ed Y_j siano incidenti è, come si vede facilmente,

$$\Sigma\, X_{r_0 r_1 \ldots r_k}\, Y_{r_{k+1} \ldots r_n} = 0\,,$$

la sommatoria essendo estesa a tutte le permutazioni pari $r_0 r_1 \ldots r_n$ degli indici $0, 1, \ldots n$.

Più in generale, perchè un S_k ed un S_h di coordinate X_i ed Y_j si taglino secondo un S_l deve essere soddisfatto il sistema delle equazioni bilineari

$$\Sigma\,(-1)^{\omega}\, X_{r_0 \ldots r_{k-l}\, a \ldots f}\; Y_{s_0 \ldots s_{h-l}\, a \ldots f} = 0, \tag{6}$$

ove l degli indici $0, 1, \ldots n$ sono tenuti fissi, cioè $a \ldots f$, e, presa una combinazione di $k + h - 2l + 2$ degli indici rimanenti, la sommatoria Σ si estenda a tutte le permutazioni di detta combinazione, ω indicandone le rispettive classi: ed il sistema essendo formato dalle diverse equazioni che con questo procedimento si costruiscono [4].

In particotare, la condizione perchè due S_k si taglino in un S_{k-1} è data dalle

$$\begin{aligned} & X_{r_0 r_1 a \ldots f}\, Y_{r_2 r_3 a \ldots f} + X_{r_0 r_2 a \ldots f}\, Y_{r_3 r_1 a \ldots f} + \\ & + X_{r_0 r_3 a \ldots f}\, Y_{r_1 r_2 a \ldots f} + X_{r_2 r_3 a \ldots f}\, Y_{r_0 r_1 a \ldots f} + \\ & + X_{r_3 r_1 a \ldots f}\, Y_{r_0 r_2 a \ldots f} + X_{r_1 r_2 a \ldots f}\, Y_{r_0 r_3 a \ldots f} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Se nelle (6) identifichiamo l'S_h con l'S_k stesso, otteniamo delle equazioni quadratiche cui soddisfano le X_i: equazioni che nello spazio S_N rappresentano delle quadriche. La V_d si presenta,

[3] Questo concetto è stato posto da A. Comessatti nella Nota *Osservazioni di geometria della retta in un S_n* [Atti del Reale Istituto Veneto LXXX (1920-21) Parte seconda].

[4] Segre C. *Mehrdimensionale Räume.* [Encyklopädie der Math. Wiss. (III, C. 7)] pag. 793.

come noto, quale intersezione completa delle quadriche dedotte soltanto dalle (7), di equazioni

$$
(8) \qquad \begin{aligned} & X r_0 r_1 a \dots f \, X r_2 r_3 a \dots f + X r_0 r_2 a \dots f \, X r_3 r_1 a \dots f + \\ & + X r_0 r_3 a \dots f \, X r_1 r_2 a \dots f = 0, \end{aligned}
$$

di modo che $N + 1$ numeri arbitrari X_i, non tutti nulli, soddisfacenti alle equazioni (8) possono considerarsi come le coordinate grassmanniane di un determinato S_k dell'S_n.

4. - Interpretando nelle (5) le Y_j come costanti e le X_i come variabili, otteniamo l'equazione di un complesso lineare costituito da tutti gli S_k incidenti un S_{n-k-1} fisso. Esso si dice *complesso speciale*, e l'S_{n-k-1} chiameremo il ***nucleo*** del complesso.

Facendo l'ipotesi analoga nelle (6), vediamo che l'insieme degli S_k incidenti un S_h fisso in S_l $(h + k - l < n)$ forma un sistema lineare di dimensione

$$
(9) \qquad (h, k) = (k - l)(n - k) + (h - l)(l + 1),
$$

intersezione completa di V_d con lo spazio base del sistema d'iperpiani (6).

Supponiamo, ciò che non lede la generaliià, che l' S_h fisso sia lo spazio fondamentale $O_0, O_1, \dots O_h$ della piramide fondamentale di vertici $O_0, O_1, \dots O_n$. Le coordinate grassmanniane di questo spazio sono $Y_{01\dots h} = 1$ e tutte le altre nulle. Le equazioni (6) divengono quindi

$$
(10) \qquad X r_0 \dots r_{k-l} \, a \dots f = 0,
$$

dove $a \dots f$ è una combinaziono di l degli indici $0, 1, \dots h$ ed $r_0 \dots r_{k-l}$ una delle combinazioni di $k - l + 1$ degli indici rimanenti $h + 1, \dots n$. A queste equazioni si possono aggiungere quelle che esprimono l'incidenza all'S_h secondo spazi di dimensione minore di l. Quindi si avrà complessivamente

$$
(11) \qquad X r_0 r_1 \dots r_k = 0,
$$

quando *al più* l degli indici $r_0, r_1 \dots r_k$ sono tratti dagli indici $0, 1, \dots h$; le ulteriori X_i essendo una soluzione generica delle (8).

