

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIANFRANCO CIMMINO

**Formole di maggiorazione nel problema di
Dirichlet per le funzioni armoniche**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 3 (1932), p. 46-66

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__46_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMOLE DI MAGGIORAZIONE NEL PROBLEMA DI DIRICHLET PER LE FUNZIONI ARMONICHE.

di GIANFRANCO CIMMINO a Napoli

1. - Considerazioni introduttive.

Lo studio delle proprietà di una funzione armonica in un dato dominio, in dipendenza dalle proprietà dei valori assunti sul contorno dalla funzione medesima, è stato intrapreso soltanto in un numero esiguo di lavori, fra i quali ricorderò qui, poichè più strettamente si apparentano all'argomento del presente studio, quelli di P. LÉVY ⁽¹⁾ e di O. D. KELLOGG ⁽²⁾.

Nelle ricerche di quest'ultimo viene trattata principalmente la questione dell'esistenza e della continuità delle derivate parziali al contorno, per la funzione armonica, che assume ivi prescritti valori. Io qui invece, non occupandomi dell'esistenza delle derivate al contorno e ammettendo per ipotesi che il contorno assegnato e i valori ivi prescritti alla funzione armonica verificchino condizioni tali da assicurare siffatta esistenza, mi propongo di stabilire delle formole di maggiorazione per la funzione

⁽¹⁾ P. LÉVY, *Sur l'allure des fonctions de Green et de Neumann dans le voisinage du contour*, Acta Mathematica, vol. 42 (1920), pp. 207-267. Nell'ordine di idee di P. LÉVY sono anche gli scritti di G. SUPINO, *Aleune limitazioni valide per le funzioni armoniche*, Rendic. della R. Acc. Naz. dei Lincei, serie 6^a, vol. 8^o (2^o sem. 1928), pp. 134-138; *Aleune limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica*, ibidem, pp. 658-663; *Sopra alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche e le loro derivate*, Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. LIV (1930), pp. 203-228.

⁽²⁾ O. D. KELLOGG, *Harmonic functions and Green's integral*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 13 (1912), pp. 109-132; *On the derivatives of harmonic functions on the boundary*, ibidem, vol. 33 (1931), pp. 486-510.

e per le sue derivate in tutto il dominio, compreso il contorno. E raggiungo lo scopo senza valermi della funzione di GREEN, ma servendomi invece delle funzioni superarmoniche e subarmoniche ⁽³⁾, il cui uso nella teoria delle funzioni armoniche si è già mostrato, negli ultimi tempi, oltremodo efficace.

Allo stesso modo come le funzioni maggioranti, possono ottenersi pure funzioni minoranti, sicchè si è in grado di valutare l'errore che si commetterebbe, assumendo, come approssimazione della funzione armonica richiesta, la funzione maggiorante trovata. Di più, per quel che riguarda la funzione armonica stessa, tale errore si può, con successive approssimazioni (ciascuna delle quali fornisce sempre una maggiorante della funzione armonica), rendere piccolo a piacere, ciò che peraltro non ho ancora ottenuto per le derivate parziali della funzione armonica.

È da rilevare però che la maggiorazione qui data per cote-ste derivate vale in tutti i punti del contorno, mentre le limitazioni che possono ottenersi partendo dallo studio della funzione di GREEN (LÉVY) perdono necessariamente senso in tutti i punti della frontiera, poichè siffatte limitazioni devono valere sempre, anche se i dati al contorno sono tali da non far risultare finite e continue le derivate parziali sul contorno stesso.

Inoltre il mio ragionamento non presuppone che il dominio sia convesso e neppure che esso sia semplicemente connesso: le sole ipotesi restrittive che mi occorre fare sul dominio e sui dati al contorno consistono in condizioni di regolarità, vale a dire esistenza di un certo numero di derivate per le funzioni che danno le equazioni parametriche del contorno e i valori ivi assegnati.

Non voglio poi mancare di far rilevare che le formole di maggiorazione che ho stabilite nel presente lavoro possono riuscire anche di utilità pratica, nei calcoli numerici approssimati per la soluzione del problema di DIRICHLET, secondo quanto risulta dagli studi in proposito di M. PICONE ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ Cfr. p. es. O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*.

⁽⁴⁾ M. PICONE, *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della fisica-matematica*, Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. LII (1928), pp. 225-253.

Mi sono limitato a trattare il caso delle funzioni di due variabili, ma ritengo che non sarebbe difficile svolgere considerazioni analoghe a quelle qui esposte, anche nel caso di più variabili.

Meno semplice appare invece la determinazione di formole di maggiorazione anche per le derivate di ordine superiore al primo, mentre si presenta naturale la questione di limitare le derivate parziali di ordine come si voglia elevato, in tutto il dominio, compresa la frontiera, supponendo, per esempio, che i dati siano analitici, nel qual caso deve certamente esistere una siffatta limitazione. Tale questione sarà oggetto di un mio prossimo lavoro.

2. - Le funzioni superarmoniche e subarmoniche.

Una funzione $u(P)$, continua in un dato dominio D , si chiama una funzione *superarmonica* [*subarmonica*] in D , se, detto T un qualsiasi dominio contenuto in D , il valore assunto dalla $u(P)$ in un arbitrario punto di T è sempre superiore [inferiore] o uguale al valore che in quel punto assume la funzione armonica in T , coincidente su FT con la $u(P)$.

