Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Renato Caccioppoli

**Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali : un teorema di esistenza e di unicità ed alcune sue applicazioni**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 3 (1932), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__1_0>

# SUGLI ELEMENTI UNITI DELLE TRASFORMAZIONI FUNZIONALI: UN TEOREMA DI ESISTENZA E DI UNICITÀ ED ALCUNE SUE APPLICAZIONI.

di RENATO CACCIOPPOLI

I teoremi di esistenza per una classe estesissima di equazioni funzionali si possono dedurre, come è noto, mediante considerazioni topologiche, riguardando le soluzioni cercate come punti uniti di certe trasformazioni di spazî funzionali [1]. Ricevono così, in particolare, una soluzione completa e semplicissima tutti i problemi di esistenza « in piccolo » per le equazioni differenziali ordinarie. Per contro questi metodi, in ragione della loro stessa generalità, non consentono di affrontare i problemi di unicità; e sfuggono loro d'altra parte parecchie quistioni di esistenza « in grande », relative p. es. all'equazione $\Delta_2 z = F(x, y, z)$. Presenta quindi interesse il compito di ricondurre anche la trattazione di questi argomenti ai principî generali che informano i metodi surricordati. E ciò che innanzi tutto occorre, è un criterio, semplice e generale, insieme di esistenza e di unicità.

Un criterio simile mi propongo ora di studiare, in alcune sue conseguenze importanti. Esso si ricollega all'estensione, data da LÉVY [2] e ripresa qui su un piano affatto generale, di un

(1) BIRKHOFF and KELLOGG, *Invariant points in function space*. Trans. Am. Math. Society, vol. 23 (1922). – SCHAUDER, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*. Math. Zeitschrift, B. 26 (1927). – CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale* Rend. Acc. Lincei (6) vol. 11 (1930). – *Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali ecc.* Ib. vol. 13 (1931).

(2) *Sur les fonctions de lignes implicites*. Bull. Soc. Math. de France, t. 48 (1920).

teorema di Hadamard (1) agli spazî funzionali. Fra le sue applicazioni segnalo quelle ad una classe notevole di equazioni integrali non lineari, recentemente studiata da Hammerstein.

**1.** – Consideriamo uno spazio funzionale $\Sigma$, *metrico*, cioè in cui sia definita la *distanza* fra due elementi (punti) qualunque, e *lineare*, o *vettoriale*, cioè composto di elementi per cui siano definite somma, moltiplicazione per una costante, ecc. Supposto che la distanza di un punto di $\Sigma$ da un' origine fissata possa assumere valori arbitrariamente grandi, diremo che quel punto tende all' infinito quando tale distanza cresce oltre ogni limite.

Sia $S$ una trasformazione dello spazio $\Sigma$ in sè stesso, univoca (ma non necessariamente invertibile univocamente) cioè che faccia corrispondere ad ogni punto $\varphi$ di $\Sigma$ un ben determinato punto $S[\varphi]$; la supporremo, oltre che continua nel senso ordinario (subordinatamente alla data definizione di distanza) anche *completamente continua.* Si intende con ciò che $S$ converte ogni insieme limitato di $\Sigma$ in un insieme *compatto,* cioè tale che da ogni sua porzione si possa estrarre una successione convergente.

Ci proponiamo di trovare una condizione sufficiente per l' esistenza e l' unicità di un *punto unito* della trasformazione $S$, cioè di una soluzione dell' equazione funzionale

$$\varphi = S[\varphi]. \tag{1}$$

Consideriamo all' uopo la seguente trasformazione $T$ fra due spazî sovrapposti $\Sigma$ e $\Sigma'$:

$$\psi = T[\varphi] = \varphi - S[\varphi]. \tag{2}$$

Se questa trasformazione è univocamente invertibile, se cioè associa ad ogni punto $\psi$ di $\Sigma'$ un unico punto $\varphi$ di $\Sigma$, la (1) ammetterà un' unica soluzione, che sarà il punto corrispondente nella $T^{-1}$ allo *zero* di $\Sigma'$.

Per assicurare l' invertibilità di $T$ faremo le due ipotesi seguenti:

(1) *Sur les transformations ponctuelles.* Bull. Soc. Math. de France, t. 34 (1906).

1) $T$ è *localmente* invertibile, cioè se la (2) fa corrispondere $\psi_0$ a $\varphi_0$, esiste un intorno di $\psi_0$ ogni punto del quale è il corrispondente di un ben determinato punto variabile con continuità in un intorno di $\varphi_0$;

2) al tendere di $\varphi$ all' infinito, anche $\psi$ tende all' infinito.

Si dimostra subito che in queste ipotesi ogni punto di $\Sigma'$ deve corrispondere ad almeno un punto di $\Sigma$: infatti l' insieme dei punti di $\Sigma'$ corrispondenti a qualche punto di $\Sigma$ è *aperto* [1] in virtù della condizione 1), e pertanto, se non esaurisce $\Sigma'$, dovrà avere almeno un punto frontiera $\psi_0$ che non gli appartenga. Sia $\psi_1$, $\psi_2, \ldots$ una successione tendente a $\psi_0$ e corrispondente alla successione $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ di $\Sigma$; quest' ultima, per la condizione 2), è necessariamente limitata. Ma allora la successione delle differenze $\varphi_n - \psi_n = S[\varphi_n]$ è compatta, e lo è conseguentemente anche l' altra $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, dalla quale se ne potrà quindi estrarre una tendente ad un limite $\varphi_0$; essendo $\psi_0 = T[\varphi_0]$, contro il supposto $\psi_0$ corrisponderà ad un punto di $\Sigma$.

Per dimostrare la biunivocità della corrispondenza fra $\Sigma$ e $\Sigma'$ basta ripetere il ragionamento di Hadamard relativo ad uno spazio ordinario. Se la corrispondenza in questione non fosse biunivoca, si potrebbe tracciare in $\Sigma$ una curva aperta $C$ cui corrispondesse in $\Sigma'$ una curva chiusa $C'$. Sia allora $C'_t$ la trasformata di $C'$ in un' omotetia di centro, p. es., nell' origine di $\Sigma'$, e rapporto $t < 1$; a $C'_t$ si può associare una curva $C_t$ di cui sia corrispondente, che varî con continuità al variare di $t$, e che si riduca a $C$ per $t = 1$. Si può far tendere $t$ fino a zero, perchè i diametri degli intorni dei punti del cono coperto dalle curve $C'_t$, in cui è possibile l' inversione locale, ammettono un limite inferiore non nullo. Ma quando $t$ fosse sufficientemente piccolo, $C_t$ dovrebbe risultare chiusa, il che è impossibile, dovendo la distanza fra gli estremi di $C_t$ mantenersi superiore ad un limite positivo.

