Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Anna Simoni

Intorno ad una generazione dei covarianti con due serie di variabili, d'una forma binaria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 3 (1932), p. 28-45
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__28_0>

INTORNO AD UNA GENERAZIONE DEI COVARIANTI CON DUE SERIE DI VARIABILI, D'UNA FORMA BINARIA

di ANNA SIMONI *a Padova* (1)

In due importanti Memorie dei Math. Ann. 89-90 il prof. COMESSATTI ha posto le basi di una teoria geometrica delle forme invariantive legate ad una forma binaria (2), affidandosi ad una elegante e feconda rappresentazione iperspaziale; e ne ha sviluppate alcune fondamentali conseguenze nel campo classico delle forme con una serie di variabili (covarianti ordinarî), limitandosi, per quel che concerne le forme con più serie di variabili, a tracciare in brevi cenni la via alle estensioni (3).

Io mi sono proposta di proseguire nell' indirizzo accennato lo studio dei covarianti con due serie di variabili, almeno fino alle prime conseguenze espressive. Seguendo una via parallela a quella percorsa dal COMESSATTI per il caso ordinario, sono così pervenuta ad una notevole espressione dei covarianti considerati mediante le forme polari della forma fondamentale (n. 5), che porge la naturale e completa estensione del *teorema di* FAÀ DI BRUNO, ed anzi lo contiene come caso particolare. Della generazione ottenuta ho svolto, nella terza parte del lavoro, qualche prima applicazione.

Nella trattazione ho adottate le notazioni del COMESSATTI, pur non mancando di richiamare il significato di quelle essenziali.

(1) Estratto dalla Dissertazione presentata all' Università di Padova (1931) per la laurea in Matematica.

(2) A. COMESSATTI, *a*) *La curva razionale normale ed i suoi gruppi proiettivi.* [Math. Ann. 89 (1923) pp. 272-297], *b*) *Introduzione alla geometria delle forme binarie* [Ibid. 90 (1923) pp. 174-221].

(3) Loco cit. *b*), n.° 5.

§ 1. - Generalità - Rappresentazione geometrica - Caso delle forme polari.

1. - Il punto di partenza della teoria geometrica del Comessatti, risiede nella rappresentazione delle forme binarie d'ordine n

$$f(x_1, x_2) \equiv \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x_1^{n-i} x_2^i, \tag{1}$$

cioè dei gruppi G_n di n punti $(f=0)$ d'una retta x, coi punti $F(a_0\, a_1 \ldots a_n)$ d'uno spazio lineare S_n. In tal rappresentazione ai G_n risultanti dal contare n volte un punto P della x (cioè alle f che sono potenze n–esime di forme lineari), corrispondono i punti d'una curva razionale normale C di S_n, che ha un ufficio essenziale per la teoria. Non v'ha alcuna inconveniente, anzi generalmente è vantaggioso, adottare la stessa designazione per i punti della retta x e per i loro corrispondenti su C; in particolare si designeranno con O, U i punti (*zero* ed *infinito*) corrispondenti alle coppie (0, 1) (1, 0) di valori delle variabili x_1, x_2.

Ad una proiettività π della retta x

$$\begin{aligned} x_1' &= c_{11}\, x_1 + c_{12}\, x_2 \\ x_2' &= c_{21}\, x_1 + c_{22}\, x_2 , \end{aligned} \tag{2}$$

pensata come operante sui G_n, risponde in S_n un'omografia Π che muta in sè la C, ed opera fra i suoi punti come la π tra i corrispondenti di x. E può essere opportuno ricordare che, se con $\gamma_i(a)$ si denotano le forme, lineari nelle a_i, mediante cui si esprimono i coefficienti a_i' della forma

$$f(x_1', x_2') \equiv f(c_{11}x_1 + c_{12}x_2,\, c_{21}x_1 + c_{22}x_2), \tag{3}$$

le equazioni

$$a_i' = \gamma_i(a), \tag{4}$$

rappresentano in S_n la Π^{-1}, talchè se $\Phi(a_0 a_1, \ldots a_n) = 0$ è una

3

ipersuperficie di quello spazio, la sua trasformata mediante Π ha per equazione $\Phi(\gamma_0(a), \gamma_1(a), \ldots, \gamma_n(a)) = 0$ [4].

Il gruppo Γ contiene notoriamente sottogruppi *continui* binomî e monomî, formati dalle operazioni che lasciano fissi uno o due punti della C; li designeremo rispettivamente con Γ_p e Γ_{pq} [5]. Invece con (Γ_{pq}) designeremo il gruppo delle operazioni di Γ che lasciano fissa la *coppia* P, Q; esso è un gruppo *misto* che contiene Γ_{pq} come sottogruppo invariante d'indice 2, ed inoltre, come si vede facilmente, è l'unico gruppo proiettivo non continuo (cioè distinto dai Γ_p e da Γ) della C che contiene il Γ_{pq}.