Com'è noto ⁽⁵⁾, sussiste il seguente teorema :

I. - *Se la funzione $u(P)$ ammette derivate parziali prime e seconde finite e continue in D , allora essa è superarmonica [subarmonica] in D , quando e solo quando è, in ogni punto P ,*

$$\Delta u(P) \leq 0, \quad [\Delta u(P) \geq 0].$$

Di più, in base al teorema della media di GAUSS, si può anche enunciare il seguente criterio, in cui non si richiede più l'esistenza di derivate parziali :

⁽⁵⁾ Cfr. p. es. F. RIESZ, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel*, Acta Mathematica, t. 48 (1926), pp. 329-343; V. particolarmente a pag. 335.

II. - La funzione $u(P)$, continua in D , è superarmonica [subarmonica] ivi, se e solo se, detto $M_{C(r, P)} u$ la media della u sulla circonferenza $C(r, P)$ di raggio r e di centro P , risulta, in ogni punto P di D e per valori di r piccoli a piacere,

$$(1) \quad u(P) \geq M_{C(r, P)} u, \quad [u(P) \leq M_{C(r, P)} u].$$

Infatti, se $u(P)$ è superarmonica [subarmonica], dovrà sussistere la (1) per ogni r sufficientemente piccolo, poichè allora il cerchio di centro P e raggio r è un particolare dominio T contenuto in D e $M_{C(r, P)} u$ è il valore assunto in P dalla funzione armonica nell'interno di $C(r, P)$, coincidente con la u su $C(r, P)$.

Inversamente, se sussiste la (1) per valori di r piccoli a piacere e per ogni P in D , allora, detto T un dominio contenuto in D e $w(P)$ la funzione armonica in T , coincidente su FT con la $u(P)$, la differenza $u(P) - w(P)$ sarà nulla su FT e verificherà ancora la (1), per valori di r piccoli a piacere ed ogni P in T ; ma di qui si deduce l'impossibilità per la $u(P) - w(P)$ di assumere un minimo [un massimo] in T : sicchè la differenza $u(P) - w(P)$ dev'essere sempre non negativa [non positiva] in T , e ciò prova, per l'arbitrarietà di T , che la funzione $u(P)$ è superarmonica [subarmonica].

Ove si ponga

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta' u(P) = 4 \lim'_{r \rightarrow 0} \frac{M_{C(r, P)} u - u(P)}{r^2}, \\ \Delta'' u(P) = 4 \lim''_{r \rightarrow 0} \frac{M_{C(r, P)} u - u(P)}{r^2}, \end{array} \right.$$

si può anche enunciare l'ultimo criterio nella forma seguente:

III. - Condizione necessaria e sufficiente, affinché la funzione $u(P)$, continua in D , sia superarmonica [subarmonica] ivi, è che, in ogni punto P di D , sia

$$4 \star \quad \Delta'' u(P) \leq 0 \quad [\Delta' u(P) \geq 0].$$

Se esistono le derivate parziali prime e seconde della $u(P)$, allora, come subito si riconosce applicando la regola di l'HOSPITAL alla ricerca del limite della funzione che figura nelle (2), il $\Delta' u(P)$ e il $\Delta'' u(P)$ coincidono, e il loro valore comune non è altro che il $\Delta u(P)$. In tal caso quindi il criterio III si riduce al I.

3. - Maggioranti e minoranti delle funzioni armoniche.

Una funzione superarmonica, che sul contorno del dato dominio assuma valori in ogni punto non inferiori a quelli prescritti alla funzione armonica, sarà una *maggiorante* della funzione armonica stessa, cioè, in ogni punto di D , prenderà un valore non inferiore al valore che questa vi prende. Ma non è detto che ogni maggiorante debba essere una funzione superarmonica. Si può infatti dimostrare per le funzioni maggioranti il seguente criterio, che, come si vede, richiede meno di quello che richiede il criterio II per le funzioni superarmoniche :

IV. - *La funzione $u(P)$, continua in D , è una maggiorante della funzione armonica in D coi prescritti valori al contorno, se sul contorno supera o eguaglia in ogni punto codesti valori e se inoltre ad ogni punto P di D si può far corrispondere una circonferenza $C(r, P)$ contenuta in D , insieme con tutti i punti ad essa interni, per cui valga la (1).*

Infatti, detta $w(P)$ la funzione armonica in D coi prescritti valori al contorno, la differenza $u(P) - w(P)$ risulta eguale a zero su tale contorno, mentre ad ogni punto P corrisponde un raggio r , per cui

$$u(P) - w(P) \geq M_{C(r, P)}(u - w),$$

e pertanto il minimo assoluto di $u(P) - w(P)$ dev'essere preso sul contorno, cioè è zero. E ciò equivale appunto a dire che $u(P)$ è sempre non inferiore a $w(P)$.

Pel fine cui si mira, è bene rilevare il seguente teorema :

V. - *Se si conosce una maggiorante, che sul contorno coincida con la funzione armonica e che, di più, goda della pro-*

prietà di cui in IV, allora si può costruire, a partire da essa, tutta una successione di maggioranti, per cui il massimo errore puntuale può venir ridotto piccolo a piacere.