Esprimendo concisamente la condizione 2) col dire che $T$ trasforma l' infinito di $\Sigma$ nell' infinito di $\Sigma'$, possiamo enunciare il nostro teorema fondamentale come segue:

[1] Cioè composto esclusivamente di punti interni.

*Se la trasformazione è completamente continua, e la* (2) *è localmente invertibile e trasforma l'infinito nell'infinito, l'equazione funzionale* (1) *ammette un' unica soluzione.*

**2.** - La portata di questo teorema viene accresciuta dall'osservazione seguente, che riesce utile nelle applicazioni:

La definizione che abbiamo data dell' infinito di $\Sigma$ non è indispensabile ai fini della dimostrazione. Si può introdurre quest' infinito (e definire conseguentemente gli insiemi limitati di $\Sigma$ che la $S$ deve trasformare in insiemi compatti) anche senza fondarsi sulla nozione di distanza adottata per caratterizzare l'infinito di $\Sigma'$ e gli intorni di inversione locale (nonchè gli insiemi compatti di $\Sigma'$); ma ricorrendo più generalmente ad una definizione indipendente di *scarto* di un punto generico in $\Sigma$ da un' origine fissata.

Un esempio varrà a chiarire questa osservazione. $\Sigma$ sia lo spazio delle funzioni $f(x)$ continue in un intervallo $(a, b)$: per la distanza fra due simili funzioni si può adottare la definizione

$$\max | f_1(x) - f_2(x) |,$$

subordinatamente alla quale si definiranno la continuità, l'invertibilità locale di $T$, e l'infinito di $\Sigma'$. Si potrà poi introdurre lo scarto predetto mediante l'espressione

$$\int_a^b f^2(x)\, dx :$$

allora $S$ sarà completamente continua nel senso che conservandosi $\int_a^b f^2 dx$ inferiore ad un limite finito, da ogni successione di funzioni $S[f]$ se ne può estrarre una convergente uniformemente; inoltre divergendo $\int_a^b f^2 dx$ divergerà $\max | S[f] |$.

In pratica l'invertibilità locale di $T$ è assicurata da una condizione che generalizza quella elementare dello jacobiano non nullo [1]. Supponiamo che $T$ sia *differenziabile* in modo continuo, che cioè si abbia

$$\delta\psi = T[\varphi + \delta\varphi] - T[\varphi] = D[\varphi, \delta\varphi] + \omega[\varphi, \delta\varphi],$$

dove $D$ è un'operazione *continua e lineare* in $\delta\varphi$ (la continuità essendo uniforme al variare di $\delta\varphi$ in un campo limitato) e $\omega$ è infinitesima di ordine superiore, cioè ha dallo zero una distanza infinitesima di ordine superiore rispetto a quella di $\delta\varphi$. Allora perchè $T$ sia localmente invertibile basta che sia invertibile (totalmente) la corrispondenza lineare tra $\delta\varphi$ e $\delta\psi$

$$\delta\psi = D[\varphi, \delta\varphi].$$

Questa relazione può anche scriversi, indicando con $U[\varphi, \delta\varphi]$ il differenziale di $S[\varphi]$,

$$\delta\psi = \delta\varphi - U[\varphi, \delta\varphi].$$

Osserviamo ancora che non è escluso che la prima delle suddette definizioni di distanza sia tale da rendere lo spazio $\Sigma$ privo d'infinito: allora la $S$ trasforma tutto questo spazio in un insieme compatto, e la condizione riguardante gli infiniti risulta automaticamente verificata.

**3.** - Le modalità dell'applicazione del nostro teorema saranno messe bene in evidenza dall'esempio seguente. Consideriamo l'equazione integrale non lineare [2]

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, y) f(y, \varphi(y)) dy = g(x), \tag{3}$$

dove il *nucleo* $K(x, y)$ è continuo, simmetrico e definito positivo, e le funzioni $f(y, u)$ e $g(x)$ sono continue, la prima avendo

(1) V. Hildebrandt and Graves, *Implicit functions and their differentials in general analysis*. Trans. Am. Math. Society, vol. 29 (1927).

(2) Cfr. Hammerstein, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*. Acta Math., t. 54 (1930).

inoltre la derivata parziale $f_u$ continua e non negativa, ed essendo quindi non decrescente in $u$.

La trasformata $S[\varphi]$ è in questo caso

$$g(x) - \int_a^b K(x, y) f(y, \varphi(y)) dy,$$

e la (2) diventa

$$\psi(x) = T[\varphi(x)] = \varphi(x) + \int_a^b K(x, y) f(y, \varphi(y)) dy - g(x). \tag{4}$$

Differenziando si ottiene

$$\delta\psi(x) = \delta\varphi(x) + \int_a^b K(x, y) f_u(y, \varphi(y)) \delta\varphi(y) dy,$$

e quest'equazione integrale lineare in $\delta\varphi$ è risolubile, il suo nucleo essendo il prodotto di un nucleo simmetrico definito positivo per una funzione non negativa della sola $y$. Pertanto la trasformazione $T$ è localmente invertibile.

Qui la definizione di distanza implicitamente adottata, nello spazio $\Sigma$ delle funzioni continue in $(a, b)$, è quella ordinaria $(\max|\varphi_1 - \varphi_2|)$. Definiamo invece ora, ricordando l'osservazione precedente, uno *scarto* di $\varphi(x)$ dall'origine $\varphi = 0$ mediante l'espressione

$$\int_a^b |f(x, \varphi(x))| dx,$$

supponendo per semplicità $f(x, 0) = 0$, il che si può sempre ottenere modificando convenientemente la funzione $g$. Evidentemente $S[\varphi]$ risulta completamente continua, nel senso che da ogni insieme di funzioni $\psi = S[\varphi]$ corrispondente ad un insieme limitato si può estrarre una successione uniformemente convergente. Dippiù, o con tale definizione $\varphi$ risulta sempre limitata, oppure al tendere di $\varphi$ all'infinito diverge $\max|T[\varphi]|$: infatti moltiplicando la (4) per $f(x, \varphi(x))dx$ ed integrando si ottiene, posto per brevità $f(x, \varphi(x)) = F(x)$, la relazione

$$\int_a^b [\psi(x) + g(x)] F(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x) F(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(x, y) F(x) F(y)\, dx dy ,$$

di cui il secondo membro è essenzialmente positivo.