2. - Un *covariante* della forma f, nelle serie di variabili x_1, x_2; y_1, y_2; ...... è notoriamente una *forma* $\Phi(a_0 a_1 \ldots a_n \mid x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots)$ di *grado* g nelle a_i e di *ordini* $m, \mu, \ldots$ nelle coppie x_1, x_2; $y_1, y_2; \ldots$, per cui, qualunque sia la sostituzione (2) a modulo $D \neq 0$, si ha, colle notazioni attuali:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\Phi(\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_n \mid x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots) \equiv \\ &\equiv D^p \Phi(a_0 a_1 \ldots a_n \mid x'_1, x'_2; y'_1, y'_2; \ldots), \end{aligned}$$

l'identità sussistendo rispetto alle $a, x, y, \ldots$. ovvero alle $a', x', y', \ldots$ $(a'_i = \gamma_i(a))$ ed ai coefficienti c_{rs} della sostituzione. È quasi superfluo avvertire che, di fronte a questa, le variabili di ciascuna serie sono *cogredienti*; l'intero p dicesi notoriamente il *peso* del covariante Φ. Nel caso dei covarianti ordinari il Comessatti ha osservato che, ove alle $a_0\ a_1 \ldots a_n$ si dia l'interpretazione predetta, e le variabili x_1, x_2 s'interpretino quali parametri, l'equazione $\Phi = 0$, rappresenta in S_n un'ipersuperficie Δ_p associata al punto $P(x_1, x_2)$ della C ed invariante per il relativo Γ_P; quindi variabile con P in un sistema algebrico ∞^1, Δ, d'indice m (*sistema rappresentativo di* Φ), invariante per il gruppo totale Γ. Viceversa ogni sistema algebrico ∞^1, Δ, invariante per Γ, individua un covariante Φ col quale sta nella relazione accennata.

(4) Comessatti, loco cit *a*) n.° 5.

(5) Il Comessatti introduce per il gruppo Γ_U e per altri notevoli, notazioni speciali, che qui eviteremo.

Nello stesso ordine d'idee è chiaro che se Φ è un covariante con due serie di variabili x_1, x_2; y_1, y_2, l'equazione $\Phi=0$, considerata in S_n, rappresenta ivi una ipersuperficie Δ_{PQ} associata alla coppia di punti $P(x_1, x_2)$ $Q(y_1, y_2)$ della C, e quindi variabile in un sistema algebrico ∞^2, Δ, invariante per Γ ([6]). Più precisamente ogni omografia Π di Γ che muti ordinatamente la coppia P, Q nella P', Q', trasforma Δ_{PQ} in $\Delta_{P'Q'}$ ([7]), quindi in particolare Δ_{PQ} rimane invariata per le omografie del sottogruppo monomio Γ_{PQ}.

Fra le Δ_{PQ} è particolarmente notevole la Δ_{PQ} rappresentata dall'equazione $\Phi(a_0 a_1, \ldots a_n \mid 1, 0; 0, 1)=0$, che si ottiene eguagliando a zero il coefficiente di $x_1^m y_2^\mu$ in Φ. Tale coefficiente, per i motivi di cui appresso, si dirà la *generatrice* del covariante Φ e s'indicherà con $\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n)$.

Pongasi ancor mente alle due osservazioni seguenti, delle quali la seconda ha per il seguito importanza essenziale:

a) In generale una Δ_{PQ} non è invariante per il gruppo misto (Γ_{PQ}); ciò accade allora e soltanto che Δ_{PQ} coincide con Δ_{QP}, cioè quando Φ non muta essenzialmente scambiando tra di loro le variabili delle due serie: in breve quando Φ è un ***covariante simmetrico.***

b) Va avvertita, nel caso attuale, l'esistenza di covarianti *identici* cioè indipendenti dai coefficienti della forma. Essi sono tutti potenze del covariante bilineare $(xy)=x_1 y_2 - x_2 y_1$ ([8]) e non influiscono sulla rappresentazione geometrica di un covariante Φ nel senso che i due covarianti Φ ed $(xy)^\alpha \Phi$ dànno luogo allo stesso sistema Δ. Questo pertanto non individua il

([6]) Cfr. Comessatti, loco cit. (2), *b*) n.° 5. Si può dimostrare che l'*indice* del sistema Δ è $2m\mu$; qui non ci tratterremo per brevità su questo punto.

([7]) Ciò si vede nel modo più semplice interpretando opportunamente la (5); e precisamente osservando che, se le $\gamma_i(a)$ sono relative alla Π in discorso, il primo membro eguagliato a zero rappresenta (n.° 1) la trasformata di Δ_{PQ} mediante Π, mentre il secondo membro rappresenta $\Delta_{P'Q'}$.