Sia infatti, come prima, $w(P)$ la funzione armonica e $u(P)$ la maggiorante nota. È per ipotesi

$$(3) \quad u(P) = w(P), \text{ su } FD; \quad u(P) \geq M_{C(r, P)} u, \text{ in } D;$$

ove la disuguaglianza sussiste per un certo valore di r , funzione del punto P .

Si ponga ⁽⁶⁾

$$(4) \quad u_0(P) = u(P), \quad u_n(P) = M_{C(r, P)} u_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La successione delle u_n è, in ogni punto P , sempre non crescente al crescer di n . È infatti, per l'ipotesi, $u_1(P) \leq u_0(P)$, qualunque sia P in D ; ma allora sarà pure

$$M_{C(r, P)} u_1(P) \leq M_{C(r, P)} u_0(P),$$

vale a dire $u_2(P) \leq u_1(P)$. E così di seguito. Da ciò si deduce inoltre che

$$u_1(P) \geq M_{C(r, P)} u_1;$$

e iterando il ragionamento, si vede che tale disuguaglianza sussiste per tutte le u_n .

Pertanto, in base al teor. IV, si può affermare che tutte le $u_n(P)$ sono superiori in ogni punto alla $w(P)$, mentre coincidono con essa sulla frontiera del dominio.

Di più, la successione della $u_n(P)$, essendo monotona, converge verso una certa funzione $\bar{w}(P)$, la quale, com'è facile vedere, non è altro che la funzione armonica $w(P)$. Infatti, è chiaro intanto che la $\bar{w}(P)$ si riduce alla $w(P)$ sul contorno, poi-

⁽⁶⁾ Per l'idea di questo procedimento, detto di *mediazione*, cfr. H. LEBESGUE, *Sur le problème de Dirichlet*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sc., t. 154 (1912), pp. 335-337.

chè $\bar{w}(P)$ è certamente compresa fra due funzioni continue, $u_0(P)$ e $w(P)$, che entrambe si riducono sul contorno ai valori ivi prefissati. D'altra parte, da (4), con un passaggio al limite, si deduce che $\bar{w}(P)$ verifica le condizioni del teor. IV, laddove però nella (1) sussiste sempre il segno eguale: sicchè $\bar{w}(P)$ dev'essere al tempo stesso superarmonica e subarmonica, cioè non può esser altro che armonica.

Con ciò resta provato che la successione delle $u(P)$ converge verso la funzione armonica $w(P)$. Che poi, comè si è affermato, tale convergenza sia uniforme, è, in base a un noto teorema, conseguenza del fatto che la successione è monotona e che tanto le funzioni della successione quanto la funzione limite sono tutte funzioni continue.

Per le minoranti della funzione armonica valgono ovviamente considerazioni analoghe.

4. - Maggiorazione mediante funzioni superarmoniche.

Da quanto si è detto nel n.º precedente risulta la grande importanza, ai fini della maggiorazione della funzione armonica che assume i prescritti valori sul contorno, di poter determinare una funzione con gli stessi valori al contorno e tale che ad ogni punto P del dominio si possa far corrispondere un cerchio contenuto nel dominio stesso e limitato da una circonferenza $C(r, P)$ per cui valga la (1): in particolare una tal funzione sarà fornita (in base al teor. II) da una funzione superarmonica coi dati valori al contorno.

Essa verrà ora ottenuta come somma di due altre funzioni, di cui l'una superarmonica e nulla sul contorno, l'altra astretta invece ad assumere ivi i prescritti valori. Precisamente, si indicherà con $u(P)$ una funzione nulla sul contorno, per la quale non soltanto (cfr. teor. III) il $\Delta'' u(P)$ sia sempre negativo, ma esista una costante negativa $-M$ maggiore o uguale al $\Delta'' u(P)$ in ogni punto P di D . E s'indicherà con $v(P)$ una funzione assumente al contorno i dati valori, per la quale esista una costante positiva M'' sempre maggiore o uguale al $\Delta'' v(P)$.

Allora, formando con una costante positiva c la combinazione lineare $cu + v$, si potrà ottenere che questa sia una funzione superarmonica in D . È infatti

$$(5) \quad \Delta'' u(P) \leq -M < 0, \quad \Delta'' v(P) \leq M'', \quad M'' > 0,$$

sicchè basterà porre $c = \frac{M''}{M}$, e risulterà

$$\Delta'' \left(\frac{M''}{M} u + v \right) \leq \frac{M''}{M} \Delta'' u + \Delta'' v \leq -M'' + \Delta'' v \leq 0.$$

Se poi il $\Delta' v(P)$ è limitato inferiormente da una costante negativa $-M'$, si vede, in un modo affatto analogo, che la funzione $-\frac{M'}{M} u + v$ è subarmonica, sicchè sussiste la limitazione

$$(6) \quad v - \frac{M'}{M} u \leq w \leq v + \frac{M''}{M} u,$$

dove w indica, come al solito, la funzione armonica. Di più, in ogni punto del contorno, sussiste nella (6) il segno eguale.