Esaminiamo il primo membro: per ipotesi $\varphi$ ed $F$ hanno sempre il medesimo segno; inoltre, dato ad arbitrio un numero $M > 0$, si può determinare un numero $N$ tale che $|F| > M$ implichi $|\varphi| > N$, e che $N$ tenda all'infinito con $M$. Ora, poichè $\int |F|\, dx \rightarrow \infty$, il contributo all'integrale fornito dall'insieme dei punti ove $|F| > M$ cresce indefinitamente, fissato $M$, rispetto a quello dei punti rimanenti, sicchè, comunque si assegni il numero positivo $\eta < 1$, si avrà definitivamente

$$\int_a^b \varphi F\, dx > \eta N \int_a^b |F|\, dx .$$

Si vede allora che, potendo $\eta N$ diventare grande a piacere, è necessario, affinchè il primo membro della relazione dianzi scritta si conservi positivo, che diverga $\max |\psi|$.

Possiamo pertanto concludere che l'equazione (3) ha un'unica soluzione.

4. - Il risultato del n. prec. sussiste beninteso quale che sia il numero delle variabili indipendenti. Si possono poi rimuovere certe ipotesi restrittive, come quella della continuità del nucleo: p. es. è evidente che basta supporre $K(x, y)$ limitato, e discontinuo subordinatamente all'applicabilità della teoria generale delle equazioni integrali. Si potrebbe anche trattare il caso che $K$ fosse una funzione di Green, relativa ad un campo a più

dimensioni: si ritroverebbero per questa via i risultati noti, cui accennavamo in principio, sull' equazione $\Delta_2 z = F(x, y, z)$ con $F$ crescente in $z$ (in particolare quelli classici sull'equazione $\Delta_2 z = k e^z$).

Ci limiteremo qui a considerare un problema unidimensionale: quello dei valori ai limiti per l'equazione $y'' = f(x, y, y')$, che si riconduce all' equazione integrale non lineare

$$y(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[\xi, y(\xi), y'(\xi)] d\xi = g(x),$$

$K(x, \xi)$ essendo la funzione di GREEN per l'espressione $y''$, e $g(x)$ la funzione lineare che assume in $a$ e in $b$ i valori prescritti ad $y$.

Quest' equazione, un po' più generale della precedente, si tratta quasi allo stesso modo. Come spazio $\Sigma$ possiamo assumere lo spazio delle funzioni continue in $(a, b)$ con le prime due derivate (¹). La trasformazione $T$ diventa

$$z(x) = y(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[\xi, y(\xi), y'(\xi)] d\xi - g(x).$$

Indichiamo con $f_u$ e $f_v$ le derivate della funzione $f(x, u, v)$ rispetto ad $u$ e $v$, e supponiamole continue e la prima inoltre non negativa. Differenziando la relazione funzionale precedente si ottiene

$$\delta z(x) = \delta y(x) +$$

$$+ \int_a^b K(x, \xi) \{ f_u[\xi, y(\xi), y'(\xi)] \delta y(\xi) + f_v[\xi, y(\xi), y'(\xi)] \delta y'(\xi) \} d\xi.$$

La risoluzione rispetto a $\delta y$ è sempre possibile, ed in un

(¹) Gli intorni in tale spazio sono naturalmente *di ordine* 2.

sol modo, essendo $\delta y$ l'integrale, individuato dalle condizioni ai limiti $\delta y(a) = \delta z(a)$, $\delta y(b) = \delta z(b)$, dell'equazione lineare

$$\eta''(x) - f_v[x, y(x), y'(x)]\eta'(x) - f_u[x, y(x), y'(x)]\eta(x) = \delta z''(x)$$

in cui il coefficiente di $\eta$ è per ipotesi non positivo. Quindi la trasformazione $T$ è localmente invertibile.

Per quanto si riferisce alla condizione sugli infiniti, possiamo ricondurci all'analisi precedente, fatta l'ipotesi che $f(x, u, v)$ sia *ad incremento uniformemente limitato* in $v$, che cioè si abbia

$$|f(x, u, v_1) - f(x, u, v_2)| < L,$$

dove il limite $L$ è indipendente da $x$ e da $u$. Si può scrivere infatti

$$z(x) = y(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[\xi, y(\xi), 0] d\xi +$$

$$+ \int_a^b K(x, \xi) h[\xi, y(\xi), y'(\xi)] d\xi - y(x),$$

dove $h(x, u, v) = f(x, u, v) - f(x, u, 0)$.

Essendo allora $h$ limitata per ipotesi, la funzione

$$\int_a^b K(x, \xi) h[\xi, y(\xi), y'(\xi)] d\xi$$

descrive, al variare di $y$, un insieme compatto: e si può fare un ragionamento analogo al precedente, definendo lo *scarto* di $y$ dallo zero mediante l'espressione

$$\int_a^b |f[x, y(x), 0]| dx.$$

Dunque *il problema dei valori ai limiti per l'equazione*

$$y'' = f(x, y, y')$$

*ammette sempre un' unica soluzione quando $f(x, u, v)$ è non decrescente in $u$ e ad incremento uniformemente limitato in $v$* (1) (2).

È questo il caso, p. es., di una funzione $f(x, y, y')$ della forma $\varphi(x, y) + \phi(x, y')$, con $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \geq 0$ e $\phi(x, y')$ limitata.

**5.** – Torniamo ora all'equazione generale (3) per dimostrare, sempre come applicazione del nostro criterio fondamentale, un altro teorema di esistenza e di unicità (3).

Detto $\lambda$ il minimo autovalore del nucleo $K(x, y)$, supponiamo che sia sempre

$$|f_u(x, u)| \leq \alpha < \lambda.$$

Dimostreremo che in quest'ipotesi la (3) ammette un'unica soluzione. Infatti l'equazione integrale lineare ottenuta differenziando la (4) è in questo caso

$$\delta\phi(x) = \delta\varphi(x) + \int_a^b K(x, y)\,\omega(y)\,\delta\varphi(y)\,dy,$$

con $|\omega(y)| = |f_u(y, \varphi(y))| \leq \alpha < \lambda$, ed è risolubile rispetto a $\delta\varphi$.

Per verificare le condizioni sugli infiniti, definiremo lo scarto di $\varphi$ dallo zero mediante l'espressione $\int_a^b \varphi^2(x)\,dx$. Indichiamo questa con $M$, e con $\varphi_1(x)$ la funzione normalizzata $\dfrac{1}{\sqrt{M}}\varphi(x)$.

Supponiamo come precedentemente, per semplificare, $f(x, 0) = 0$;

(1) Condizioni diverse, ottenute con altri metodi, si troveranno nella Memoria di Scorza-Dragoni, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine.* Giornale di Battaglini, vol. 69 (1931).