([8]) Geometricamente ciò equivale a dire che sulla retta x ogni corrispondenza algebrica invariante (per il gruppo proiettivo totale) è l'identità (o una sua potenza). E la dimostrazione è immediata.

covariante relativo, se non a meno di potenze di (xy), restando però ovvio che l'indeterminazione può togliersi convenendo di far riferimento solo a *covarianti puri* (e, beninteso, interi) cioè liberati da fattori del tipo in discorso.

3. - Le osservazioni del n.° precedente si invertono facilmente nel senso che ogni sistema algebrico Δ, ∞^2, d'ipersuperficie di S_n, invariante per Γ, individua, a meno dell'indeterminazione appena rilevata, un covariante Φ, del quale fornisce la rappresentazione geometrica. Non sarà forse superfluo, anche ad illustrazione di quel che precede, qualche dettaglio in merito.

Poichè Δ è ∞^2, e Γ, ∞^3, una, fissata, ma generica, ipersuperficie di Δ, sia $\overline{\Delta}$, è invariante per un sottogruppo ∞^1, T, di Γ, evidentemente *algebrico*, perchè lo sono Γ e Δ, e quindi contenente (almeno) una parte *continua* (ed irriducibile) della stessa dimensione, cioè un Γ_{PQ}. Tenendo presente l'osservazione fatta alla fine del n.° 1, se ne deduce che T s'identifica con Γ_{PQ} ovvero con (Γ_{PQ}). Nel primo caso un'involuzione di Γ che scambî P con Q trasforma $\overline{\Delta}$ in una diversa ipersuperficie $\overline{\Delta}_1$ del nostro sistema; e la distinzione può rilevarsi nel modo più naturale, associando alle due ipersuperficie i due ordinamenti della coppia PQ; giacchè si vede facilmente che tale associazione, una volta fissata per una $\overline{\Delta}$, lo è per tutto il sistema continuo (che coincide con Δ o ne è parte) che se ne deduce mediante le trasformazioni di Γ. Nel secondo caso, all'ipersuperficie $\overline{\Delta}$ resteranno associate entrambe le coppie P, Q; Q, P. Ad una assegnata coppia (ordinata) P, Q di C, resterà così in generale associato un numero *finito* l d'ipersuperficie $\overline{\Delta}$, e queste, prese insieme, daranno un'ipersuperficie $\overline{\Delta}'$ (riducibile se $l > 1$) variabile in un sistema ∞^2, Δ', i cui elementi sono i gruppi d'un'involuzione d'ordine l entro Δ. E siccome ad ogni coppia P, Q, è associata *una* $\overline{\Delta}'$ (che ora potrà indicarsi con Δ'_{PQ}), così l'equazione di quest'ipersuperficie dipenderà *razionalmente* dai parametri (x_1, x_2) (y_1, y_2) della coppia P, Q, quindi potrà porsi sotto la forma

$$\Phi(a_0 a_1 \ldots a_n \mid x_1, x_2; y_1, y_2) = 0, \tag{6}$$

la Φ essendo una *forma* nelle a, nelle x e nelle y. Ma per il comportamento delle Δ'_{PQ} di fronte a Γ, un' operazione Π di questo gruppo la quale muti P in P' e Q in Q' dovrà trasformare Δ'_{PQ} in $\Delta'_{P'Q'}$, e pertanto le due equazioni (nelle a_i)

$$(7) \qquad \Phi(\gamma_0(a),\ \gamma_1(a), \ldots,\ \gamma_n(a) \mid x_1,\ x_2;\ y_1,\ y_2) = 0,$$

$$(7') \qquad \Phi(a_0 a_1 \ldots,\ a_n \mid x'_1,\ x'_2;\ y'_1,\ y'_2) = 0,$$

dovranno rappresentare la *stessa* ipersuperficie $\Delta'_{P'Q'}$. I loro primi membri non potranno differire quindi che per un fattore indipendente dalle a_i il quale risulta anche indipendente dalle x_1, x_2; y_1, y_2 perchè (7) (7′) hanno, in quelle variabili, lo stesso grado. Si tratta quindi d' un fattore dipendente soltanto dai coefficienti della sostituzione (2) a cui è associata Π, ed infine, com'è obbligatorio, d'una potenza del modulo D ([9]); con che si ricade sulla (5) restando provato che Φ è un covariante.

Il lettore vedrà infine facilmente che, quando la Δ'_{PQ} è riducibile e si spezza in l parti irriducibili, ciascuna di esse, trasformata colle operazioni di Γ, genera un sistema Δ. È ovvio che in tal caso Φ è il *prodotto* di l covarianti irriducibili (prescindendo, naturalmente, da potenze del covariante identico).