Quest'ultima circostanza permette di trarre dalla precedente anche una limitazione per le derivate parziali della w , purchè si riesca a determinare le funzioni $u(P)$ e $v(P)$ con derivate parziali finite sul contorno e si ammetta che esistano le derivate parziali della w anche sul contorno. In tal caso infatti si deduce ovviamente, per le derivate normali alla frontiera,

$$(7) \quad \frac{dv}{dn} - \frac{M'}{M} \frac{du}{dn} \leq \frac{dw}{dn} \leq \frac{dv}{dn} + \frac{M''}{M} \frac{du}{dn},$$

mentre, d'altra parte, la derivata tangenziale $\frac{dw}{ds}$ è nota, poichè si esprime mediante i valori al contorno.

Siano, per esempio,

$$x = \alpha(s), \quad y = \beta(s)$$

le equazioni parametriche del contorno (il quale può beninteso essere costituito da diverse curve, poichè non occorre far l'ipotesi che il dominio sia semplicemente connesso) e siano $\varphi(s)$ i valori assegnati sul contorno, in funzione dell'arco s .

Risulta allora dalla (7)

$$\frac{dv}{dn} - \frac{M'}{M} \frac{du}{dn} \leq - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{d\beta}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{d\alpha}{ds} \leq \frac{dv}{dn} + \frac{M''}{M} \frac{du}{dn},$$

mentre, per la derivata tangenziale, è

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds},$$

da cui si trae immediatamente, per la derivata parziale rispetto ad x ,

$$(7') \left\{ \begin{array}{l} \alpha' \varphi' - \beta' \cdot \left(\frac{dv}{dn} - \frac{M'}{M} \frac{du}{dn} \right) \leq \frac{\partial w}{\partial x} \leq \alpha' \varphi' - \beta' \left(\frac{dv}{dn} + \frac{M''}{M} \frac{du}{dn} \right), \\ \text{se } \beta' \leq 0, \\ \alpha' \varphi' - \beta' \cdot \left(\frac{dv}{dn} + \frac{M''}{M} \frac{du}{dn} \right) \leq \frac{\partial w}{\partial x} \leq \alpha' \varphi' - \beta' \left(\frac{dv}{dn} - \frac{M'}{M} \frac{du}{dn} \right), \\ \text{se } \beta' \geq 0; \end{array} \right.$$

e analogamente, per la derivata parziale rispetto ad y ,

$$(7'') \left\{ \begin{array}{l} \beta' \varphi' + \alpha' \cdot \left(\frac{dv}{dn} + \frac{M''}{M} \frac{du}{dn} \right) \leq \frac{\partial w}{\partial y} \leq \beta' \varphi' + \alpha' \cdot \left(\frac{dv}{dn} - \frac{M'}{M} \frac{du}{dn} \right), \\ \text{se } \alpha' \leq 0, \\ \beta' \varphi' + \alpha' \cdot \left(\frac{dv}{dn} - \frac{M'}{M} \frac{du}{dn} \right) \leq \frac{\partial w}{\partial y} \leq \beta' \varphi' + \alpha' \cdot \left(\frac{dv}{dn} + \frac{M''}{M} \frac{du}{dn} \right), \\ \text{se } \alpha' \geq 0. \end{array} \right.$$

Inoltre, poichè le $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ sono ancora funzioni armoniche in D , conoscendo delle maggioranti e delle minoranti di

esse sulla frontiera, si potranno costruire delle maggioranti e delle minoranti in tutto il dominio: basterà a tal uopo determinare delle altre funzioni superarmoniche e subarmoniche, le quali sul contorno si riducano rispettivamente ai valori maggioranti e minoranti trovati.

Tanto per la funzione armonica quanto per le sue derivate parziali prime, si viene così a stabilire una doppia limitazione: e pertanto si ottiene pure una maggiorazione dell'errore commesso, ove si prenda la maggiorante o la minorante trovata come approssimazione della funzione incognita. Per la funzione armonica, tale errore può ridursi (in base al teor. V) piccolo a piacere in tutto il dominio; per le derivate parziali, invece, ciò non accade più, perchè, mentre le funzioni u_n , di cui nella dimostrazione del teor. V, tendono alla funzione armonica w , non è vero in generale che le derivate parziali delle u_n tendano verso le rispettive derivate parziali della w .

5. - Le funzioni superarmoniche nulle sul contorno.

Si tratta ora di determinare le due funzioni $u(P)$, $v(P)$, di cui è parola nel n.º precedente. In questo n.º e nel seguente, verrà anzitutto determinata in maniera opportuna la $u(P)$.

Affinchè la limitazione (7) riesca il più efficace possibile, bisogna fare in modo che, compatibilmente con le condizioni a cui la $u(P)$ è sottoposta, risulti più piccolo possibile il rapporto

$$\frac{1}{M} \frac{du}{dn}$$

su tutta la frontiera del dominio, o — ciò che è lo stesso, poichè $u(P)$ è definita sempre a meno di un fattore costante positivo — che, essendo

$$(8) \quad \max \frac{du}{dn} = 1.$$

risulti più grande possibile la quantità M , che figura nella prima delle (5).

Un caso in cui, fra tutte le funzioni per cui vale la (8), ve n'è una ben determinata, che dà ad M il suo massimo valore, è il seguente: preso il potenziale logaritmico

$$u_1(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_D \log \frac{1}{PQ} dT(Q)$$

e costruita la funzione $u_2(P)$, armonica in D , uguale a $-u_1(P)$ su FD , si supponga che la derivata normale al contorno della somma $u_1(P) + u_2(P)$ sia determinata e limitata.