(2) Un risultato analogo potrebbe naturalmente stabilirsi per l'equazione

$$\Delta_2 z = f(x, y, z, p, q).$$

(3) Cfr. Hammerstein, loc. cit.

si potrà scrivere allora, indicando con $\omega(y)$ una funzione in valore assoluto non superiore ad 1,

$$f(y, \varphi(y)) = \alpha\omega(y)\varphi(y).$$

Moltiplichiamo la (4) per $\frac{1}{M}\varphi(x)dx$, ed integriamo rispetto ad $x$:

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\int_a^b \psi(x)\varphi_1(x)\,dx = 1 + \alpha\int_a^b\int_a^b K(x,y)\,\varphi_1(x)\,\omega(y)\,\varphi_1(y)\,dx\,dy.$$

Dalla nota proprietà di minimo degli autovalori si deduce che l'integrale doppio a secondo membro di questa eguaglianza non supera in valore assoluto $\frac{1}{\lambda}$ ([1]), sicchè

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\int_a^b \psi(x)\varphi_1(x)\,dx \geq 1 - \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Segue di qui, poichè il primo membro della diseguaglianza non supera $\frac{1}{\sqrt{M}}\left[\int_a^b \psi^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$, che $\psi$ non può restar limitata

([1]) Infatti, posto $\varphi_2 = \omega\varphi_1$, si ha

$$2\left|\int_a^b\int_a^b K(x,y)\varphi_1(x)\,\omega(y)\,\varphi_1(y)\,dx\,dy\right| \leq \int_a^b\int_a^b K(x,y)\,\varphi_1(x)\,\varphi_1(y)\,dx\,dy +$$

$$+\int_a^b\int_a^b K(x,y)\,\varphi_2(x)\,\varphi_2(y)\,dx\,dy,$$

con $\int_a^b \varphi_2^2(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi_1^2(x)\,dx = 1$, e quindi

$$2\left|\int_a^b\int_a^b K(x,y)\,\varphi_1(x)\,\omega(y)\,\varphi_1(y)\,dx\,dy\right| \leq \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}.$$

quando $M$ tenda all'infinito. Ed il nostro assunto è così dimostrato.

**6.** Ritornando al nostro teorema generale, vogliamo ancora fare un'osservazione importante sull'ufficio delle varie ipotesi che assicurano la completa invertibilità della trasformazione $T$. Queste ipotesi sono tre, quella dell'invertibilità locale di $T$, quella della completa continuità di $S$, e la condizione sugli infiniti. Però le due ultime occorrono nella dimostrazione solo in quanto permettono di asserire che l'insieme dei punti di $\Sigma'$ corrispondenti a qualche punto di $\Sigma$ contiene l'eventuale punto frontiera $\phi_0$; e possono essere sostituite dall'unica ipotesi che *è compatta ogni successione di punti di $\Sigma$ cui corrisponda in $\Sigma'$ una successione convergente.* In pratica è spesso da quelle, convenientemente ampliate come abbiamo fatto vedere, che si deduce questa, e perciò abbiamo preferito formularle esplicitamente nell'enunciato; ma il teorema può porsi sotto la forma generale seguente:

*Se la trasformazione* (2) *è localmente invertibile, e dippiù non trasforma in successioni convergenti che successioni compatte, essa è completamente invertibile, e l'equazione* (1) *ammette per conseguenza un'unica soluzione.*

Cercando da questo punto di vista una condizione per l'invertibilità totale della trasformazione $T$, considerata in sè stessa ed indipendentemente dalla sua relazione con la $S$, ci si imbatte subito nella seguente, che *il rapporto tra la lunghezza di una curva qualunque e quella della sua trasformata mediante $T$ non superi mai un limite fisso* (la definizione di lunghezza di curva desumendosi ovviamente da quella adottata per la distanza fra due punti). Più generalmente, basterà supporre che *al tendere all'infinito della lunghezza di una curva variabile avente un estremo fisso, tende anche all'infinito quella della curva trarformata* (¹).

Praticamente, supposta $T$ differenziabile in modo continuo, potremo in corrispondenza di ogni punto $\varphi$ di $\Sigma$ definire un

(¹) Si noti che qui $\Sigma$ è supposto *completo,* cioè tale da ammettere il criterio di convergenza di Cauchy.

limite superiore $k$ per il rapporto fra la lunghezza di un *elemento lineare* spiccato da $\varphi$ e quella dell'elemento corrispondente. Allora una condizione sufficiente per la completa invertibilità di $T$ sarà che $k$ si conservi limitato; ed una più generale sarà quella della divergenza dell'integrale

$$\int_0^\infty \frac{dr}{\mu(r)},$$

dove $\mu(r)$ dinota l'estremo superiore dei valori di $k$ relativi ai punti $\varphi$ aventi distanza $\leq r$ da un'origine fissa [1].

Come applicazione, si consideri la trasformazione (4), nelle ipotesi del n. 5: adoperando il calcolo ivi esposto si prova immediatamente che, assunta come definizione di distanza quella dello spazio hilbertiano, $k^2$ non supera $\dfrac{\lambda}{\lambda - \alpha}$.

**7.** – Supponiamo che, $S$ risultando differenziabile, al suo differenziale si possa dare la forma (assunta per fissare le idee $\varphi$ funzione di una variabile nell'intervallo $(a, b)$)

$$U[\varphi, \delta\varphi] = \int_a^b N_\varphi(x, y)\, \delta\varphi(y)\, dy,$$

la funzione $N_\varphi$ essendo continua, o discontinua subordinatamente alle esigenze della ordinaria teoria delle equazioni integrali. Tale è p. es. il caso dell'equazione (3).

Appare allora nella nostra analisi come condizione essenziale, accanto ad altre supplementari di carattere qualitativo, perchè la trasformazione $S$ ammetta un unico elemento unito, che l'unità non sia autovalore per il nucleo $N_\varphi$. Tale condizione sarà poi anche sufficiente quando la $S$ converta tutto lo spazio in un insieme compatto, circostanza questa che basta da sola ad assicurare l'esistenza di un elemento unito. Possiamo quindi enunciare il teorema seguente:

(1) Cfr. Lévy, loc. cit.

*L'equazione funzionale* $\varphi = S[\varphi]$ *ammette certamente una soluzione se la trasformazione* $S$ *converte tutto lo spazio in un insieme compatto; questa soluzione è poi unica quando,* $S$ *risultando differenziabile secondo la formola*

$$\delta S[\varphi] = \int N_\varphi(x, y)\, \delta\varphi(y) dy,$$

*l'unità non è mai un autovalore del nucleo* $N_\varphi$.

P. es., è questo il caso dell'equazione (3), ove si supponga $K(x, y)$ di quadrato sommabile, $f(x, u)$ limitata e $f_u$ non negativa; $\Sigma$ essendo allora lo spazio hilbertiano.