4. - È ovvio, per quel che precede, che un'ipersuperficie di S_n la quale sia *individuata* da determinate relazioni proiettive colla curva C e con due P, Q, dei suoi punti, è invariante per il gruppo Γ_{PQ}, quindi a sua volta individua un sistema Δ invariante per Γ ed infine, a meno della solita indeterminazione, un covariante Φ. Le più semplici ipersuperficie, col comportamento indicato, che si presentano spontaneamente alla considerazione, sono gli *iperpiani* che hanno con la C in P e Q due contatti di ordini rispettivi h, $n-h$, cioè che congiungono lo S_{h-1} osculatore in P collo S_{n-h-1} osculatore in Q. Orbene è facile vedere che i covarianti (puri) Φ corrispondenti altro non sono

([9]) Cfr. Capelli, *Istituzioni di Analisi algebrica* [Napoli, Pellerano. 1909]. Cap. XXII, § 11 che le *forme polari* della forma fondamentale f, (le quali sono notoriamente covarianti assoluti, cioè di *peso zero*, della f).

Un modo rapido di vedere la cosa, procede dall'osservare che la *generatrice* della forma polare h-esima

$$(8) \qquad \Delta^h = \frac{(n-h)!}{n!}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{(h)},$$

cioè il coefficiente di $x_1^{n-h}\, y_2^h$, è precisamente a_h, e che l'equazione $a_h = 0$ rappresenta l'iperpiano congiungente lo S_{h-1} osculatore in $U(1, 0)$ collo S_{n-h-1} osculatore in $O(0, 1)$ [10]. Meno rapidamente, ma forse più espressivamente, la conclusione può raggiungersi poggiando sull'elegante interpretazione geometrica dell'operazione di polare, indicata dal Comessatti [11], col ragionamento sintetico iperspaziale che andiamo ad esporre:

Sia $F(a_0 a_1 \ldots a_n)$ il punto di S_n immagine della forma fondamentale f. L'annullarsi dell'h-esima polare del punto $Q(y_1, y_2)$ rispetto alla forma, quando si sostituiscano nella polare stessa le coordinate (x_1, x_2) di P, indica che in gruppo polare h-esimo di P, sulla retta x, passa per Q. - Proiettiamo ora la C dallo S_{h-1} osculatore in Q in uno spazio S_{n-h}. Otterremo in questo una curva C', di ordine $n-h$, razionale normale. I punti P ed F verranno proiettati in P' ed in F'. Il Comessatti dimostra che il gruppo polare h-esimo di Q si ottiene trasportando su C il G_{n-h} individuato da F' sulla C', cioè il gruppo dei punti di contatto con la C' degli S_{n-h-1} osculatori passanti per F'. Ne viene che la condizione perchè P appartenga al gruppo h-esimo polare di Q, è che lo S_{n-h-1} osculatore a C' in P', passi per F', cioè infine che lo S_{n-h-1} osculatore a C in P si appoggi allo S_h individuato da F e dallo S_{h-1} centro di proiezione. Ma tale S_h può essere individuato anche dallo S_{h-1} osculatore in Q e dal

[10] Più in generale il Comessatti ha mostrato che il sistema (da lui indicato con Λ_h) degli iperpiani congiungenti lo S_{h-1} osculatore in U cogli S_{n-h-1} relativi al punto variabile P della C, ha l'equazione $a_x^h = 0$, (x_1, x_2 parametri relativi a P).

[11] Cfr. Comessatti, loco cit. [2], a), § 5.

punto in cui esso si appoggia allo S_{n-h-1} osculatore in P. La condizione cercata è, quindi, che F giaccia nell'iperpiano individuato dall'S_{h-1} osculatore in Q e dall'S_{n-h-1} osculatore in P.

§ 2. - **Deduzione dei covarianti dalle relative generatrici.**

5. - Se Φ è un covariante con due serie di variabili, e $\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n)$ la sua generatrice, l'equazione $\varphi = 0$ rappresenta in S_n l'ipersuperficie Δ_{UO}, e questa (come ogni Δ_{PQ}) individua il sistema Δ rappresentativo di Φ, quindi, a meno di potenze di (xy), lo stesso Φ. È ovvio che una tal dipendenza deve potersi concretare in un procedimento formale, che ci proponiamo di ricercare.

Fissiamo anzitutto bene il punto di partenza, traducendo in veste formale la *condizione caratteristica* per la generatrice φ. Tutto si riduce ad esprimere che l'ipersuperficie $\varphi = 0$ è invariante per il sottogruppo Γ_{UO}, e la conclusione a cui si perviene è che φ dev'essere una *forma isobarica* delle relative variabili ([12]).

Non essendovi altre restrizioni, si potrà addirittura supporre che si tratti d'una forma isobarica qualunque; non escludendosi che, in caso particolare, $\varphi = 0$ sia addirittura invariante per Γ_U, cioè φ sia un *seminvariante* ([13]). Allora il sistema Δ da esso individuato non è più ∞^2, ma ∞^1 (le ∞^1 Δ_{PQ} relative allo stesso P coincidono) e dal covariante (puro) Φ che ne resta individuato, sparisce la serie y_1, y_2 delle variabili, talchè Φ si riduce ad un covariante ordinario. Le conclusioni a cui perverremo saranno senz'altro applicabili anche a questo caso.