In tal caso, posto

$$(9) \quad \max \frac{d}{dn} (u_1 + u_2) = K, \quad u(P) = \frac{1}{K} [u_1(P) + u_2(P)],$$

è facile riconoscere che il $\max \Delta'' u$, cioè $\frac{-1}{K}$ (il $\Delta'' u$ è costante ed eguale a $-\frac{1}{K}$), è inferiore alla corrispondente quantità, relativa a qualsiasi altra funzione nulla su FD , per cui valga la (8).

Sia infatti $z(P)$ una funzione cosiffatta e si ponga

$$\max \Delta'' z = -M.$$

Bisogna dimostrare che $-\frac{1}{K} \leq -M$. Ora, se si prende la differenza

$$x - M(u_1 + u_2),$$

si riconosce che essa è una funzione nulla su FD e, in base al criterio III, superarmonica in D , giacchè

$$\Delta'' [x - M(u_1 + u_2)] = \Delta'' z + M \leq 0.$$

Sicchè tale differenza sarà sempre positiva in D , non potendo

avervi punti di minimo. Onde anche la derivata normale al contorno sarà sempre positiva o nulla. Si deduce quindi, tenendo presenti le (8) e (9),

$$0 \leq \min \left[\frac{dx}{dn} - M \left(\frac{du_1}{dn} + \frac{du_2}{dn} \right) \right] \leq \\ \leq \max \frac{dx}{dn} - M \max \left(\frac{du_1}{dn} + \frac{du_2}{dn} \right) = 1 - MK;$$

e la disuguaglianza fra il primo e l'ultimo membro equivale appunto a quella che si voleva dimostrare.

Nei casi più semplici, può essere molto facile dare l'espressione esplicita della funzione $u_1 + u_2$ ora considerata, la quale, come si vede, è caratterizzata, a meno di un fattore costante, dall'aver un Δ costante in tutto D e dall'essere zero sulla frontiera di D .

Così per esempio tale funzione, se D è un cerchio di raggio R , introducendo un sistema di coordinate polari ρ , θ , col polo nel centro, si scrive

$$(10) \quad u_1 + u_2 = c(R^2 - \rho^2);$$

e se D è la corona circolare $R_1 < \rho < R_2$, si scrive,

$$u_1 + u_2 = c \left[L^2 \log \frac{\rho}{R_1} - \frac{\rho^2 - R_1^2}{2} \right], \quad L^2 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2(\log R_2 - \log R_1)}.$$

Ma in generale non si potrà esprimere esplicitamente la funzione armonica u_2 , e quindi non si potrà dir nulla sulla derivata normale al contorno che figura nelle (9). Pertanto bisognerà rinunciare ad ottenere che la quantità M che figura in (5) abbia proprio il massimo valore possibile, in corrispondenza a un dato valore di $\max \frac{du}{dn}$; ci si contenterà così di una maggiorazione meno ristretta nella formola (7).

6. - Funzioni superarmoniche che dipendono soltanto dalla distanza del punto dalla frontiera.

Lo scopo che ora si vuol raggiungere è quello di determinare un esempio di funzione superarmonica $u(P)$ nulla sulla frontiera, con derivata normale finita e col $\max \Delta'' u(P)$ piccolo, per quanto possibile, in rapporto al massimo della derivata normale al contorno. Per semplificare la ricerca, si aggiungerà un'ipotesi, supponendo che la funzione $u(P)$ dipenda soltanto dalla distanza $t(P)$ del punto P dalla frontiera del dominio, sicchè la derivata normale al contorno sarà costante e si supporrà (ciò che può sempre ottenersi, moltiplicando all'uopo per un fattore costante) che essa sia eguale ad uno.

Il dominio D si suppone a uno o più contorni, ma si ammette che, in ogni punto della frontiera, esista ben determinato il cerchio osculatore alla frontiera stessa (per semplicità di linguaggio, si conviene di chiamare cerchio osculatore, di raggio infinito, la tangente in un punto di flesso, se vi sono di tali punti). Si indicherà con R il raggio di curvatura, preso col segno $+$ o col segno $-$, secondochè il raggio che va dal punto di osculazione al centro di curvatura è rivolto nel senso della normale interna o in quello della normale esterna al dominio. La curvatura $\frac{1}{R}$ sarà supposta una funzione continua su ogni contorno che faccia parte della frontiera e potrà assumere valori positivi o negativi. Ne indicheremo con $\frac{1}{R_0}$ il minimo :

$$(11) \quad \frac{1}{R} \geq \frac{1}{R_0}.$$

Si indicherà poi con S_0 il raggio del massimo cerchio che possa essere contenuto nel dato dominio.

Ciò posto, si vuole determinare il Δ'' di una funzione della distanza $t(P)$, supponendo che tale funzione $f(t)$ sia derivabile due volte, nulla per $t=0$ e non decrescente al crescer di t

$$f'(t) \geq 0, \quad f(0) = 0.$$

L'intervallo di definizione della $f(t)$ sarà $(0, S_0)$.

Si prenda dunque un punto P_0 di D e si supponga dapprima che vi sia un intorno I di P_0 , ad ogni punto P del quale corrisponda un unico punto Q_P su FD , per cui si abbia $t(P) = \overline{PQ_P}$, ciò che può sempre ottenersi, prendendo, per esempio, P_0 sufficientemente prossimo alla frontiera.