La proprietà che le coordinate degli S_k che soddisfano alle equazioni (10) soddisfano di conseguenza a tutte le equazioni (11) sussiste per la proprietà geometrica che le equazioni aggiunte esprimono (intersezione secondo uno spazio di dimensione minore di quella dello spazio già imposto). Le (11) sono tutte *linearmente indipendenti* tra loro, quindi linearmente indipendenti dalle (10); dipendono invece algebricamente dal sistema delle (10) e delle (8): accade cioè che lo spazio base del sistema d'iperpiani (10) taglia la V_d nella varietà $V_{(h,l)}$ che appartiene ad uno spazio di dimensione inferiore a quella dello spazio secante (n. 2).

5. - Gli iperpiani (11), in numero di

$$\sum_{s=0}^{l} \binom{h+1}{s} \binom{n-h}{k-s+1}, \tag{12}$$

individuano un S_ρ

$$\rho = \binom{n+1}{k+1} - \sum_{s=0}^{l} \binom{h+1}{s} \binom{n-h}{k-s+1} - 1,$$

la cui intersezione completa con la V_d dà la $V_{(h,l)}$ imagine degli S_k incidenli l'S_h in S_l.

In base alla relazione tra i coefficienti binomiali, di immediata dimostrazione

$$\sum_{s=0}^{k+1} \binom{h+1}{s} \binom{n-h}{k-s+1} = \binom{n+1}{k+1}, \tag{13}$$

possiamo scrivere

$$\rho = \sum_{s=l+1}^{k+1} \binom{h+1}{s} \binom{n-h}{k-s+1} - 1. \tag{14}$$

Che la $V_{(h,l)}$ appartenga all' S_ρ, e non ad uno spazio di dimensione minore, si può vedere nel modo seguente ([5]). L' S_h essendo ancora lo spazio fondamentale $O_0, O_1, \dots O_h$ otteniamo degli S_k fondamentali che fanno parte del nostro sistema formandoli con almeno $l+1$ dei punti $O_0, O_1, \dots O_h$. Avremo così

$$\sum_{s=l+1}^{k+1} \binom{h+1}{s}\binom{n-h}{k-s+1},$$

S_k fondamentali che fanno parte del nostro sistema, ed essi sono linearmente indipendenti in quanto sono spazi della piramide fondamentale. Ciò ci dice, in accordo con la (14) che la $V_{(h,l)}$ contiene $\rho+1$ punti linearmente indipendenti.

Ponendo (n. 2)

$$\sigma = (k-l)(n-k) + (h-l)(l+1) - (n-k)(k+1) + \\ + \sum_{s=0}^{l} \binom{h+1}{s}\binom{n-h}{k-s+1},$$

cioè

$$(15) \quad \sigma = \sum_{s=0}^{l} \binom{h+1}{s}\binom{n-h}{k-s+1} - (n-k-h+l)(l+1) \geq 0,$$

si constata che il sistema lineare degli S_k incidenti un S_h in S_l è sovrabbondante, la (15) esprimendone la sovrabbondanza.

6. - Consideriamo due particolari dei sistemi ora trattati:

a) L'insieme di tutti gli S_k contenuti in un S_h $(h < k,$ $l = k)$.

Per le (11) sarà $X_{r_0 r_1 \dots r_k} = 0$ quando uno solo degli indici $r_i > h$. L' imagine di questo sistema su V_d è una grassmanniana di indici (h, k) appartenente ad uno spazio S_ρ, $\rho = \binom{h+1}{k+1}$.

([5]) Rosenblatt A. *Sur la variété de Grassmann qui représente les espaces linéaires à k dimensions contenus dans un espace linéaire à r dimensions.* [Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége (3) XVI (1930)].

b) L'insieme di tutti gli S_k che passano per un S_h ($h<k$, $l=h$).

Per le (11) sarà $X_{r_0 r_1 \dots r_k}=0$ tranne quando sono contenuti tutti gli indici $0, 1, \dots h$. L'imagine di questo sistema su V_d è una grassmanniana di indici $(n-h-1,\ k-h-1)$ appartenente ad un S_ρ, $\rho=\binom{n-h}{k-h}$.