La via per risolvere il problema che ci siamo proposti, è stata completamente tracciata al § precedente. Si tratta di scrivere l'equazione della generica Δ_{PQ} del sistema Δ individuato

([12]) Cfr. Comessatti, loco cit. ([2]), *a*), n.° 7.

([13]) Ciò si verifica quando φ soddisfa alla nota equazione differenziale

$$\sum_{i=1}^{n} i\, a_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0.$$

da φ, mettendo in evidenza i parametri x_1, x_2; y_1, y_2 dei punti P, Q. Ed appena si ricordi che Δ_{PQ} è la trasformata di Δ_{UO} mediante una qualunque Π fra le operazioni di Γ che mutano (ordinatamente) la coppia U, O nella coppia P, Q, quindi è rappresentata (n.° 1) da un'equazione del tipo

$$\varphi(\gamma_0(a)\, \gamma_1(a) \dots \gamma_n(a)) = 0,$$

si vede che tutto riducesi a ricercare le espressioni delle $\gamma_i(a)$ relative alla proiettività Π.

Poichè in particolare, quando la generatrice φ riducesi ad a_h, si deve ottenere, come covariante (puro) Φ, la forma polare Δ^h, è chiaro che le $\gamma_i(a)$, a meno di fattori costanti o di potenze del covariante identico, dovranno identificarsi colle Δ^i; ed il calcolo diretto che ora intraprenderemo mostra che si ha precisamente $\gamma_i(a) = \Delta^i$.

Modifichiamo allo scopo leggermente le notazioni, indicando con ξ_1, ξ_2; η_1, η_2 i parametri di P, Q; allora sulla retta x, una qualunque π che muti U, O in P, Q, può rappresentarsi con

$$(9) \qquad \begin{aligned} x_1' &= \xi_1 x_1 + \eta_1 x_2 \text{ [14]} \\ x_2' &= \xi_2 x_1 + \eta_2 x_2 . \end{aligned}$$

Tutto si riduce quindi a calcolare i coefficienti della forma

$$f(\xi_1 x_1 + \eta_1 x_2;\ \xi_2 x_1 + \eta_2 x_2).$$

Applicando a questa lo *sviluppo di* Joachimsthal si ha

$$(10) \qquad \begin{aligned} & f(\xi_1 x_1 + \eta_1 x_2,\ \xi_2 x_1 + \eta_2 x_2) = \\ & = x_1^n f(\xi_1 \xi_2) + \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2 \Delta^1 + \dots \binom{n}{h} x_1^{n-h} x_2^h \Delta^h + \dots + x_2^n \Delta^n \end{aligned}$$

[14] Al variare del fattore di proporzionalità d' una delle due coppie ξ_1, ξ_2; η_1, η_2, si hanno le ∞^1 proiettività che mutano U, O in P, Q.

dove nei simboli abbreviati Δ^i che qui adoperiamo le x, y s'intendono sostituite dalle ξ, η. Da tale espressione risulta subito, come avevamo asserito,

$$a'_k = \gamma_k(a) = \Delta^k. \qquad (\Delta^0 = f) \tag{11}$$

Segue che se $\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n) = 0$ è l'equazione della Δ_{PQ}, quella della generica Δ_{PQ} è

$$\varphi(\Delta^0 \Delta^1 \ldots \Delta^k \ldots \Delta^n) = 0, \tag{12}$$

e pertanto se Φ è un covariante avente per generatrice φ, le due forme Φ e $\varphi(\Delta^0\Delta^1 \ldots \Delta^n)$ differiscono solo per potenze di $(\xi\eta)$.

Supposto noto il peso p del covariante Φ, l'esponente di tale potenza si può precisare, tenendo presente che $\varphi(\Delta^0\Delta^1 \ldots \Delta^n)$ è, come la Δ^k, un covariante assoluto (di peso zero), mentre $(\xi\eta)$ ha il peso -1. Ne consegue sanz'altro che dovrà essere (a meno di un inessenziale fattore costante):

$$\Phi \equiv \frac{\varphi(\Delta^0\Delta^1 \ldots \Delta^n)}{(x\,y)^p} \tag{13}$$

Siamo qui ripassati dalle variabili ξ, η alle x, y poichè ora ciò non genera più alcuna confusione. In base alla (13) possiamo adunque enunciare il teorema seguente:

L'espressione di un covariante di peso p in due serie di variabili si deduce da quella della sua generatrice $\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n)$ sostituendo al posto dei coefficienti a_k le forme polari Δ^k e dividendo per la potenza p-esima del covariante identico (xy); od anche sotto altra forma:

Ogni covariante in due serie di variabili d'una forma binaria, si ottiene moltiplicando per una potenza (positiva, o, finchè sia possibile, negativa) del covariante identico $(x\,y)$, una forma isobarica (arbitraria) delle forme polari Δ^i.