Sia, d'altra parte, C_0 il cerchio osculatore al contorno in Q_{P_0} ed R il raggio di C_0 , preso col segno $+$ o col segno $-$, secondo la convenzione fatta più sopra. Si scelgano ad arbitrio due quantità R', R'' , per le quali risulti

$$(12) \quad \frac{1}{R'} > \frac{1}{R} > \frac{1}{R''}$$

e si indichino con C', C'' i due cerchi tangenti a C in Q_{P_0} , col raggio rispettivamente $|R'|$ e $|R''|$ e col centro dalla parte della normale interna o da quella della normale esterna, secondochè R', R'' sono positivi o negativi.

Esisterà allora un arco $\widehat{Q_1 Q_2}$ di FD , contenente Q_{P_0} e di cui ogni punto, tranne Q_{P_0} , sarà esterno a C' ed interno a C'' . Ove si prenda il punto P sufficientemente vicino a P_0 , si potrà far sempre sì che Q_P risulti contenuto in $\widehat{Q_1 Q_2}$: sia dunque I_0 un intorno di P_0 , contenuto in I , e, per ogni punto P del quale, Q_P cada appunto in $\widehat{Q_1 Q_2}$.

Nell'intorno I_0 si considerino, accanto alla funzione $t(P)$, uguale alla distanza di P da FD , o, ciò che è lo stesso, da $\widehat{Q_1 Q_2}$, le altre due funzioni $t'(P)$, $t''(P)$, uguali alle distanze di P dalle circonferenze C' e C'' rispettivamente. Poichè $\widehat{Q_1 Q_2}$ è esterno a C' e interno a C'' , si avrà

$$t'(P) \leq t(P) \leq t''(P),$$

il segno $=$ sussistendo quando e solo quando P si trova sulla normale $P_0 Q_{P_0}$. Sicchè, ponendo

$$f(t(P)) = u(P), \quad f(t'(P)) = u'(P), \quad f(t''(P)) = u''(P),$$

risulterà, poichè la $f(t)$ si è supposta non decrescente,

$$u'(P) \leq u(P) \leq u''(P),$$

il segno = sussistendo sempre nei punti P della normale $P_0 Q_{r_0}$, in particolare nel punto P_0 .

Da tali diseuguaglianze segue, non appena r sia sufficientemente piccolo perchè il cerchio $C(r, P_0)$ sia contenuto in I_0 ,

$$M_{C(r, P_0)} u'(P) \leq M_{C(r, P_0)} u(P) \leq M_{C(r, P_0)} u''(P).$$

È pertanto, per tutti i valori di r inferiori a una certa quantità,

$$\begin{aligned} \frac{u''(P_0) - M_{C(r, P_0)} u''(P)}{r^2} &\leq \frac{u(P_0) - M_{C(r, P_0)} u(P)}{r^2} \leq \\ &\leq \frac{u'(P_0) - M_{C(r, P_0)} u'(P)}{r^2}, \end{aligned}$$

onde, passando al limite, si trae

$$(13) \quad \Delta'' u''(P_0) \leq \Delta'' u(P_0) \leq \Delta'' u'(P_0).$$

Ora, se si assume un sistema di coordinate polari ρ, θ col polo in P' , risulta

$$u'(P) = f(R' - \rho), \quad \Delta'' u' = \Delta u' = f'' - \frac{1}{\rho} f' = f'' - \frac{1}{R' - t} f'$$

Analogamente si deduce che

$$\Delta'' u'' = \Delta u'' = f'' - \frac{1}{R'' - t} f'.$$

Dalla (13) segue quindi, dato che R' ed R'' possono scegliersi prossimi quanto si vuole ad R , con la condizione (12),

$$(14) \quad \Delta'' u(P_0) = f'' - \frac{1}{R-t} f'.$$

Se poi al punto P_0 corrispondono diversi - magari anche infiniti - punti Q_{P_0} della frontiera, per ciascuno dei quali è $t(P_0) = \overline{P_0 Q_{P_0}}$ e se i raggi di curvatura della frontiera in tali punti non sono tutti eguali fra di loro, allora si vede subito, con lo stesso ragionamento fatto per dedurre la (14), che il $\Delta'' u(P_0)$ non può superare tutte le espressioni $f'' - \frac{1}{R-t} f'$,

per tutti i diversi raggi di curvatura R nei punti corrispondenti a P_0 . Sicchè si ottiene ad ogni modo una limitazione per $\Delta'' u(P_0)$, la quale è sufficiente per il fine che si ha in vista.

Se infine al punto P_0 corrisponde un unico punto Q_{P_0} , per cui $t(P_0) = \overline{P_0 Q_{P_0}}$, ma esiste un insieme di punti P avente P_0 per punto d'accumulazione e tale che ad ogni punto P corrispondono diversi Q_P , per cui $t(P) = \overline{P Q_P}$, allora, al tendere di P a P_0 in codesto insieme, i vari punti Q_P tenderanno tutti all'unico Q_{P_0} , e sussisterà ancora inalterata la relazione (14).

7. - Determinazione di una funzione superarmonica maggiorante.