7. - Due o più S_k di S_n, α, β, ... si dicono *legati linearmente* (6) se le loro coordinate grassmanniane X_i, Y_i, ... verificano relazioni della forma

$$\lambda X_i + \mu Y_i + \dots = 0, \qquad (i=0,\ 1, \dots N)$$

con λ, μ, ... non tutte nulle. Ciò è come dire che i punti X, Y, ... della V_d sono legati linearmente.

Due S_k legati linearmente coincidono.

Se l S_k, α, β, γ, ... distinti sono legati linearmente, quindi uno di essi (il cui coefficiente $\lambda \neq 0$), per es. α, si può risguardare come combinazione lineare dei rimanenti β, γ, ..., allora ogni sistema lineare che contenga questi ultimi, contiene anche quello. Da cui (n. 4) *se un S_h incide gli spazi β, γ, ... in un S_t almeno, esso incide pure lo spazio α in un S_t (almeno).* Ciò varrà comunque si prenda α fra gli spazi α, β, γ, ... quando si sappia che $l-1$ qualunque di questi sono linearmente indipendenti.

Se gli l S_k, α, β, ... γ, δ sono legati linearmente senza che lo siano parte di essi, un S_h incidente ai primi $l-2$ di essi sarà tale che ogni S_h+1 per esso incidente a γ lo è pure a δ e viceversa: quindi l'S_h incontrerà anche γ e δ oppure γ e δ stanno in uno stesso S_{h+k+1} con l'S_h.

8. - Si considerino ora $h+2$ S_k, α, β, ... γ, δ legati linearmente senza che lo siano parte di essi. Sia $l-1$ la dimen-

(6) SEGRE C. *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni.* [Annali di Matematica (3) XXVII (1917)].

sione massima ($l \leq h$) di uno spazio generico S_{l-1} che essendo incidente ad l degli $h + 2$ spazi dati, α, β, ... λ, non lo sia ai rimanenti μ ... γ, δ. Allora un S_l generico per l' S_{l-1} incidente uno degli spazi μ ... γ, δ li incide tutti. Gli S_k μ ... γ, δ stanno quindi con l' S_{l-1} in un medesimo S_{k+l}. Se di questo S_{l-1} facciamo variare il punto d'appoggio su α, fissi restando gli $l - 1$ punti d'appoggio su β, ... λ che individuano un S_{l-2}, lo spazio S_{k+l} a cui appartengono gli S_k μ ... γ, δ e l' S_{l-1} non varia, poichè risulta dalla congiunzione dell' S_{l-2} fisso con uno spazio S_{k+1} scelto genericamente nello spazio d'appartenenza degli S_k μ ... γ, δ e *sghembo* con l' S_{l-2} (se ciò non fosse μ ... γ, δ starebbero con l' S_{l-2} in uno stesso S_{k+l-1}, quindi ogni S_{l-1} per l' S_{l-2} e dentro S_{k+l-1} incontrando tutti gli S_k tranne α, incontrerebbe anche α, che verrebbe ad essere contenuto nell' S_{k+l-1}: e poichè dall'ipotesi iniziale segue che un S_{l-1} generico non è incidente a tutti gli S_k α, β, ... γ, δ ciò va escluso).

L' S_{k+l} fisso ha in comune con lo spazio α un punto generico, contiene dunque anche questo spazio, quindi tutti gli $h + 2$ spazi α, β, ... γ, δ.

Teorema: *Se $h + 2$ spazi S_k sono legati linearmente, senza che lo siano parte di essi, appartengono ad uno spazio di dimensione al più $k + h$.*

Dualmente (avendo in definitiva sostituito $n - k - 1$ con k); *Se $h + 2$ spazi S_k sono legati linearmente, senza che lo siano parte di essi, passano per uno spazio di dimensione almeno $k - h$.*

9. - Osserviamo che $h + 2$ S_k legati linearmente senza che lo siano parte di essi, hanno per imagine sulla V_d $h + 2$ punti di un S_h. Lo spazio d'appartenenza S_ν degli $h + 2$ S_k ha la dimensione, per il teorema ora enunciato, $\nu \leq k + h$ quindi $h \geq \nu - k$. Abbiamo così: *Se più spazi S_k, legati linearmente senza che lo siano parte di essi, appartengono ad un S_ν e non ad uno spazio di dimensione minore, la loro imagine su V_d appartiene ad un $S_{\nu-k}$ almeno.*