**8.** - Abbiamo supposto sin qui l'equazione funzionale data nella forma $T[\varphi] = 0$ (in particolare $T \equiv \varphi - S[\varphi]$), e, sostituitala con l'altra più generale $T[\varphi] = \psi$, ne abbiamo ricondotta la risoluzione all'inversione di una corrispondenza tra punti di un medesimo spazio funzionale. Come provano anche gli esempî addotti, il campo di applicazione del metodo è sopratutto quello dei problemi traducibili in equazioni di tipo integrale. Ma v'ha un buon numero di altri problemi che si presentano spontaneamente come inversioni di corrispondenze funzionali, tra spazî però in generale *diversi;* che danno cioè luogo ad un'equazione del tipo $T[\varphi] = \psi$, essendo $\varphi$ e $\psi$ punti, il primo incognito, di due spazî funzionali (non più sovrapposti) $\Sigma$ e $\Sigma'$. A tali corrispondenze si estendono naturalmente senz'altro i risultati del n. 6, ed in particolare il teorema generale ivi enunciato, supposti $\Sigma$ e $\Sigma'$ spazî lineari, ed introdotta per ognuno di essi una definizione di distanza. In pratica anche qui, supposta $T$ differenziabile:

$$\delta\psi = \delta T[\varphi] = D[\varphi, \delta\varphi],$$

la condizione essenziale per l'invertibità locale (oltre quelle di continuità) sarà data dall'invertibilità della corrispondenza lineare tra $\delta\varphi$ e $\delta\psi$. Sicchè anche per la trattazione di questi nuovi problemi dal nostro punto di vista si scorge un metodo generale.

Come esempio consideriamo il problema dei valori ai limiti per l'equazione

$$F(x, y\ y'\ y'') = f(x),$$

dove

$$\frac{\partial F}{\partial y''} > 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} \leq 0.$$

Data comunque $y(x)$ nell'intervallo $(a, b)$ restano individuati $f(x)$ ed i valori ai limiti $\alpha = y(a)$, $\beta = y(b)$. Il problema è allora quello dell'inversione della corrispondenza così istituita tra le funzioni $y(x)$ (spazio $\Sigma$) e le funzioni $f(x)$ associate alle coppie di valori $(\alpha, \beta)$ (spazio $\Sigma'$). Nel primo spazio gli intorni sono di ordine 2, nel secondo la distanza fra due punti è data p. es. dalla espressione

$$\max |f_1(x) - f_2(x)| + |\alpha_1 - \alpha_2| + |\beta_1 - \beta_2|.$$

L'invertibilità locale è assicurata dalla risolubilità dell'*equazione a variazioni*

$$\frac{\partial F}{\partial y''}\,\delta y'' + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y = \delta f(x)$$

con dati ai limiti arbitrarî. Supponiamo ora risulti che per $|f(x)|$, $|\alpha|$, $|\beta|$ limitati debbano conservarsi limitate le funzioni $y$, $y'$, $y''$: allora se $f$, $\alpha$, $\beta$ percorrono una successione convergente, che corrisponda ad una certa successione delle $y$, quest'ultima dovrà essere compatta (rispetto alla definizione di distanza adottata per $\Sigma$); infatti se ne potrà estrarre una successione convergente uniformemente con quella delle $y'$, ed allora convergerà del pari l'altra delle $y''$, come segue immediatamente dalla condizione $\frac{\partial F}{\partial y''} > 0$. Saranno pertanto verificate le ipotesi del teorema generale del n. 6: ed il problema proposto sarà univocamente risolubile per valori arbitrarî di $\alpha$ e $\beta$, e per qualunque secondo membro $f$.

È evidente l'analogia di questo risultato con un noto teorema di Bernstein sulle equazioni a derivate parziali non lineari del tipo ellittico.

# SULLE DERIVAZIONI COVARIANTI

Conferenze di GIUSEPPE VITALI, raccolte dalla Sig.[na] ANGELINA FOSCHI

**Sunto.** — *L'A. dà una definizione di derivazione covariante che comprende la derivazione del* RICCI *e le sue estensioni del calcolo assoluto generalizzato e quella che si può costruire coll'ausilio di* $n$ *covarianti semplici indipendenti, recentemente usati dall'* EINSTEIN *nella costruzione della sua « Einheitliche Feldtheorie ».*

Nel Calcolo Differenziale Assoluto si considerano due tipi di derivazione covariante. Le derivazioni di un tipo (che dirò del primo tipo) si costruiscono col concorso di elementi forniti dagli intorni dei vari ordini di una varietà (1); quelle del secondo tipo si costruiscono coll'ausilio di un $n$–upla ortogonale tangente alla varietà (2).

(1) Questo tipo di derivazione è quello che si affacciò per la prima volta in un lavoro di CHRISTOFFEL – *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, Crelle's Journal, Band LXX, 1869 che poi costituì la principale operazione del Calcolo Differenziale Assoluto del RICCI, e le cui estensioni sono descritte nei miei due recenti lavori : A) *Geometria nello spazio hilbertiano* [Bologna N. Zanichelli 1929]; B) *Nuovi contributi alla nozione di derivazione covariante* con appendici di G. ALIPRANDI – R. BALDONI – M. LICENI – I. SACILOTTO [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova. Anno I. N. 1, 2].

(2) Questo secondo tipo di derivazione covariante fu quasi contemporaneamente descritto da me e da WEITZENBÖCK ed ultimamente da A. EINSTEIN.

R. WEITZENBÖCK – *Invariantentheorie* [P. Noordhoff. 1923].

C) G VITALI – *Una derivazione covariante formata coll'ausilio di n sistemi covarianti del 1º ordine* [Atti della Società Ligustica di Sc. e Lett. 1924].

A. EINSTEIN – *Riemann–Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus* [Berliner Ak. der Wissenschaften 1928].

Malgrado la differenza della loro struttura e quella della loro proprietà, questi due tipi di derivazione si possono considerare come casi particolari di una medesima operazione.

Questo io ho mostrato in alcune mie Conferenze di Analisi Superiore nella R. Università di Bologna, conferenze che qui pubblico nella forma in cui furono raccolte e redatte dalla sig. Angelina Foschi.

## § I.

1. Siano

(1) $$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

$n$ variabili continue. Sia $\nu$ un intero maggiore di zero, e si consideri un sistema di $0_\nu$ parametri [3].

(2) $$\varphi_\alpha(t; u_1, u_2, \ldots, u_n) = \varphi_\alpha(t) = \varphi_\alpha,$$

corrispondenti agli stati di un indice $\alpha$ variante nella classe $\nu$ [4], funzioni a quadrato sommabile della solita variabile $t$ in un aggregato misurabile $g$ e anche delle variabili (1).

Supponiamo che le (2) siano fra loro linearmente indipendenti.