Dopo quanto si è detto, non resta altro che determinare una funzione $f(t)$ sempre crescente nell'intervallo $(0, S_0)$, nulla e con la derivata prima eguale ad uno per $t=0$, verificante infine la diseuguaglianza

$$f''(t) - \frac{1}{R-t} f'(t) \leq -M < 0,$$

per tutti i valori del raggio di curvatura R , preso col segno stabilito dalla convenzione del n.º precedente.

Ciò può farsi ancora con infinita arbitrarietà. Ma, per ottenere che la funzione trovata si riduca in particolare alla (10),

quando il dominio D si riduce al cerchio $0 \leq \rho < R$, si aggiungerà ancora la condizione, che debba essere

$$f''(t) - \frac{1}{R_0 - t} f'(t) = \text{cost.}, \quad f'(S_0) = 0.$$

Tali ulteriori condizioni determinano completamente la $f(t)$, che, come subito si vede, vien data da

$$(15) \quad f(t) = \frac{R_0}{S_0(2R_0 - S_0)} \left[R_0 t - \frac{t^2}{2} - (R_0 - S_0)^2 \log \frac{R_0}{R_0 - t} \right].$$

È utile notare qui esplicitamente, sebbene si tratti di cosa pressochè evidente, che, se R_0 è positivo, esso sarà certo non inferiore ad S_0 . Infatti, se R_0 (che è definito da (11)) è positivo, allora il dominio è convesso; e contenendo esso, per la definizione di S_0 , un cerchio di raggio S_0 tangente alla frontiera (in due o più punti) bisogna che nei punti di contatto il raggio di curvatura sia superiore al raggio S_0 del cerchio. Sicchè, a maggior ragione, il massimo R_0 del raggio di curvatura supererà S_0 .

Da ciò risulta subito che, tanto per R_0 positivo quanto per R_0 negativo, il Δu è sempre negativo, con un massimo negativo. È infatti, per la (14),

$$\Delta u = \frac{-R_0}{S_0(2R_0 - S_0)} \cdot \frac{(R_0 - t)^2 (R + R_0 - 2t) + (R_0 - S_0)^2 (R - R_0)}{(R_0 - t)^2 (R - t)};$$

il Δu è quindi crescente al crescer di R , giacchè

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial R} = \frac{R_0}{S_0(2R_0 - S_0)} \cdot \frac{(R_0 - t)^2 - (R_0 - S_0)^2}{(R_0 - t)(R - t)^2} \geq 0.$$

Sicchè il massimo di Δu al variare di R viene raggiunto per $R = R_0$, se $R_0 > 0$, e per $R = R_0$ oppure per $R = +\infty$, se $R_0 < 0$. Si ha quindi, nel primo caso,

$$(16) \quad \max \Delta u = \frac{-2R_0}{S_0(2R_0 - S_0)},$$

e nel secondo caso, $\max \Delta u$ eguale alla maggiore di due quantità, di cui una è quella stessa ora scritta e l'altra è

$$[\max \Delta u]_{R=+\infty} = \frac{-R_0}{S_0(2R_0 - S_0)} \cdot \frac{(R_0 - t)^2 + (R_0 - S_0)^2}{(R_0 - t)^2}.$$

Ma questa quantità, essendo R_0 negativo, è minore della precedente. Dunque sussiste in ogni caso la (16).

8. - Formole di maggiorazione.

Per mettere ora in atto le formole di maggiorazione indicate al n.º 4, non occorre altro che determinare la funzione ivi indicata con $v(P)$, la quale deve assumere i valori prescritti alla frontiera e deve avere il Δ'' limitato superiormente nell'intero dominio. Una tale funzione si può determinare con grande arbitrarietà. Ma, ad eliminare ogni dubbio, sarà bene indicare un modo di determinarla in ipotesi alquanto generali pel dominio.

Si supponga che, in ogni punto del contorno (o di ciascuno dei contorni) del dominio, ammettano derivate rispetto all'arco, dei primi tre ordini, limitate, i secondi membri delle equazioni parametriche del contorno stesso, e derivate dei primi due ordini, anche limitate, la funzione che rappresenta i valori assegnati sulla frontiera. Si supponga inoltre che il raggio di curvatura non si annulli in nessun punto della frontiera medesima.

In tali ipotesi, si stacchi, a partire da ciascun punto Q della frontiera, un segmento QQ' sulla normale, in modo che l'altro estremo Q' cada sempre nel dominio D e che il centro di curvatura della frontiera in Q non cada mai fra Q e Q' . Il punto Q' si sceglierà inoltre sufficientemente prossimo a Q , affinché esso possa, al variare di Q sulla frontiera di D , descrivere la frontiera di un nuovo dominio D' contenuto in D e non contenente alcun punto dei segmenti QQ' .

Ciò posto, la funzione $v(P)$ può definirsi al modo seguente. Si prenda una costante K , che limiti superiormente i valori

assegnati sulla frontiera, e si ponga $v(P) = K$ in D' . Si prolunghi poi la definizione di $v(P)$ in $D - D'$, ponendo $v(P)$ lineare nell'intervallo QQ' , con la condizione di prendere il valore K in Q' , e in Q il valore ivi prescritto.