Analogamente, perchè gli $h + 2$ spazi non abbiano alcun punto in comune dovrà essere $k - h \leq -1$, cioè $h \geq k + 1$. *Se più spazi S_k legati linearmente senza che lo siano parte* *di essi non hanno alcun punto in comune, la loro imagine su V_d appartiene ad un S_{k+1} almeno.*

10. - Tre S_k distinti legati linearmente appartengono, come risulta dalle proprietà ora enunciate ponendovi $h = 1$, ad un S_{k+1} e passano per un S_{k-1}: sono cioè tre S_k di un fascio. Traducendo questo risultato sulla V_d si ha, come noto, che le rette su essa giacenti sono le imagini dei fasci di S_k; e che se una retta ha in comune con la V_d tre punti dintinti giace per intero su essa.

Segue da ciò facilmente che sulla V_d vi sono, come noto, $\infty^{(n-k+1)(k-1)}$ spazi S_{k+1} imagini degli S_k contenuti negli S_{k+1} di S_n; ed $\infty^{(n-k+1)(k+1)}$ spazi lineari S_{n-k} imagini degli S_k passanti per gli S_{k-1} di S_n.

11. - Quattro S_k legati linearmente senza che lo siano parte di essi ($h = 2$) appartengono (n. 8) ad un S_{k+2} al più e passano per un S_{k-2} almeno. Segando quindi con un S_3 dell' S_{k+2} sghembo coll' S_{k-2} si ottengono ivi quattro rette legate linearmente.

Quattro rette legate linearmente possono presentare le seguenti eventualità.

I) Se tre di esse, essendo a due a due incidenti, giacciono in un piano, la quarta retta appartiene al sistema lineare delle rette di un piano. Quindi: Quattro S_k generici di un S_{k+1} (spazio congiungente dell' S_{k-2} e del piano) passanti per un S_{k-2}.

II) Se tre di esse, essendo a due a due incidenti, passano per un punto, la quarta retta appartiene al sistema lineare delle rette per un punto. Quindi: Quattro S_k di un S_{k+2} che passano genericamente per un S_{k-1}.

III) Se tre di esse, essendo a due a due sghembe, individuano il sistema lineare di una schiera rigata, a questo appartiene anche la quarta retta. Quindi: Quattro S_k che da un S_{k-2} proiettano quattro rette di una schiera rigata di un S_3 sghembo coll' S_{k-2}.

IV) Supponiamo che due delle quattro rette legate linearmente r, s, p, q, ad es. r ed s, si taglino in un punto A. Chiamiamo con B il punto d' incontro della terza retta p col piano (r, s). Allora le rette per B nel piano (r, s) incontrando tre delle quattro rette (n. 7) incontreranno anche la quarta retta q: che non dovendo essere contenuta (I) nel piano (r, s) passerà per B. I quattro punti imagini delle quattro rette sulla rispettiva grassmanniana di S_5 individuano un S_2 che contiene le due rette della grassmanniana imagini dei fasci (p, q) ed (r, s): quindi questi due fasci di raggi hanno un raggio in comune.

Proiettando dall'S_{k-2}: quattro S_k, due di un fascio e due di un altro, i due fasci avendo un S_k in comune.

Si potrebbe così proseguire nella classificazione di cinque o più S_k legati linearmente.

Le proprietà di quattro S_k legati linearmente si compendiano nel seguente enunciato: *Se un piano ha in comune con V_d quattro punti, a tre a tre non allineati, esso giace per intero sulla V_d oppure la taglia secondo una conica (irriducibile o riducibile).*

12. – Consideriamo una varietà algebrica di S_n formata da una semplice infinità di S_k, cioè una S_k - V_{k+1}. La sua imagine sulla V_d sarà una curva algebrica C. L'ordine della curva C è uguale al numero degli S_k della V_{k+1} contenuti in un complesso generico. Specializzando il complesso, esso diviene uguale al numero degli S_k che si appoggiano ad un S_{n-k-1} generico di S_n, cioè uguale all'ordine r della S_k - V^r_{k+1}.

Una varietà algebrica S_k - V^r_{k+1} di S_n e la sua imagine C^r sulla grassmanniana degli S_k sono dello stesso ordine.