Supponiamo inoltre che per una sostituzione invertibile sulle (1) il sistema delle (2) varii come un covariante semplice di indice $\alpha$.

Poniamo

(3) $$a_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha(t) \times \varphi_\beta(t) \quad [5].$$

Sia $\mu$ un intero $\leq \nu$, ed indichiamo con $\underset{\mu}{a}$ il determinante che ha per elementi gli $a_{\alpha,\beta}$ con $\alpha$ e $\beta$ varianti nella classe $\mu$,

(3) . A) pag. 87 e 172.

(4) . A) pag. 155.

(5) Qui, conformemente a quanto è convenuto in B), § 1, N. 1,

$$\varphi_\alpha(t) \times \varphi_\beta(t) = \int_g \varphi_\alpha(t) \cdot \varphi_\beta(t)\, dt .$$

l' indice $\alpha$ essendo costante in ogni riga e l' indice $\beta$ essendo costante in ogni colonna, e gli indici delle righe e quelli delle colonne succedentisi nello stesso ordine.

Per la lineare indipendenza delle $\varphi_\alpha$ i determinanti $\underset{\mu}{a}$ sono diversi da zero.

Indicheremo con $\underset{\mu}{a}^{\alpha,\beta}$ il reciproco di $a_{\alpha,\beta}$ nel determinante $\underset{\mu}{a}$. Per le proprietà dei determinanti reciproci si ha subito

$$\Sigma_\gamma \underset{\mu}{a}^{\beta,\gamma} . a^{\alpha,\gamma} = \delta^\beta_\alpha \quad (6) , \tag{4}$$

la sommatoria essendo estesa al variare di $\gamma$ nella classe $\mu$.

**2.** Consideriamo ora un sistema

$$H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}$$

in cui ogni indice od apice è di classe $\leq \nu$.

Diremo che si è eseguita su $H$ la *reciprocità secondo il sistema* (2) *rispetto all'indice* $\alpha_h$ di classe $\mu_h$, quando si passa da questo sistema al seguente

$$\sum_{\gamma} \underset{\mu_h}{a}^{\alpha_h,\gamma} . H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{h-1},\gamma,\alpha_{h+1},\ldots,\alpha_r} = K^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s,\alpha_h}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{h-1}\,\alpha_{h+1},\ldots,\alpha_r}$$

la sommatoria essendo estesa al variare di $\gamma$ nella classe $\mu_h$ che ha per indici tutti gli indici di $H$ eccettuato $\alpha_h$ e per apici tutti gli apici di $H$ ed in più $\alpha_h$.

Diremo invece che si è eseguita su $H$ *la reciprocità secondo il sistema* (2) *rispetto all'apice* $\beta_k$ se dal sistema $H$ si passa al seguente

(6) Ricordo che

$$\delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{se} \quad \alpha \neq \beta \end{cases} .$$

$$\sum_\gamma a_{\beta_k, \gamma} \cdot H^{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \gamma, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = P^{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_k}$$

che ha per indici tutti gli indici di $H$ ed in più $\beta_k$, per apici tutti gli apici di $H$ eccettuato $\beta_k$.

Se su $H$ si eseguiscono successivamente più reciprocità secondo il sistema (2) il risultato che si ottiene è indipendente dall'ordine secondo cui si eseguiscono dette singole reciprocità.

Tale risultato si dice *un reciproco di* $H$ Quando poi si eseguiscono le reciprocità su tutti gli indici e tutti gli apici di $H$ si ha *il reciproco di* $H$ (7).

**3.** Indichiamo con $\underset{\mu}{\varphi}^{\alpha}(t)$ il reciproco secondo il sistema (2) del sistema $\varphi_\alpha(t)$ nel quale s' intende $\alpha$ variante nella classe $\mu$, ossia poniamo

$$\underset{\mu}{\varphi}^{\alpha}(t) = \Sigma_\gamma \underset{\mu}{a}^{\alpha, \gamma} \cdot \varphi_\gamma(t), \tag{5}$$

la sommatoria essendo estesa al variare di $\gamma$ nella classe $\mu$.

Si ottiene subito

$$\varphi_\alpha(t) = \Sigma_\gamma a_{\alpha, \gamma} \cdot \underset{\mu}{\varphi}^{\gamma}(t). \tag{5'}$$

Si ha facilmente il risultato

$$\varphi_\alpha \times \underset{\mu}{\varphi}^{\beta} = \delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1 \text{ per } \alpha = \beta \\ 0 \text{ per } \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{6}$$

infatti, applicando successivamente le formule (5) e (3), si ha

$$\varphi_\alpha \times \underset{\mu}{\varphi}^{\beta} = \varphi_\alpha \times (\Sigma_\gamma \underset{\mu}{a}^{\beta, \gamma} \cdot \varphi_\gamma) =$$

$$= \Sigma_\gamma \underset{\mu}{a}^{\beta, \gamma} (\varphi_\alpha \times \varphi_\gamma) = \Sigma_\gamma \underset{\mu}{a}^{\beta, \gamma} \cdot a_{\alpha, \gamma} = \delta^\beta_\alpha \text{ [v. (4)]}.$$

(7) Questa definizione è conforme all'analoga che figura in B), § 1, N. 2.

**4.** Partendo di nuovo da $H^{\beta_1, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}$ fabbrichiamo il prodotto

$$\prod_1^r{}_h \varphi_{\alpha_h}(\tau_h) \cdot \prod_1^s{}_k \underset{\mu_k}{\varphi^{\beta_k}}(\theta_k) = U^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

(dove $\mu_k$ è la classe di $\beta_k$, e $\tau_h$ e $\theta_k$ sono $r+s$ variabili indipendenti e ciascuna variabile in $g$).

Questo prodotto è un sistema assoluto che ha gli stessi indici ed apici di $H$ e lo chiameremo *sistema $U$ associato ad $H$*.

Indicheremo poi con

$$V^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}$$

il reciproco di $U^{\beta_1, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}$ e lo chiameremo il *sistema $V$ associato ad $H$*.

Si ha subito in virtù di (5) e (2')

$$V = \prod_1^r{}_h \underset{\nu_h}{\varphi^{\alpha_h}}(\tau_h) \cdot \prod_1^s{}_k \varphi_{\beta_k}(\theta_k)$$

dove $\nu_h$ è la classe dell'indice $\alpha_h$.

**5.** Consideriamo ora un sistema $H$ ed il corrispondente $V$; essi sono tali che gli indici dell'uno sono uguali agli apici dell'altro e viceversa; allora possiamo applicare il principio di saturazione moltiplicando e sommando rispetto a tutti gli $\alpha$ ed a tutti i $\beta$; noi porremo

$$[H, \varphi] = \sum_{\alpha, \beta} H \cdot V. \tag{7}$$

La $[H, \varphi]$ è un invariante rispetto alle variabili (1) che dipende dalle $r+s$ variabili $\tau_h$ e $\theta_k$.