6. – Val forse la pena di indicare come alle conclusioni raggiunte si possa anche pervenire seguendo una via puramente formale.

Se Φ è un covariante di peso p, la sua generatrice sarà

$$(14)\qquad \varphi(a_0 a_1 \dots a_n) = \Phi(a_0 a_1 \dots a_n \mid 1, 0;\ 0, 1).$$

Poniamo ora nella (5) del n.° 2 che esprime la proprietà covariantiva di Φ, $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = 1$, quindi anche, se la sostituzione operata è la (9) del n.° 5 $x'_1 = \xi_1$, $x'_2 = \xi_2$; $y'_1 = \eta_1$, $y'_2 = \eta_2$; $D = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$. Otteniamo

$$\Phi(a'_0 a'_1 \dots a'_n \mid 1, 0;\ 0, 1) \equiv (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^p \, \Phi(a_0 a_1 \dots a_n \mid \xi_1, \xi_2;\ \eta_1, \eta_2),$$

cioè per la (14)

$$\varphi(a'_0 a'_1 \dots a'_n) \equiv (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^p \, \Phi(a_0 a_1 \dots a_n \mid \xi_1, \xi_2;\ \eta_1, \eta_2).$$

E da tale formula, passando alle variabili x, y, e ricordando le (11) si ricade sulla (13) del n.° 5.

Accenniamo per ultimo ad una questione importante. Una forma isobarica $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$, assunta quale generatrice, individua un covariante puro Φ il quale è dato dall'espressione (13), qualora per p si ponga l'esponente della massima potenza di (xy) per cui è divisibile il numeratore. Come si determina quest'esponente nota la forma φ, o sotto altra veste, a quali condizioni deve soddisfare la forma φ perchè $\varphi(\Delta^0 \Delta^1 \dots \Delta^n)$ sia divisibile per un'assegnata potenza di (xy)?

Per $p = 1, 2$ si trova abbastanza facilmente che tali condizioni sono

$$\varphi(1, 1, \dots, 1) = 0, \qquad \sum_{h=0}^{n} h\, \varphi_h(1, 1, \dots 1) = 0,$$

dove si è scritto φ_h per $\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_h}$. Passando a valori più alti di p le espressioni si complicano notevolmente e non manifestano, almeno a prima vista, un semplice significato geometrico. Visto l'insuccesso dei primi tentativi, lasciamo per ora la questione in sospeso.

§ 3. - Prime applicazioni.

7. – Come abbiamo avvertito al n.° 5 le considerazioni del paragrafo precedente si applicano anche al caso in cui la generatrice φ è un seminvariante. Ne dovrà quindi scaturire la genesi del covariante *ordinario* Φ corrispondente, a partire dal seminvariante φ, cioè insomma il noto *teorema di* FAÀ DI BRUNO. La verifica è agevole.

Intanto dal secondo membro della (13) devono sparire le y_1, y_2. Ed invero, p peso del covariante ordinario Φ è proprio il peso di φ come forma isobarica, quindi, tenuto conto degli ordini della Δ^h, esso è il grado del numeratore nelle y_1, y_2.

Poichè il secondo membro della (13) è in realtà indipendente da y_1, y_2, si potrà dare a questa coppia un qualsiasi valore, in particolare 1, 0, ed allora la (13) diviene

$$\Phi = \frac{\varphi\,(\Delta_1^0\,\Delta_1^1 \ldots \Delta_1^n)}{x_2^p}, \tag{15}$$

dove si è posto

$$\Delta_1^h = (\Delta^h)_{\substack{y_1=1\\ y_2=0}} = \frac{(n-h)\,!}{n\,!}\;\frac{\partial^h f}{\partial x_1^h}.$$

La (15) è proprio l'espressione del teorema di FAÀ DI BRUNO con riferimento a variabili omogenee. Lo si verifica passando alla variabile non omogenea x, giacchè allora, posto $f(x_1, x_2) = x_2^n \bar{f}\,(x)$, viene subito

$$\frac{\partial^h f}{\partial x_1^h} = x_2^{n-h}\,\frac{\partial \bar{f}}{\partial x},$$

e quindi, abbreviatamente.

$$\Delta_1^h = x_2^{n-h}\, a_x^{n-h} \text{ [15]}.$$

[15] A rigore, se i simboli si riferiscono alla a_x^n, dovrebbe scriversi $a_x^{n-h}\,a_1^h$ in luogo di a_x^{n-h}; quello ch' è essenziale è che con esso s' intende

Sostituendo allora nella (15), posto che g sia il grado di φ, si ottiene

$$\Phi = x_2^{ng-2p}\,\varphi\,(a_x^n\, a_x^{n-1} \ldots a_0).$$

Ma per una nota formula si ha $ng - 2p = m$, dove m altro non è che l'ordine del covariante Φ. Inoltre, designando con $\overline{\Phi}$ l'espressione di Φ nella variabile non omogenea x, abbiamo

$$\Phi\,(x_1, x_2) = x_2^m\, \overline{\Phi}\,(x)\,;$$

sicchè in definitiva risulta

$$\overline{\Phi}\,(x) = \varphi\,(a_x^n\, a_x^{n-1} \ldots a_0), \tag{16}$$

come prescrive, in forma non omogenea, il teorema di Faà di Bruno [16].