Il $\Delta''v$ risulta allora, in $D - D'$, eguale a un'espressione che contiene soltanto quelle derivate, che per ipotesi si son supposte limitate; in D' , eguale a zero; sulla frontiera di D' , infine, minore certamente di zero, poichè il valore K assunto ivi dalla $v(P)$ è il massimo assoluto di codesta funzione in D . Dunque il $\Delta''v$ è limitato superiormente in tutto D .

Inoltre la funzione $v(P)$ definita in tal modo ha certo la derivata normale limitata su tutta la frontiera di D . Sicchè essa è appunto del tipo richiesto.

Così, ricordando le (6) e (7), e le (15) e (16), si potranno scrivere le seguenti formole di maggiorazione :

$$(17) \quad w \leq v + (\text{estr. sup. } \Delta''v) \cdot \left[R_0 t - \frac{t^2}{2} - (R_0 - S_0)^2 \log \frac{R_0}{R_0 - t} \right],$$

$$\frac{dw}{dn} \leq \frac{dv}{dn} + \frac{S_0(2R_0 - S_0) \cdot (\text{estr. sup. } \Delta''v)}{2R_0},$$

dove t indica, come prima, la distanza del punto xy dalla frontiera di D .

Naturalmente, in modo perfettamente analogo, si otterrebbe una funzione $v(P)$ atta a fornire una limitazione inferiore per $w(P)$, mentre poi, valendosi delle formole (7'), (7''), si traggono delle limitazioni anche per le derivate parziali sulla frontiera.

Si può osservare che il valore pratico della formola (17) viene diminuito dal fatto che in essa figura la quantità (estr. sup. $\Delta''v$), il calcolo della quale sarà in generale molto complicato, dato il modo com'è stata ora definita la funzione $v(P)$. Ma le considerazioni sin qui svolte sono intese soltanto a mostrare come, lasciando una notevole generalità di ipotesi sul dominio D , si può sempre, in maniera (almeno teoricamente) molto facile, determinare la funzione $v(P)$, mentre però non è escluso che in pratica possano determinarsi con maggiore semplicità, caso per caso, delle funzioni $v(P)$ aventi il $\Delta''v$ limitato

superiormente, assumenti sul contorno i valori ivi prefissati e aventi derivate parziali prime finite e continue sul contorno stesso.

Così per esempio, se si considera il caso, già abbastanza esteso, di un dominio D limitato da due curve, che possano rappresentarsi in coordinate polari ρ, θ mediante le equazioni

$$\rho = \alpha(\theta), \quad \rho = \beta(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

ove $\alpha(\theta)$ e $\beta(\theta)$ siano funzioni finite e continue insieme con le prime due derivate, con $\alpha(\theta) > \beta(\theta) > 0$, si potrà determinare la $v(P)$ come una funzione lineare di ρ per ogni valore di θ . Detti $\varphi(\theta), \psi(\theta)$ i valori prescritti rispettivamente sul contorno esterno e sul contorno interno, risulterà

$$v(P) = \frac{[\varphi(\theta) - \psi(\theta)] \cdot \rho + \alpha(\theta)\psi(\theta) - \beta(\theta)\varphi(\theta)}{\alpha(\theta) - \beta(\theta)},$$

e pertanto, ove si supponga che anche $\varphi(\theta), \psi(\theta)$ ammettano derivate dei primi due ordini finite e continue, sarà

$$(18) \quad \Delta v = \frac{1}{\rho} \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta} + \rho \cdot \left(\frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta} \right)'' + \left(\frac{\alpha\psi - \beta\varphi}{\alpha - \beta} \right)'',$$

da cui subito si dedurrà il valore di (estr. sup. Δv) in funzione dei dati $\alpha, \beta, \varphi, \psi$.

Nel caso che D sia limitato soltanto dalla curva $\rho = \alpha(\theta)$, si può fissare la $v(P)$ allo stesso modo, ponendo per $\beta(\theta)$ lo zero e per $\psi(\theta)$ una costante, la quale va però scelta superiore al massimo di $\varphi(\theta)$ in $(0, 2\pi)$, affinchè il primo termine nel secondo membro della (18) non possa tendere a $+\infty$, per $\rho \rightarrow 0$.

In particolare se si considera la funzione $w(P)$, armonica nel dominio limitato dall'ellisse

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

e assumente sul contorno i valori $\varphi(\theta)$, sussistono, in base alle (17), nelle quali si determini la $v(P)$ al modo adesso indicato, le seguenti disequaglianze

$$(18) \quad \frac{(\varphi - K) \cos \theta - \varphi' \sin \theta}{a} \leq w' \leq \frac{(\varphi - H) \cos \theta - \varphi' \sin \theta}{a},$$

$$\frac{(\varphi - K) \sin \theta + \varphi' \cos \theta}{b} \leq w'' \leq \frac{(\varphi - H) \sin \theta + \varphi' \cos \theta}{b},$$

dove H e K rappresentano due costanti, che possono determinarsi, per esempio, così: nella prima delle (18),

$$(19) \quad H = \min(\varphi'' + \varphi), \quad K = \max(\varphi'' + \varphi),$$

se $\cos \theta \geq 0$;

$$(19') \quad H = \max(\varphi'' + \varphi), \quad K = \min(\varphi'' + \varphi),$$

se $\cos \theta < 0$; nella seconda, invece, (19) se $\sin \theta \geq 0$; (19') se $\sin \theta < 0$.