La $[H, \varphi]_\gamma$, dove $\gamma$ è un indice variante nel campo $\Omega$ [8],

[8] A). pag. 154.

ha significato: rappresenta la derivata rispetto ad $u_\gamma$ dell'invariante $[H, \varphi]$ (9) ed è un covariante.

Chiameremo *derivata covariante* o *sistema derivato covariante* del sistema $H$ secondo il dato sistema delle $\varphi$, il sistema

$$(8) \qquad H^{\beta_1, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \gamma} = [H, \varphi]_\gamma \times U^{\beta_1, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$$

Questo è un sistema assoluto.

Infatti i fattori del prodotto da integrare nel 2° membro di (8) sono il 1° un covariante di indice $\gamma$, il secondo un sistema assoluto cogli stessi indici ed apici di $H$.

## § 2.

**1**. Consideriamo una varietà $V_n$ col $\sigma_v$ (10) avente il massimo numero di dimensioni, ed indichiamo con $f(t; u)$ una sua determinante (11).

Se per $\varphi_\alpha$ prendiamo il sistema $f_\alpha$ (12) la (8) è la derivata introdotta in B). Se $\rho_\gamma = 1$ (13) questa derivata diventa quella considerata in A).

E quando gli apici e gli indici del sistema assoluto $H$ sono di 1ª classe è la derivata di Ricci.

## § 3.

**1**. I parametri $\varphi_\alpha$ individuano uno spazio lineare ad $0_v$ dimensioni passante per l'origine e variante in generale col variare delle (1).

(9) A). pag. 155, § 2.
(10) A). pag. 211.
(11) A). pag. 85.
(12) A). pag. 181 secondo capoverso.
(13) Cioè se $\gamma$ ha una sola cifra. A) pag. 155.

Supponiamo che questo spazio sia indipendente dalle (1), allora possiamo fissare in esso un sistema di $0_\nu$ parametri $\underset{\beta}{\psi}$ normali e a due a due ortogonali; queste $\psi$ sono funzioni a quadrato sommabile in $g$ indipendenti dalle $u$; si ha subito che ogni $\varphi_\alpha$ o $\underset{\nu}{\varphi_\alpha}$ sarà una combinazione lineare delle $\underset{\beta}{\psi}$, cioè sarà

$$(9) \qquad \varphi_\alpha = \Sigma_\gamma \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{\psi},$$

$$(9') \qquad \underset{\nu}{\varphi^\beta} = \Sigma_\gamma \underset{\gamma}{X^\beta} \cdot \underset{\gamma}{\psi}.$$

Le $X$ saranno convenienti funzioni delle (1) e si ricavano dalle (9) e (9′) moltiplicandole per una $\psi$ ed integrando.

Infatti si trova

$$(10) \qquad \underset{\gamma}{X_\alpha} = \varphi_\alpha \times \underset{\gamma}{\psi},$$

$$(10') \qquad \underset{\gamma}{X^\alpha} = \underset{\nu}{\varphi^\alpha} \times \underset{\gamma}{\psi}.$$

Dalte (10) e dalle (5), si ha:

$$(11) \qquad \underset{\gamma}{X_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{\nu}{\varphi^\beta} \times \underset{\gamma}{\psi} = \sum_\beta a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{\gamma}{X^\beta}.$$

Poichè per le (9) e (9′) si ha

$$\varphi_\alpha \times \underset{\nu}{\varphi^\beta} = \sum_{\gamma\gamma'} \underset{\gamma}{X_\alpha} \underset{\gamma'}{X^\beta} \cdot \underset{\gamma}{\psi} \times \underset{\gamma'}{\psi} = \sum_\gamma \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{X^\beta}$$

si vede che, per le (6), si ha

$$(12) \qquad \sum_\gamma \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{X^\beta} = \delta_\alpha^\beta$$

Di qui risulta che $\underset{\gamma}{X^\alpha}$ è il reciproco di $\underset{\gamma}{X_\alpha}$ nel determinante che ha per elementi gli $\underset{\gamma}{X_\alpha}$, con $\gamma$ indice di riga ed $\alpha$

indice di colonna, ordinati allo stesso modo. (Questo determinante è evidentemente diverso da zero, perchè, se lo supponiamo eguale allo zero, ci sarebbe una relazione lineare per colonne e quindi le $\varphi$ sarebbero linearmente dipendenti, contro il supposto).

Sarà anche, per note proprietà dei determinanti ortogonali,

$$\sum_{\gamma} \underset{\alpha}{X_{\gamma}} \cdot \underset{\beta}{X^{\gamma}} = \delta_{\alpha}^{\beta} . \tag{13}$$

Consideriamo ora

$$\varphi_{\alpha}(t) = \sum_{\gamma} \underset{\gamma}{X_{\alpha}} \cdot \underset{\gamma}{\psi}(t) \quad \text{e} \quad \underset{\nu}{\varphi^{\alpha}}(\tau) = \sum_{\gamma'} \underset{\gamma'}{X^{\alpha}} \cdot \underset{\gamma'}{\psi}(\tau) ,$$

moltiplichiamo e sommiamo rispettto ad $\alpha$

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(t) \cdot \underset{\nu}{\varphi^{\alpha}}(\tau) = \sum_{\gamma\gamma'\alpha} \underset{\gamma}{X_{\alpha}} \underset{\gamma'}{X^{\alpha}} \cdot \underset{\nu}{\psi}(t) \cdot \underset{\gamma'}{\psi}(\tau) ,$$

e per la (13)

$$\Sigma_{\alpha}\, \varphi_{\alpha}(t) \cdot \underset{\nu}{\varphi^{\alpha}}(\tau) = \sum_{\gamma} \underset{\gamma}{\psi}(t) \cdot \underset{\gamma}{\psi}(\tau) . \tag{14}$$