13. – In particolare una S_k - V^{n-k}_{k+1} razionale normale avrà per imagine su V_d una C^{n-k} che, non potendo appartenere ad uno spazio di dimensione inferiore ad $n - k$ perchè altrimenti (n. 9) la V^r_{k+1} apparterrebbe ad uno spazio di dimensione inferiore ad n, sarà pure razionale normale. Facciamo vedere che la *C^{n-k} è intersezione completa di V_d con l'S_{n-k}, a meno che questo sia uno spazio di V_d.*

Supponiamo esista un punto P comune alla V_d ed all'S_{n-k} fuori della C^{n-k}. Prendiamo $n - k - 2$ punti generici della C^{n-k}, $P_1, P_2, \dots P_{n-k-2}$. Questi ed il punto P individuano un S_{n-k-2}. Un iperpiano generico dell'S_{n-k} per l'S_{n-k-2} taglierà ulteriormente la C^{n-k} in due punti, P_{n-k-1} e P_{n-k}. In questo iperpiano vi saranno così $n-k+1$ punti linearmente dipendenti, senza che lo siano parte di essi, imagini di S_k che appartengono (n. 8) ad un S_{n-1} al più. Se lo spazio d'appartenenza degli S_k che hanno per imagini i punti $P_1, \ldots P_{n-k-2}$ e P fosse un S_{n-1}, gli S_k che hanno per imagini i punti variabili P_{n-k-1} e P_{n-k} apparterebbero a questo S_{n-1}, cioè la V_{k+1} apparterebbe all' S_{n-1}, contro l' ipotesi. Gli S_k corrispondenti a $P_1, \ldots P_{n-k-2}$ e P appartengono dunque ad un S_{n-2} al più. Teniamo ora fissi i punti $P_1, \ldots P_{n-k-3}$ facendo variare P_{n-k-2}. Allora se gli S_k corrispondenti ai punti $P_1, \ldots P_{n-k-3}$ e P appartenessero ad un S_{n-2}, l' S_k corrispondente al punto generico P_{n-k-2} essendo pure contenuto nell' S_{n-2}, la V_{k-1} sarebbe contenuta in questo spazio, contro l' ipotesi. Dunque gli S_k corrispondenti ai punti $P_1, \ldots P_{n-k-3}$ e P sono contenuti in un S_{n-3} al più. Così proseguendo si viene alla conclusione che l' S_k generico della V_{k+1}, corrispondente al punto P_1, e quello corrisponpente al punto P appartengono ad un S_{k+1}.

Le generatrici del cono di vertice P e di curva direttrice C^{n-k} sono perciò rette della grassmanniana V_d, imagini di fasci di S_k (n. 10). Ma ciascun punto del cono così ottenuto potendosi assumere come vertice di un cono analogo, si viene ovviamente alla conclusione che tutti i punti dell' S_{n-k} sono punti della V_d. In tal caso la V_{k+1} essendo formata da S_k per un S_{k-1} (n. 10), si ottiene proiettando da questo i punti di una C^{n-k} di un S_{n-k} complementare di S_n all' S_{k-1}.

14. - Inoltre una curva C intersezione di V_d con un S_{n-k} (che non appartenga alla V_d) imagine di una V_{k+1} che appartenga ad S_n e non ad uno spazio di dimensione minore, è necessariamente una C^{n-k}.

Infatti, ove fosse una C^{n-k+s} $(s>0)$, prendiamo $n-k-1$ punti generici della C^{n-k+s}. $P_0, P_1, \ldots P_{n-k-2}$, che individueranno un S_{n-k-2}. Un iperpiano generico dell' S_{n-k} per l' S_{n-k-2} taglia ulteriormente la C^{n-k+s} in $1+s$ punti. Due di questi e gli $n-k-1$ punti scelti danno $n-k+1$ punti linearmente dipendenti, senza che lo siano parte di essi, imagini di S_k che appartengono (n. 8) ad un S_{n-1} al più. Se gli S_k corrispondenti ai punti $P_0, P_1, \ldots P_{n-k-2}$ individuassero l' S_{n-1}, tutti gli S_k della V_{k+1} apparterebbero a questo spazio, contro il supposto. Quegli S_k appartengono quindi al più ad un S_{n-2}. Tolto l'S_k corrispondente al punto P_{n-k-2}, supposto variabile, gli S_k rimanenti corrispondenti ai punti $P_0, \ldots P_{n-k-3}$ apparteranno ad un S_{n-3} al più. Così procedendo si viene alla conclusione che due S_k generici della V_{k+1} appartengono ad un S_{k+1}. Perciò gli S_k della V_{k+1} passeranno per lo stesso S_{k-1}, contro l'ipotesi che l' S_{n-k} non appartenga alla V_d (n. 10).