8. - Altre formule notevoli si ottengono, partendo ancora da un covariante ordinario

$$\Phi\,(a_0 a_1 \ldots a_n \mid x_1, x_2) = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \varphi_h\,(a_0 a_1 \ldots a_n)\, x_1^{m-h} x_2^h, \tag{17}$$

e considerandone le *forme polari*

$$\Delta^h \Phi = \frac{(n-h)\,!}{n\,!} \left(y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^{(h)}, \tag{18}$$

le quali, per un classico teorema di Cayley [17], sono pure cova-

rappresentare concisamente il polinomio

$$a_0 x_1^{n-h} + \binom{n-h}{1} a_1\, x_1^{n-h-1}\, x_2 + \ldots + a_{n-h}\, x_2^{-nh}$$

dove i coefficienti a_i sono quelli di f.

(16) Cfr. Comessatti, loco cit. (2), *b*), pag. 180.

(17) Cfr. Clebsch: *Theorie der binären algebraischen Formen* [Leipzig. Teubner, 1872], § 3.

rianti dello stesso peso p del dato. Tenendo conto che la *generatrice* di $\Delta^h\Phi$ è (n.° 4) il coefficiente φ_h di Φ, ed applicando la formula fondamentale (13), si trova la notevole espressione

$$\text{(19)} \qquad \Delta^h\Phi = \frac{\varphi_h(\Delta^0\Delta^1\ldots\Delta^n)}{(xy)^p},$$

nella quale, secondo le convenzioni precedenti, Δ^i sta per $\Delta^i f$. Se in particolare si identificano le x_1, x_2 con le y_1, y_2, il primo membro si riduce a Φ e così si ottiene la formula

$$\text{(20)} \qquad \Phi = \left\{\frac{\varphi_h(\Delta^0\Delta^1\ldots\Delta^n)}{(xy)^p}\right\}_{x=y}$$

che insegna a *costruire l'espressione di un covariante ordinario partendo da quella d'uno qualunque dei suoi coefficienti.*

Se infine, nella (17), al posto delle a_i si pongono le Δ^i e si tien conto della (19), si trova l'identità notevole

$$\text{(21)} \qquad \Phi(\Delta^0\Delta^1\ldots\Delta^n \mid x_1, x_2) = (xy)^p \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \Delta^h\Phi\, x_1^{m-h} x_2^h.$$

9. - Come ultima applicazione di quanto precede, mostreremo come si possa, da un covariante ordinario delle forme d'ordine n, dedurre un covariante in due serie di variabili per le forme di ordine $n-1$.

Premettiamo alcune brevi considerazioni sui legami esistenti tra ordine, gradi e peso di un covariante in due serie di variabili.

Sia P il peso (come forma isobarica) della generatrice $\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n)$ di un covariante $\Phi(a_0 a_1 \ldots a_n \mid x_1, x_2;\ y_1, y_2)$. Ogni termine della φ sarà evidentemente del tipo $\prod_{h=0}^{n} c_h\, a_h^{\alpha_h}$: sarà quindi

$$\text{(22)} \qquad P = \sum_{h=0}^{n} h\,\alpha_h.$$

La $\varphi(\Delta^0 \Delta^1 .. \Delta^n)$ ha perciò nelle x e nelle y rispettivamente i gradi [18]

$$\sum_{h=0}^{n} (n-h)\alpha_h = ng - P$$

$$\sum_{h=0}^{n} h\,\alpha_h = P.$$

Allora, per la (13), indicando con γ_1 e γ_2 i gradi di Φ nella x e nella y, avremo

$$(23) \qquad \begin{aligned} \gamma_1 &= ng - (P+p) \\ \gamma_2 &= P - p, \end{aligned}$$

da cui ancora, per somma e differenza, [19]

$$(24) \qquad \begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= ng - 2p \\ \gamma_1 - \gamma_2 &= ng - 2P. \end{aligned}$$

Passiamo ora a sviluppare la questione che ci siamo proposti al principio di questo numero.

Consideriamo sulla retta x un gruppo G_{n-1} di $n-1$ punti che rappresenta una forma $f_{n-1}(x_1, x_2)$ ed un punto X di coordinate $\overline{x}_1, \overline{x}_2$. Il gruppo G_n così costituito rappresenta una forma f di ordine n, i cui coefficienti $\overline{a}_i$ saranno funzione dei coefficienti a_i della f_{n-1} e delle $\overline{x}_1, \overline{x}_2$.