Ora prendiamo il sistema covariante

$$H_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(t),$$

e deriviamolo coavariantemente secondo il sistema (2). Allora è

$$[H, \varphi] = \Sigma_{\alpha}\, \varphi_{\alpha}(t) \cdot \varphi^{\alpha}(\tau) = \Sigma\, \psi(t) \cdot \underset{\gamma}{\psi}(\tau) , \qquad [\text{v. } 14]$$

quindi $[H, \varphi]$ è costante rispetto alle $u$ ed è necessariamente $[H, \varphi]_{\gamma} = 0$ ed infine, indicando con $D_{\gamma}$ la derivata covariante, si ha

$$D_{\gamma}\, H_{\alpha} = [H, \varphi]_{\gamma} \times \varphi_{\alpha}^{(t)} = 0,$$

ossia

$$D_{\alpha}\, \varphi_{\alpha}(t) = 0 .$$

In modo analogo si trova

$$D_\gamma \underset{\nu}{\varphi}^\alpha (t) = 0 .$$

Integrando i due membri delle due precedenti relazioni, dopo averle moltiplicate per $\underset{\beta}{\psi}(t)$, si ottiene, [vedi (10) e (10')],

$$D_\gamma \underset{\beta}{X}_\alpha = 0 \ , \quad D_\gamma \underset{\beta}{X}^\alpha = 0$$

**2.** Supponiamo che esista una determinante $f$ per cui sia.

$$a_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha \times \varphi_\beta = f_\alpha \times f.$$

(Se $\nu = 1$ questo è sempre possibile [14]). Allora i parametri (manifestamente invarianti)

$$\underset{\gamma}{F} = \sum_\alpha \underset{\gamma}{X}^\alpha \cdot f_\alpha \ ,$$

i quali, evidentemente, appartengono al $\sigma_\nu$ della $V_n$ che ha per determinante la $f$, sono normali e a due a due ortogonali. Infatti:

$$\underset{j}{F} \times \underset{i}{F} = \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha \times f_\beta \cdot \underset{j}{X}^\alpha \cdot \underset{i}{X}^\beta = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{j}{X}^\alpha \cdot \underset{i}{X}^\beta \ .$$

Ma per la (11)

$$\underset{j}{X}_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{j}{X}^\beta \ .$$

Dunque

$$\underset{j}{F} \times \underset{i}{F} = \sum_\alpha \underset{j}{X}_\alpha \cdot \underset{i}{X}^\alpha = \delta_i^j \qquad \text{[v. (13)]}.$$

(14) Vedi SCHLÄFLI. *Sugli spazi a curvatura costante.* [Annali di Matematica, Serie 2, Vol. 5, 1871–73]. Ed anche E. CARTAN. *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.* [Annales de la societé Polonaise de mathematique. Tome VI, pag. 1].

**3**. Riprendiamo la relazione (12)

$$\sum_\gamma \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{X}^\beta = \delta^\beta_\alpha \ .$$

Moltiplichiamo poi i due membri per $a_{\beta,\gamma_1}$ e sommiamo rispetto a $\beta$, tenendo conto delle (11).

$$\sum_\gamma \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{X_{\gamma_1}} = a_{\alpha,\gamma_1} \ .$$

È bene avvertire che, per il fatto che il determinante $\underset{\nu}{a}$ è diverso da zero, la varietà che ha $f$ per determinante ha il $\sigma_\nu$ col massimo numero di dimensioni.

**4**. Consideriamo ora una varietà $V_n$ ad $n$ dimensioni il cui $\sigma_\nu$ abbia il massimo numero di dimensioni (cioè $0_\nu$ dimensioni) ed indichiamo con $f$ una sua determinante.

Consideriamo poi nel $\sigma_\nu$, $0_\nu$ parametri normali invarianti ed a due a due ortogonali

$$\underset{i}{F} \quad (i \text{ variabile nella classe } \nu)$$

Poniamo poi

$$a_{\alpha,\beta} = f_\alpha \times f_\beta$$

Allora sarà

$$\underset{i}{F} = \sum_\alpha \underset{i}{X}^\alpha \cdot f_\alpha ,$$

e ne consegue

$$\underset{i}{F} \times \underset{j}{F} = \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha \times f_\beta \cdot \underset{i}{X}^\alpha \cdot \underset{j}{X}^\beta = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{i}{X}^\alpha \cdot \underset{j}{X}^\beta \ .$$

Poniamo poi

$$\underset{j}{X_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{j}{X}^\beta$$

ed allora

$$\underset{i}{F} \times \underset{j}{F} = \sum_{\alpha} \underset{i}{X}^{\alpha} \cdot \underset{j}{X}_{\alpha}$$

ma per ipotesi,

$$\underset{i}{F} \times \underset{j}{F} = \delta_i^j .$$

È evidente che il determinante delle $\underset{i}{X}^{\alpha}$ è diverso dallo zero, quindi le $\underset{i}{X}_{\alpha}$ sono lo reciproche delle $\underset{i}{X}^{\alpha}$ in queste determinante e perciò si ha anche:

$$\sum_{i} \underset{i}{X}^{\alpha} \cdot \underset{i}{X}_{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} .$$

Riprendiamo la relazione

$$\underset{i}{F} = \sum_{\alpha} \underset{i}{X}^{\alpha} \cdot f_{\alpha} .$$

Moltiplichiamo per $\underset{i}{X}_{\beta}$ e sommiamo rispetto ad $i$

$$\sum_{i} \underset{i}{X}_{\beta} \cdot \underset{i}{F} = \sum_{\alpha} \left(\sum_{i} \underset{i}{X}_{\beta} \cdot \underset{i}{X}^{\alpha}\right) \cdot f_{\alpha} = f_{\beta} .$$

Da questa relazione si ricava

$$a_{\alpha,\beta} = f_{\alpha} \times f_{\beta} = \sum_{i,j} \underset{i}{F} \times \underset{j}{F} \cdot \underset{i}{X}_{\alpha} \cdot \underset{j}{X}_{\beta} = \sum_{i} \underset{i}{X}_{\alpha} \cdot \underset{i}{X}_{\beta} .$$

A questo punto consideriamo uno spazio lineare $S_{0_\nu}$ ad $0_\nu$ dimensioni ed in questo un sistema di parametri normali e a due a due ortogonali ed indipendenti dalle $u$ che chiamo

$$\underset{i}{\phi} \qquad (i \text{ variabile nella classe } \nu).$$

Ora poniamo

(15) $$\varphi_{\alpha} = \sum_{i} \underset{i}{X}_{\alpha} \cdot \underset{i}{\phi} .$$

Si ha subito

$$\varphi_\alpha \times \varphi_\beta = \sum_{i,j} \underset{i}{\phi} \times \underset{i}{\phi} \cdot \underset{i}{X}_\alpha \cdot \underset{j}{X}_\beta = \sum_i \underset{i}{X}_\alpha \cdot \underset{i}{X}_\beta = a_{\alpha,\beta} \,.$$

Si vede così che prendendo come sistema fondamentale, per definire la derivata covariante il sistema delle $\varphi$ dato dalle (15) si verificano per questo sistema le condizioni richieste del numero 2. La derivata covariante corrispondente ad un tal sistema delle $\varphi$ coincide per $\nu = 1$ e $\rho_j = 1$ con quella descritta nella nota $C$).