I sistemi lineari di dimensione uno di S_k appartenenti ad S_n ora costruiti, sono sistemi sovrabbondanti (n. 2) e precisamente di sovrabbondanza σ *massima*, perchè la curva imagine di un sistema di S_k appartenenti ad S_n, e non ad uno spazio di dimensione inferiore, non può appartenere ad uno spazio di dimensione inferiore ad $n - k$ (n. 9).

Siamo così pervenuti al seguente teorema: *I sistemi lineari di sovrabbondanza massima appartenenti ad S_n e di dimensione uno sono gli S_k di una V_{k+1}^{n-k} razionale normale, non S_{k-1}—cono* (7).

15. - Abbiansi $k + 3$ S_k legati linearmente e siano essi a due a due sghembi. Parte di essi saranno allora linearmente indipendenti, perchè se ciò non fosse gli S_k di questa parte apparterebbero ad uno spazio di dimensione inferiore a $2k + 1$ (n. 8) e sarebbero quindi a due a due incidenti contro l'ipotesi.

I $k + 3$ S_k appartengono ad un S_{2k+1} (n. 8). Consideriamo una generica retta S_1 incidente a tre di essi. Un S_k per l'S_1 incidente a $k - 1$ degli S_k rimanenti $\alpha, \beta, \ldots \gamma, \delta$, ad es. $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ incide anche δ (n. 7). Vogliamo far vedere che ciò accade perchè l' S_1 stesso incide tutti gli S_k. Infatti, nel caso che ciò non si verificasse, sia $h - 1$ $(1 \leq h - 1 \leq k - 1)$ la dimensione minima di uno spazio generico passante per l' S_1 (eventualmente l' S_1 stesso) ed incidente ad $h - 2$ degli S_k rimanenti $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ senza esserlo almeno a due (n. 7), siano γ e δ, degli altri $k - h + 2$ spazi $\mu \ldots \gamma, \delta$. Allora un S_k generico per l' S_{h+1} incidente allo spazio δ incide tutti gli altri spazi $\mu \ldots \gamma$. Gli S_k γ e δ stanno quindi con l' S_{h-1} in un medesimo S_{k+h}.

(7) Per $k = 1$ questo teorema trovasi in Comessatti *loco cit.* (4).

Essi si incidono quindi in un S_{k-h} $(k-h>-1)$ contro l'ipotesi che gli spazi considerati siano a due a due sghembi.

Le ∞^k rette incidenti tre S_k sghembi di S_{2k+1} formano, come noto, una V_{k+1}^{k+1} razionale normale che contiene ∞^1 S_k incidenti a tutte quelle rette. Dunque: $k+3$ S_k *legati linearmente, a due a due sghembi, appartengono ad una* V_{k+1}^{k+1} *razionale normale.*

16. - Abbiansi ora $h+3$ $(h<k)$ S_k legati linearmente che abbiano a due a due in comune uno spazio di dimensione non superiore a $k-h-1$. Parte di essi saranno allora linearmente indipendenti, perchè, se ciò non fosse, gli S_k di questa parte passerebbero (n. 8) per uno spazio di dimensione superiore a $k-h-1$, contro l'ipotesi.

Questi spazi dovendo (n. 8) appartenere ad uno spazio di dimensione al più $k+h+1$ e passare per uno stesso spazio di dimensione almeno $k-h-1$, apparteranno per le condizioni da noi imposte ad un S_{k+h+1} e passeranno per lo stesso S_{k-h-1}.

Segando con un S_{2h+1} dell' S_{k+h+1} sghembo coll' S_{k-h-1} si ottengono ivi $h+3$ S_h legati linearmente e a due a due sghembi. Quindi (n. 15): $h+3$ *spazi* S_k $(h \leq k)$ *legati linearmente ed aventi a due a due in comune uno spazio di dimensione non superiore a* $k-h-1$, *appartengono ad una* V_{k+1}^{h+1} *razionale normale, cono di vertice* S_{k-h-1}.

Possiamo anche dire: *Se uno spazio* S_{h+1} $(h \leq k)$ *ha in comune con la* V_d $h+3$ *punti, ad* $h+2$ *ad* $h+2$ *linearmente indipendenti, esso taglia la* V_d *in generale secondo una* C^{h+1} *imagine di una* S_k - V_{k+1}^{h+1} (S_{k-h-1} — cono) *razionale normale* (8).

(8) Rosenblatt *loco cit.* (5).