Ciò premesso è chiaro che se nell'espressione

$$\Phi(\overline{a}_0\, \overline{a}_1 \ldots \overline{a}_n \mid y_1, y_2)$$

d'un covariante (d'ordine m nelle y) si considerano come va-

(18) Si osservi che la Δ^h ha rispettivamente nella x e nella y il grado $n-h$ ed h.

(19) Queste formule sono casi particolari di relazioni più generali date, per via ben diversa, dal Capelli nelle sue *Istituzioni di Analisi algebrica*, [Napoli - Pellerano, 1909], Cap. XXII°. § 12.

riabili anche $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, si ottiene un covariante con due serie di variabili delle f_{n-1}, giacchè da elementari considerazioni risulta che la *corrispondenza algebrica* fra i punti X e i punti Y radici di $\Phi = 0$ è proiettivamente covariante al gruppo G_{n-1} da cui siamo partiti. Ricorrendo alla nostra rappresentazione geometrica, andiamo a procurarci la generatrice del nuovo covariante, noto che sia il seminvariante di Φ.

È necessario ricordare anzitutto un'altra osservazione del Comessatti [20].

Indichiamo con E la curva sezione di ω, iperpiano osculatore alla C in U, con la sviluppabile delle tangenti alla C stessa. Le equazioni della E sono analoghe a quella della C, quando si operi la trasformazione di coordinate indicata dalle relazioni

$$b_{h-1} = \frac{a_h}{h} \qquad\qquad h = 1, 2, \ldots n.$$

Le b_j, così introdotte, si dicono *coordinate proprie* entro ω, in quanto si dimostra che, se Q è un punto di ω, cioè rappresenta un G_n composto di un G_{n-1} e del punto U, la forma corrispondente a quel G_{n-1} ha per coefficienti le coordinate b_j di Q.

Consideriamo ora nel sistema Δ di ipersuperficie, immagine del covariante ordinario Φ della forma f, la speciale ipersuperficie Δ_O relativa ad O, ed un punto P dell'intersezione di tale Δ_O con ω. Rispetto alla curva C, tale punto rappresenta un gruppo G_n contenente U ed il cui covariante passa per O [21]. Rispetto alla E prima introdotta, esso rappresenta invece il gruppo G_{n-1} ottenuto dal G_n trascurando il punto U.

La speciale Δ relativa ad U, cioè il seminvariante di Φ, avrà l'equazione

$$(25) \qquad\qquad \varphi(a_0 a_1 \ldots a_n) = 0 :$$

e da questa, applicando il teorema di Faà di Bruno, si deduce che la Δ_O è rappresentata da

[20] Cfr. Comessatti, loco cit. (·) b), n.° 9.

[21] Contiene U perchè P giace in ω, ed il suo covariante passa per O perchè P giace nella Δ_O.

$$\varphi(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0) = 0.$$

La sua intersezione con l'iperpiano ω, che ha l'equazione $a_0 = 0$, è quindi

$$\varphi(a_n a_{n-1} \ldots a_1 0) = 0$$

cioè, in coordinate proprie,

$$\varphi(n b_{n-1},\ \overline{n-1} \cdot b_{n-2}, \ldots, b_0, 0) = 0. \tag{26}$$

Il primo membro di quest'equazione è precisamente la cercata generatrice: in quanto i punti dell'ipersuperficie (26) sono, rispetto alla E, le immagini dei G_{n-1}, per cui posto X in U, il gruppo dei punti Y contiene O.

Ricerchiamo ora il peso p del covariante così individuato.

Se π è il peso ed l il grado del seminvariante (25) di Φ, Φ stesso avrà l'ordine

$$m = n\,l - 2\pi.$$

Ora, la $\varphi(n b_{n-1}, \overline{n-1} \cdot b_{n-2}, \ldots, b_0, 0)$ è pure di grado l ed il suo peso è dato da

$$\sum_{i=0}^{n-1} (n - i - 1)\, \alpha_i = n\,l - \pi - l = (n-1)\, l - \pi.$$

Applicando allora le (23), ricordando che si tratta di una f^{n-1}, si trova

$$\gamma_1 = (n-1)\,l - [(n-1)\,l - \pi - p] = \pi + p$$

$$\gamma_2 = (n-1)\,l - \pi - p.$$

Ma γ_2 altro non è che l'ordine del covariante Φ della f che prima abbiamo calcolato per altra via. Eguagliando le due espressioni otteniamo

$$n\,l - 2\pi = (n-1)\,l - \pi - p$$

ed in definitiva

$$p = \pi - l.$$

Applicando la (13) possiamo pertanto concludere che *se* $\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n)$ *è un seminvariante di grado* l *e peso* π (nei coefficienti delle f_n) *l'espressione*

$$\psi = \frac{\varphi(n\Delta^{n-1}, (n-1)\Delta^{n-2}, \ldots, f, 0)}{(xy)^{\pi - l}},$$

dà un covariante (intero e puro) con due serie di variabili, delle forme d'ordine $n-1$.